Ejemplo 1. Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales para el cálculo de la función de corriente. Aplicación a la representación de flujos fluidos

5.3 Movimientos planos y axilsimétricos. Función de corriente

Se puede definir una función escalar ψ (llamada función de corriente) cuando se tienen los siguientes tipos de flujos:

a) Flujo bidimensional incompresible
b) Flujo bidimensional compresible estacionario

En estas dos situaciones se puede definir la "función de corriente" ψ y obtener por derivación el campo de velocidades. La función de corriente permite simplificar ecuaciones, ya que elimina una incógnita, aunque aumenta en un grado el orden de las ecuaciones diferenciales.

a) Flujo Bidimensional Incompresible

Se puede definir una función escalar $\psi(x,y)$ tal que,

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} rv_r = \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases} \qquad \begin{cases} rv_r = \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ \rho v_z = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases}$$

verificándose la ecuación de continuidad para movimiento plano,

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{(cartesianas)} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0 \quad \text{(polares)} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{(axilsimétrico)}$$

de esta forma se sustituyen las dos variables independientes "u" y "v" por una única ψ. Una vez determinada esta, se obtienen las componentes del campo de velocidades por derivación.

b) Flujo Bidimensional Compresible Estacionario

En este caso se puede definir una función escalar $\psi(x,y)$ tal que,

$$\begin{cases} \rho u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ \rho v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} r\rho v_r = \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ \rho v_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho v_r = \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ \rho v_z = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} \end{cases}$$

verificándose la ecuación de continuidad para movimiento plano,

$$\nabla(\rho\vec{v}) = 0 \qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad \text{(cartesianas)} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta} = 0 \quad \text{(polares)} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{(axilsimétrico)}$$