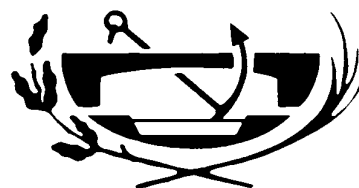




**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA**

**ESCUELA UNIVERSITARIA DE
INGENIERÍA TÉCNICA CIVIL**



***INGENIERÍA TÉCNICA DE OBRAS PÚBLICAS
ESPECIALIDAD HIDROLOGÍA***

Proyecto Fin de Carrera

**MODELACIÓN Y SIMULACIÓN DE REDES
HIDRÁULICAS A PRESIÓN MEDIANTE
HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS**

MARÍA DEL MAR GARCÍA ALCARAZ

Dirigido por:

D. LUIS G. CASTILLO ELSITDIÉ

Doctor Ingeniero de Caminos, C. y P.

Cartagena, julio de 2006

TABLA DE CONTENIDOS

CAPÍTULO 1.	INTRODUCCIÓN.....	5
1.1.	ACERCA DE EPANET	5
1.2.	PASOS PARA UTILIZAR EPANET.....	6
CAPÍTULO 2.	OBJETIVOS	7
CAPÍTULO 3.	RESUMEN	9
CAPÍTULO 4.	ALGORITMOS DE CÁLCULO.....	13
4.1.	DEFINICIONES.....	13
4.2.	HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS.....	16
4.3.	ECUACIONES FUNDAMENTALES	17
4.4.	ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LOS ELEMENTOS DE LA RED	18
4.4.1.	Tuberías	18
4.4.2.	Bombas.....	20
4.4.3.	Válvulas y Accesorios	20
4.4.4.	Emisores	23
4.5.	PROCESO ANALÍTICO DE RESOLUCIÓN	23
CAPÍTULO 5.	CÁLCULO DE UNA ESTACIÓN DE BOMBEO EN PERIODO SIMPLE. 27	
5.1.	DESCRIPCIÓN	27
5.2.	PLANTEAMIENTO.....	28
5.3.	SELECCIÓN DE LA BOMBA	31
5.4.	RED ALIMENTADA POR MEDIO DE UN DEPÓSITO Y UNA BOMBA.....	33
5.5.	COMPORTAMIENTO DE LA RED ANTE DIFERENTES ESTADOS DE CARGA.....	36
5.6.	OBTENCIÓN DE LA CURVA DE CONSIGNA.....	38
5.7.	CÁLCULO DE LA ESTACIÓN DE BOMBEO.....	43
CAPÍTULO 6.	CONTROL DE PRESIONES EN LA RED MEDIANTE EL USO DE VÁLVULAS REGULADORAS Y AUTOMÁTICAS	49
6.1.	DESCRIPCIÓN	49
6.2.	CONTROL DE LA RED MEDIANTE VÁLVULAS REGULADORAS	49
6.3.	CONTROL DE LA RED MEDIANTE VÁLVULAS REDUCTORAS DE PRESIÓN.....	54

CAPÍTULO 7. ESTUDIO DE LA RESPUESTA DE LA RED ANTE SITUACIONES EXTRAORDINARIAS	57
7.1. DESCRIPCIÓN	57
7.2. ROTURA DE UNA TUBERÍA.....	57
7.3. INCENDIO	59
CAPÍTULO 8. CÁLCULO DE UNA ESTACIÓN DE BOMBEO EN PERIODO EXTENDIDO.	61
8.1. DESCRIPCIÓN	61
8.2. PLANTEAMIENTO.....	61
8.3. DETERMINACIÓN DEL RÉGIMEN DE EXPLOTACIÓN DE LA RED	62
8.4. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA DEMANDA.....	64
8.5. ADAPTACIÓN DE LA RED A LA NUEVA SITUACIÓN	65
8.5.1. Configuración 1: depósito más dos bombas iguales en paralelo:.....	67
8.5.2. Configuración 2: depósito más una única bomba	71
8.5.3. Configuración 3: depósito más tres bombas:	76
8.6. ANÁLISIS ENERGÉTICO Y ECONÓMICO DE LAS CONFIGURACIONES PROPUESTAS.....	79
8.7. CÁLCULO CONSUMO ENERGÉTICO Y ECONÓMICO.....	82
CAPÍTULO 9. DIMENSIONAMIENTO DE REDES REALES DE REGADIO EN PERIODO EXTENDIDO.....	85
9.1. PLANTEAMIENTO.....	85
9.2. ADECUACIÓN DE LA RED	87
9.2.1. Sector I-A	88
9.2.2. Sector I-B	88
9.3. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS.....	90
9.3.1. Bombeo en 20 horas para satisfacer la demanda de un día.....	90
9.3.2. Bombeo en 8 horas para satisfacer la demanda de un día.....	90
9.3.3. Bombeo en 12 horas para satisfacer la demanda de tres días.....	90
9.4. MODELACIÓN Y ANÁLISIS EN CADA SECTOR.....	90
9.5. GENERACIÓN DE LOS ARCHIVOS DE EPANET.....	94
9.5.1. Sector I-A.	97
9.5.2. Sector I-B	105
9.6. COMPROBACIÓN TÉCNICA.....	110
CAPÍTULO 10. CONCLUSIONES.....	113
BIBLIOGRAFÍA	117

APÉNDICE A.	ALGORITMO DEL GRADIENTE APLICADO AL ANÁLISIS DE REDES DE ABASTECIMIENTO.....	4
A.1.	INTRODUCCIÓN.....	4
A.2.	LA DERIVACIÓN DEL ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON PROPUESTO.....	6
A.3.	VISIÓN GENERAL DE LOS PROCESOS DE GRADIENTE BASADOS EN MALLAS .	10
A.4.	PROS Y CONTRAS DE LAS DIFERENTES FORMULACIONES	12
A.5.	EL ALGORITMO DE FACTORIZACIÓN INCOMPLETA DE CHOLESKI / GRADIENTE CONJUGADO MODIFICADO APLICADO A LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	15
A.6.	CONCLUSIONES.....	17
A.7.	REFERENCIAS	18
APÉNDICE B.	EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN NODAL EN REDES MALLADAS	20
B.1.	EJEMPLO PRÁCTICO 1	22
B.1.1.	Solución algebraica	22
B.1.2.	Solución numérica por el método de Newton-Raphson.....	24
B.2.	EJEMPLO PRÁCTICO 2	26
APÉNDICE C.	CONCEPTOS MATEMÁTICOS	29
C.1.	MODELOS DE OPTIMIZACIÓN: CONTENT MODEL	29
C.1.1.	Content Model (Collins et al.).....	29
C.2.	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.....	32
C.3.	CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR PARTICIÓN (FRANK AYRES 1962, BROWN 1976, GRANSHAW 1980)	37
C.4.	MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.....	38
C.5.	FACTORIZACIÓN DE CHOLESKI	39

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Indudablemente, el nivel de vida que caracteriza a una población está ligado, en gran parte, al agua. Las condiciones de presión y calidad del suministro varían en el espacio y en el tiempo. Los consumos de polígonos industriales son ampliamente diferentes de los de una zona residencial. Este problema de dos variables, espacial y temporal, sólo puede abordarse mediante procedimientos informáticos.

Factores como el crecimiento poblacional y el desarrollo industrial influyen en la dinámica de crecimiento de la red de abastecimiento de una población. Las consecuencias de estas variaciones deben poder preverse con el objetivo de implantar las soluciones técnicas necesarias a tiempo a fin de que la demanda quede satisfecha. El compromiso de hacer llegar el producto a cada toma bajo unos requisitos mínimos de presión y calidad nos obliga a estudiar todas y cada una de las posibles eventualidades que puedan acontecer.

La ingeniería de las últimas décadas ha visto la irrupción de numerosos paquetes informáticos destinados a facilitar el diseño y el cálculo de sistemas físicos. Las redes de distribución de agua a presión, cuyo análisis antaño comportaba complejos y tediosos cálculos, también se han beneficiado de ello.

Con el objetivo de solucionar este problema, la USEPA (U.S. Environmental Protection Agency), organización creada en 1970 en EE.UU. y encargada de velar por los recursos naturales del país, ha desarrollado un potente software informático ampliamente conocido en la actualidad: EPANET.

Este programa de dominio público permite calcular complejas redes de abastecimiento y regadío, desde un punto de vista hidráulico y de calidad, ofreciendo una rápida capacidad de reacción así como una previsión del comportamiento del sistema de ayuda en la toma de decisiones.

El programa, pionero en este tipo de cálculos y tomado como ejemplo, se caracteriza por su elevado nivel de fiabilidad, debido a que con su uso continuado desde su creación hace una década, ha podido depurar muchos de los errores iniciales, corregidos en cada nueva versión. Similares a EPANET, en el ámbito privado, destacan RAWIN, Hidro-NET y ABAST.

1.1. ACERCA DE EPANET

EPANET es un programa de ordenador que realiza simulaciones en periodos prolongados del comportamiento hidráulico y de la calidad del agua en redes de suministro a presión. Una red puede estar constituida por tuberías, nudos (uniones entre tuberías), bombas, válvulas y depósitos de almacenamiento o embalses. Efectúa un seguimiento de la evolución de los caudales en las tuberías, las presiones en los nudos, los niveles en los depósitos, y la concentración de las especies químicas presentes en el agua, a lo largo del periodo de simulación discretizado en múltiples intervalos de tiempo.

El programa proporciona un entorno integrado bajo Windows, para la edición de los datos de entrada a la red, la realización de simulaciones hidráulicas y de la calidad del

agua, y la visualización de resultados en una amplia variedad de formatos. Entre éstos se incluyen mapas de la red codificados por colores, tablas numéricas, gráficas de evolución y mapas de isolíneas.

El éxito de EPANET radica en su potente simulador hidráulico que ofrece las siguientes prestaciones:

- No existe límite en cuanto al tamaño de la red que puede procesarse.
- Las pérdidas de carga pueden calcularse mediante las fórmulas de Hazen-Williams, de Darcy-Weisbach o de Chezy-Manning.
- Contempla pérdidas menores en codos, accesorios, etc.
- Admite bombas de velocidad fija o variable.
- Determina el consumo energético y sus costes.
- Permite considerar varios tipos de válvulas, tales como válvulas de corte, de retención, y reguladoras de presión o caudal.
- Admite depósitos de geometría variable (esto es, cuyo diámetro varíe con el nivel)
- Considera diferentes tipos de demanda en los nudos, cada uno con su propia curva de modulación en el tiempo.
- Permite modelar tomas de agua cuyo caudal dependa de la presión (p.ej. rociadores)
- Admite leyes de control simples, basadas en el valor del nivel en los depósitos o en la hora prefijada por un temporizador, y leyes de control más complejas basadas en reglas lógicas.

1.2. PASOS PARA UTILIZAR EPANET

Los pasos a seguir normalmente para modelar un sistema de distribución de agua con EPANET son los siguientes:

- Dibujar un esquema de la red o importar una descripción básica del mismo desde un fichero de texto.
- Editar las propiedades de los elementos que configuran el sistema en el editor de propiedades.
- Describir el modo de operación del sistema (arranque o parada de bombas, abertura o cierre de válvulas, etc.) mediante leyes de control.
- Seleccionar las opciones de cálculo (ecuaciones de cálculo de pérdidas de energía, sistema de unidades)
- Realizar el análisis hidráulico, rodando el programa.
- Observar los resultados en tablas o gráficas.

CAPÍTULO 2. OBJETIVOS

El primer objetivo de este Proyecto de Fin de Carrera es el aprendizaje y dominio de las posibilidades que ofrece EPANET en el análisis, diseño y comprobación de redes hidráulicas a presión, para obtener simulaciones lo más cercanas a la realidad del comportamiento de la red de estudio, reflejando fielmente cada elemento de la red.

El segundo objetivo consiste en recopilar los distintos conceptos físico-matemáticos necesarios para comprender las ecuaciones que rigen el comportamiento de las redes a presión, en los cuales se basa EPANET, lo que permitirá determinar las variables de estudio y parámetros que más influyen en el equilibrio hidráulico de la red.

Como tercer objetivo se plantea el diseño y optimización en periodo extendido de la estación de bombeo de una red ficticia de abastecimiento, a través de un estudio técnico y económico de las distintas soluciones planteadas.

El último objetivo es la optimización de la infraestructura y régimen de explotación de una red de regadíos real, siguiendo los procedimientos estudiados con anterioridad sobre la red ficticia.

CAPÍTULO 3. RESUMEN

Hoy en día, en el estudio y análisis de las redes de abastecimiento se hace indispensable el recurrir a programas informáticos como EPANET, de los cuales se obtienen, de manera instantánea, los valores de presiones y caudales en función de los parámetros definidos.

En general, tanto EPANET como el resto de programas dirigidos al cálculo de redes, necesitan la definición de los siguientes componentes, con el objetivo de obtener un modelo de la red lo más próximo a la realidad:

<i>Componentes físicos</i>		<i>Componentes no físicos</i>
<i>elementos puntuales</i>	<i>elementos lineales</i>	
nudos de caudal	tuberías	curvas de comportamiento
embalses	bombas	curvas de modulación o patrones
depósitos	válvulas	leyes de control

El comportamiento de cada uno de estos elementos se rige por las ecuaciones de *continuidad en nudos* y de *conservación de la energía*, así como por la relación entre la diferencia de alturas piezométricas de los extremos de cada elemento lineal y su caudal circulante. Estas expresiones relacionan las incógnitas que buscamos (caudales y presiones) con los parámetros y resto de variables que definen la red.

Del conjunto de relaciones anteriores se obtienen dos sistemas de ecuaciones no lineales, uno aplicando la ecuación de continuidad en nudos, y otro basado en las pérdidas de carga de los elementos de la red. De su resolución se obtendrán los caudales circulantes y las presiones en los nudos.

El carácter no lineal de estos sistemas de ecuaciones hace indispensable la aplicación de métodos numéricos de resolución. Concretamente, EPANET utiliza el método de Newton-Raphson para hallar la solución simultánea del sistema de ecuaciones de balance de masa y energía. El problema es resuelto mediante la solución iterativa de un sistema de ecuaciones lineales de tamaño igual al número de alturas piezométricas desconocidas.

Una vez que se conocen las posibilidades y limitaciones EPANET a la hora de describir el comportamiento y el modo de operación del sistema, caracterizando cada elemento, es posible comenzar a rodar el programa para analizar los resultados obtenidos.

En el capítulo 5 se estudia una red de abastecimiento en periodo simple. Inicialmente se encuentra alimentada únicamente por un depósito, con el que se suministran presiones inferiores al mínimo establecido. Se propone instalar una estación de bombeo que apoye al depósito en el suministro, de modo que aumenten las presiones en los puntos de consumo. Esta estación de bombeo debe ser capaz de abastecer el consumo de manera satisfactoria bajo los diferentes estados de carga a los que puede estar sometida la red. Para conseguirlo se construye la curva de consigna requerida en el punto donde se sitúa la estación de bombeo, es decir, se determina la presión que debe suministrar la bomba según el nivel de demanda. En función de esta curva será posible establecer las características y régimen de funcionamiento de la red.

Los capítulos 6 y 7 constituyen una continuación del capítulo 5. En ellos se proponen modificaciones a la red de abastecimiento ficticia definida en el capítulo 5, con el objetivo de aprender a actuar sobre la red para controlar los valores de presiones, manteniéndolos dentro de los límites establecidos.

Así pues, el capítulo 6 contiene 2 variantes de la red inicial sobre las que se estudia el uso de válvulas reguladoras y automáticas. En el primer caso, se introduce una válvula reguladora en la tubería que conecta el depósito con la red. Ésta, además de introducir una pérdida de energía localizada, disminuye el caudal inyectado por el depósito. Como el caudal que no suministra el depósito, lo tiene que aportar la estación de bombeo, su punto de funcionamiento se desplaza para poder suministrar un caudal mayor. Esto implica que se reduzca la presión a la que se inyectan estos caudales, lo que unido a la pérdida de energía puntual producida por la válvula, da lugar a una disminución de las presiones de suministro generalizada.

En el segundo caso, se estudia el uso de las válvulas reductoras de presión, para lo cual se disminuyen las cotas de 3 puntos del sector sur de la red. Rodando el programa bajo los estados de carga menores (con los que se obtienen mayores presiones) se comprueba que las presiones en los puntos de cota modificada superan el valor máximo permitido. Para remediarlo se insertan válvulas reductoras de presión en cada nudo, taradas a 40 m.c.a. De este modo se consiguen reducir las presiones a este valor.

En el capítulo 7 se analiza la respuesta de la red ante situaciones excepcionales, como son la rotura de una tubería o un incendio. En el caso de rotura se observa como se reducen las presiones por debajo del límite permitido, modificándose asimismo la distribución de caudales. Como solución se propone aumentar los diámetros de las tuberías que soportar la carga de la tubería rota, mejorándose considerablemente las presiones.

En el caso de incendio es necesario comprobar que la presión de suministro en el hidrante es superior a 10 m.c.a., según la legislación. Para simular esta situación se introduce un consumo adicional en los nudos próximos al incendio y se rueda el programa. Se comprueba que las presiones en los hidrantes son satisfactorias, de modo que no es necesario modificar la red. En caso de que las presiones sean inferiores a 10 m.c.a. se procedería a aumentar los diámetros de las tuberías cercanas para reducir las pérdidas de energía que tienen lugar en las inmediaciones.

Con las mejoras introducidas a la red se determina, en el capítulo 8, el régimen de funcionamiento y las características técnicas de la estación de bombeo en periodo extendido. Para ello se ha modificado, no sólo el esquema inicial de la red, añadiendo nuevas tuberías y aumentando diámetros, si no que también se ha redefinido tanto el depósito como la estación de bombeo. Si en los capítulos anteriores se proyectó la estación de bombeo con el objetivo de que compensara las bajas presiones suministradas por el depósito, en la nueva situación el depósito pasa a convertirse en depósito de cola que aporta caudal durante los mayores estados de carga. Por otro lado, el depósito será capaz de satisfacer la demanda en los menores estados de carga sin la colaboración de la estación de bombeo.

Se proponen 3 soluciones, en las que la configuración de la estación de bombeo está formada por 1, 2 ó 3 bombas. Para satisfacer un mismo estado de carga entrarán en

marcha un número diferente de bombas según cada configuración, dando lugar a distintas situaciones dentro de cada configuración. El régimen de funcionamiento óptimo en cada configuración se determina en función de la curva de carga diaria de la red, es decir, de la variación del estado de carga a lo largo del día. La puesta en marcha o parada de las bombas de cada configuración se ha propuesto analizando las presiones máximas y mínimas que se obtienen rodando el programa para las posibles situaciones de cada configuración y los distintos estados de carga, de modo que se elegirá aquella situación bajo la cual las presiones se mantengan entre los límites establecidos.

Introduciendo en EPANET las curvas de eficiencia de las bombas, así como la tarifa energética a aplicar, se obtienen los consumos diarios de energía. En base a los resultados calculados se elige la configuración que supone un menor gasto económico. Tras el estudio llevado a cabo se opta por instalar la configuración correspondiente a una sola bomba, ya que es la que más energía economiza, puesto que sólo funciona durante 20 horas al día (la dos bombas que constituyen la estación de bombeo en una de las configuraciones necesitan funcionar durante un total de 36 horas al día) a una potencia ligeramente superior.

En el capítulo 9 se plantean 2 redes de regadío reales, correspondientes a los sectores I-A y I-B de las Vegas Bajas del Guadalquivir. Tras optimizar los diámetros de los ramales secundarios, para que se cumplan los límites establecidos para las presiones de suministro y las velocidades de circulación por las tuberías, se realiza un análisis económico con el objetivo de determinar el diámetro de la conducción de impulsión que minimiza gastos. Con este propósito se plantean distintas alternativas para cada red. Para cada alternativa se realiza el análisis económico de manera gráfica, a partir de las anualidades de amortización de los costes fijos (tubería de impulsión, equipos de bombeo, balsa), así como con el coste anual de energía necesaria para el bombeo.

Una vez que se han seleccionado las alternativas óptimas desde el punto de vista económico se han aplicado criterios técnicos para confirmar que la solución óptima desde el punto de vista económico es también óptima desde el punto de vista técnico. Para lo cual se han calculado las sobrepresiones que se producirían por una parada brusca de los equipos de bombeo. Estos valores han duplicado y casi triplicado las presiones nominales de la tubería, lo que implica una mayor inversión al tener que aumentar el timbraje de la impulsión.

CAPÍTULO 4. ALGORITMOS DE CÁLCULO

Para acometer el análisis hidráulico de redes de distribución se debe formular primeramente el problema, estableciendo las ecuaciones que representan con mayor fidelidad el sistema, con el fin de obtener los valores de alturas piezométricas en los nudos y los caudales que circulan por las tuberías a partir de las características de los componentes de la red. De modo que tenemos:

Datos:

- características de las conducciones:
 - longitud
 - diámetro
 - rugosidad
- características de componentes especiales:
 - niveles de depósitos
 - curvas características de los grupos de bombeo
 - consigna de válvulas
- consumos en los nudos
- altura piezométrica de referencia (suma de altura de presión y cota)

Incógnitas:

- caudales circulantes por tuberías
- alturas piezométricas en los nudos

4.1. DEFINICIONES

Para abordar dicho objetivo, comenzaremos aclarando los siguientes conceptos:

Red de distribución: es un conjunto de elementos interconectados que conducen el agua desde los puntos de alimentación a los de consumo, manteniendo unas condiciones cuantitativas y cualitativas óptimas.

La topología del sistema da lugar a los siguientes tipos de redes:

Ramificadas: de forma arborescente, se caracterizan porque el agua tiene un único trayecto desde el punto de abastecimiento al punto de consumo. Es el caso de las redes de regadío. Para conocer el caudal que circula por una línea sólo es necesario aplicar la ecuación de continuidad en cada nudo, junto con la ecuación de la energía.

Éstas pueden resultar poco compensadas, obteniéndose la solución a través de un cálculo directo, ya que en los puntos más alejados de la red las presiones son menores. También presentan problemas de calidad al estancarse el agua. Esto es muy común en zonas de playa, donde es necesario reclarar o purgar el sistema, con la pérdida de agua que conlleva.

Malladas: están compuestas por circuitos cerrados formados por varias líneas. Nos ofrecen mayor garantía que las redes ramificadas, ya que el agua tiene distintos caminos

para llegar al punto de consumo. Así mismo las presiones tienden a autoequilibrarse sin necesidad de infraestructuras.

No pueden calcularse únicamente mediante la ecuación de continuidad, de modo que la determinación de caudales es más compleja, lo que hace imprescindible tenerlas modelizadas.

Mixtas: son las más comunes. Presentan mallas conectando las arterias principales y ramificaciones en las tuberías secundarias que llevan el agua al consumidor.

También es determinante la temporalidad a la hora de la modelación:

Simulación en periodo simple: los consumos en nudos, la piezometría y las características de los elementos de regulación no sufren alteraciones a lo largo del tiempo.

Simulación en periodo extendido: la variable tiempo se considera explícitamente. En todo caso considera que los tiempos de maniobra son muy superiores a los tiempos de viaje de las ondas de forma que no existe golpe de ariete.

En lo que concierne a la representación física de la red:

Elemento: es un componente real de la red, sin unión con el exterior, cuyo comportamiento hidráulico está perfectamente definido. Generalmente una red está constituida por una gran cantidad de elementos, de modo que para facilitar la modelación se agrupan en líneas.

Líneas: es un conjunto de elementos que se pueden caracterizar mediante una ecuación representativa del comportamiento global.

Nudos: corresponden a los lugares donde son aplicadas las condiciones de contorno del problema. Es a través de ellos por donde la red se comunica con el exterior.

Los componentes de la red representados mediante líneas son los siguientes:

Tuberías: EPANET asume que las tuberías se encuentran completamente llenas en todo momento, de modo que el flujo es a presión. El flujo circulará desde los nudos de mayor altura piezométrica hacia los de menor altura.

Bombas: comunican altura al fluido. El flujo a través de una bomba es de sentido único. EPANET no permite trabajar a la bomba fuera del rango delimitado por la curva característica definida.

Una vez especificada la curva característica de la bomba, podemos trabajar con bombas de velocidad variable precisando el valor de su velocidad relativa de giro, o bien asignando una curva de modulación a su velocidad de giro.

En lugar de introducir la curva característica de la bomba, podemos hacer que ésta trabaje a potencia constante. En este caso se tratará de un nudo, no una línea, por en que ingresa caudal a la red, siendo la demanda del nudo el valor, con signo negativo, del caudal que debe entrar a la red. De este modo EPANET calculará la altura que es necesario comunicar al fluido según el caudal.

Válvulas: limitan la presión o el caudal en un punto de la red según la consigna de cada tipo de válvula:

Válvulas Reductororas de Presión (VRP): evitan que la presión aguas abajo supere el valor de consigna. Se encontrará activa cuando el valor aguas arriba sea superior al valor de consigna; completamente abierta si es inferior; y cerrada si aguas abajo la altura piezométrica es mayor que aguas arriba con el objetivo de evitar el flujo inverso.

Válvulas Sostenedoras de Presión (VSP): evitan que la presión aguas arriba sea inferior al valor de consigna. Trabaja de manera activa cuando aguas abajo la presión sea inferior al valor de consigna; completamente abierta si es superior; y se encontrará cerrada para impedir el flujo inverso cuando la altura piezométrica sea mayor aguas arriba.

Válvulas de Rotura de Carga (VRC): reducen la presión en el nudo aguas abajo en un valor igual a la consigna.

Válvulas Limitadoras de Caudal (VLQ): limitan el caudal de paso a través de la línea en un valor determinado por la consigna. EPANET nos advierte en el caso de que con la válvula completamente abierta no se pueda suministrar el caudal de consigna. Son unidireccionales y deben orientarse en el mismo sentido del flujo por la línea. Si introducimos un caudal negativo como valor de consigna se comportan como una bomba de caudal prefijado.

Válvulas de Regulación (VRG): son bidireccionales. Trabajan introduciendo una pérdida de carga en función del caudal que las atraviesa. El valor de consigna es el coeficiente de pérdidas de la válvula.

Válvulas de Propósito General (VPG): se utilizan cuando la relación pérdidas-caudal no sigue el comportamiento típico establecido por las fórmulas hidráulicas. Se utilizan para modelar turbinas, descenso dinámico de pozos o válvulas reductoras de presión controladas por caudal. En estos casos la consigna de la válvula es la curva de pérdidas vs caudal.

Válvulas de Corte (VC) y Válvulas de Retención (VR): abren o cierran totalmente el paso del flujo. No se consideran líneas independientes, sino que se introducen en el modelo como características de las tuberías donde se localizan.

Accesorios: la pérdida de carga que introducen se modela modificando las características de la tubería donde van alojados, mediante su coeficiente de pérdidas.

Se representan como nudos los siguientes componentes:

Nudos de Caudal: son aquellos puntos donde confluyen las tuberías, a través de los cuales sale o entra agua, aunque también pueden ser sólo nudos de paso. Pueden tener asociados distintos tipos de demandas. Al igual que el resto de elementos considerados como nudos pueden ser punto de entrada de contaminantes a la red.

Embalses: son una fuente externa de alimentación o sumideros con capacidad ilimitada. Representan lagos, ríos, acuíferos o entradas a otros subsistemas. Al tratarse de

elementos de contorno del sistema no existen resultados derivados del cálculo en los mismos, ya que no se verán afectados por lo que ocurra en la red.

Depósitos: tienen una capacidad limitada de almacenamiento. En ellos puede variar el nivel de agua con el tiempo durante la simulación. Si el depósito está a su nivel máximo o mínimo, EPANET impide la entrada o salida de agua cerrando las líneas que lo conectan con la red.

Emisor: simula el flujo de salida a través de una tobera o un orificio que descargan a la atmósfera. El caudal descargado es proporcional a la raíz cuadrada de la presión y al coeficiente de descarga. Este coeficiente de descarga es el que se introduce en EPANET como propiedad del nudo para identificarlo como un emisor y representa el caudal que sale por el emisor para una caída de presión en el mismo de 1 m.c.a.

Además de los componentes ya definidos, EPANET necesita componentes no físicos para describir el comportamiento y modo de operación del sistema. Estos son:

Curvas de Comportamiento: representan la relación entre dos magnitudes. Son el caso de curvas características (altura-caudal), de rendimiento (rendimiento en %-caudal), de cubicación de embalses (volumen-caudal) o de pérdidas en válvulas de propósito general (pérdidas-caudal). Será necesario hacer referencia explícita a la curva en cuestión modificando las propiedades de cada elemento.

Curvas de Modulación o Patrones: se aplican cuando una determinada magnitud sufre modificaciones a lo largo del tiempo. Es necesario secuenciar los factores multiplicativos en función de los cuales variará dicha magnitud. Se utilizan para modular la demanda en nudos, las alturas de los embalses, la velocidad de giro de las bombas, las inyecciones de contaminantes en la red así como para calcular el precio de la energía.

Leyes de Control Simples: cambian el estado o la consigna de una línea según:

- el nivel de agua en un depósito
- la presión en un nudo
- el instante de la simulación
- la hora del día

Leyes de Control Basadas en Reglas: controlan el estado de líneas o consignas según una combinación de situaciones que pueda darse en la red.

4.2. HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS

Cuando las variaciones de caudal y presión son pequeñas, podemos despreciarlas sin conducir a demasiados errores, considerando el sistema como permanente. De este modo, las hipótesis simplificativas serán las siguientes:

a. *Hipótesis referentes al flujo:*

- flujo unidimensional en el sentido del eje de la conducción.
- invariabilidad temporal de las variables relacionadas con el flujo.
- distribución uniforme de velocidad y presión en secciones transversales.

b. *Hipótesis referentes al fluido:*

- incompresible
- monofásico
- homogéneo
- newtoniano

c. *Hipótesis referentes a las conducciones:*

- homogeneidad y constancia en:
 - material
 - sección transversal
 - espesor

4.3. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Se aplican los principios de conservación de masa y energía. De modo que las ecuaciones planteadas serán:

a. *La ecuación de continuidad en nudos:* enunciada de la siguiente manera:

“la suma algebraica de los caudales másicos (o volumétricos, ya que el fluido es incompresible) que confluyen en el nudo debe ser 0”.

lo que queda representado en la figura 4.1, en la que se ha adoptado como criterio de signos el positivo si el caudal se dirige del nudo i al j , si se trata de caudales que circulan por líneas de la red, siendo también de signo positivo aquellos caudales que salen de la red a través del nudo i , es decir, los consumos.

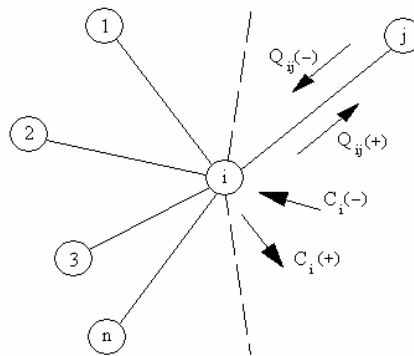


Fig. 4.1. Ecuación de continuidad para el nudo genérico i .

$$\sum_{j=1}^{nt_i} Q_{ij} = C_i \quad (4.1)$$

donde:

Q_{ij} : caudal que circula en la línea que une el nudo i al j ;

nt_i : número total de líneas que convergen en el nudo i ;

C_i : caudal de alimentación o consumo en el nudo i .

En lo que respecta a la conservación de energía, se aplica:

b. La ecuación de Bernoulli: expresada como sigue:

“la energía por unidad de peso del fluido en la sección aguas arriba (E_1), más la energía por unidad de peso cedida al mismo a través de elementos activos, tales como bombas (h_b) en el trayecto de 1 a 2 es igual a la energía por unidad de peso en la sección aguas abajo (E_2) más las pérdidas de energía por unidad de peso entre las secciones 1 y 2 (h_{1-2})”.

$$E_1 + h_b = E_2 + h_{1-2} \quad (4.2)$$

La energía por unidad de peso en una determinada sección consta de tres componentes:

$$E = \frac{p}{\gamma} + Z + \frac{V^2}{2g} \quad (4.3)$$

donde:

p/γ : altura de presión.
 Z : cota geométrica.
 $v^2/2g$: altura cinética.

4.4. ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO DE LOS ELEMENTOS DE LA RED

Son aquellas que establecen una relación entre la diferencia de alturas piezométricas entre los extremos del elemento y el caudal circulante.

4.4.1. Tuberías

La pérdida de carga o altura piezométrica en una tubería debida a la fricción por el paso del agua, puede calcularse con EPANET utilizando las siguientes formulaciones:

- Darcy-Weisbach (para todo tipo de líquidos y regímenes)
- Hazen-Williams (sólo para agua)
- Chezy-Manning (para canales y tuberías de gran diámetro)

La ecuación básica de estas tres fórmulas es:

$$h_L = A Q^B \quad (4.4)$$

donde:

h_L : pérdida de carga
 Q : caudal
 A : coeficiente de resistencia
 B : exponente de caudal

Los valores de los parámetros A y B se encuentran representados en la tabla 4.1.:

<i>Fórmula</i>	<i>Coficiente de Resistencia (A)</i>	<i>Exponente de Caudal (B)</i>
Hazen-Williams	$10.674 C^{-1.852} d^{-4.871} L$	1.852
Darcy-Weisbach	$0.0827 f(\epsilon, d, Q) d^{-5} L$	2
Chezy-Manning	$10.294 n^2 d^{-5.33} L$	2
<p>donde:</p> <p>C: coeficiente de rugosidad de Hazen-Williams</p> <p>ϵ: coeficiente de rugosidad de Darcy-Weisbach (m)</p> <p>f: factor de fricción (depende de ϵ, d y Q)</p> <p>n: coeficiente de rugosidad de Manning</p> <p>d: diámetro de la tubería (m)</p> <p>L: longitud de la tubería (m)</p> <p>Q: caudal (m³/seg)</p>		

Tabla 4.1. Fórmulas de Pérdida de Carga para tubería en presión

Los coeficientes de rugosidad que aparecen en las tres formulaciones se encuentran clasificados según el tipo de tuberías en la tabla 4.2.

<i>Material</i>	<i>C Hazen-Williams (universal)</i>	<i>ϵ Darcy-Weisbach (mm)</i>	<i>n Manning (universal)</i>
fundición	130 – 140	0.26	0.012 – 0.015
hormigón	120 – 140	0.3 – 3.0	0.012 – 0.017
hierro galvanizado	120	0.15	0.015 – 0.017
plástico	140 – 150	0.0015	0.011 – 0.015
acero	140 – 150	0.045	0.015 – 0.017
cerámica	110	0.3	0.013 – 0.015

Tabla 4.2. Coeficientes de Rugosidad para Tubería Nueva

El factor de fricción f de la fórmula de Darcy-Weisbach se calcula, según el tipo de régimen, con uno de los siguientes métodos:

- Para flujo laminar ($Re < 2.000$) emplea la fórmula de Hazen-Poiseuille:

$$f = \frac{64}{Re}$$

- Para flujo turbulento ($Re > 4.000$) emplea la aproximación explícita de Swamee y Jain a la fórmula de Colebrook-White:

$$f = \frac{0.25}{\left[\log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3.7d} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

- Para el flujo de transición ($2000 < Re < 4000$) aplica una interpolación cúbica al diagrama de Moody:

4.4.2. Bombas

En caso de bombas, la altura suministrada al fluido se considerará como pérdidas cambiadas de signo, según la siguiente expresión:

$$h_{ij} = -\omega^2 \left(h_0 - r \left(\frac{Q_{ij}}{\omega} \right)^n \right) \quad (4.5)$$

donde:

h_0 : altura a caudal nulo

ω : velocidad relativa de giro

r y n : son parámetros de la curva de la bomba

Q_{ij} : caudal que circula en la línea que une el nudo i al j .

El estado de las bombas se comprueba en cada instante de cálculo tras cada iteración sólo en las 10 primeras iteraciones. En las siguientes iteraciones deja de comprobarse hasta que se produce la convergencia.

Como consecuencia de la comprobación del estado, las bombas se paran si la altura que debe suministrar es superior a su altura a caudal cero. En este caso se fuerza el caudal de paso a un valor de 10^{-6} pies³/seg ($2.8316 \cdot 10^{-8}$ m³/seg), lo que se puede considerar como un caudal nulo que representa el cierre de la bomba. Ésta se pondrá en marcha de nuevo cuando dejen de darse altas demandas, siendo entonces el caudal de paso el que se obtiene al entrar en la curva característica de la bomba con la altura requerida en el nuevo intervalo.

4.4.3. Válvulas y Accesorios

Las válvulas abiertas se consideran como tuberías lisas (con factor de fricción f igual a 0.02) de longitud igual a dos veces su diámetro.

En el caso de válvulas cerradas se aplica la siguiente formulación lineal:

$$h = 10^8 Q \quad (4.6)$$

Las pérdidas localizadas en válvulas activas y accesorios se evalúan como el producto de la altura cinética multiplicada por un coeficiente de pérdidas K , en la forma:

$$h = K \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad \text{o bien} \quad h = \left(\frac{8K}{\pi^2 g D^4} \right) Q^2 \quad (4.7.a.)$$

donde:

K : coeficiente de pérdidas menores

v : velocidad del flujo

g : aceleración de la gravedad

D : diámetro del elemento

Q : caudal circulante

EPANET calcula las pérdidas con la expresión en función del caudal, de la siguiente manera:

$$h = \frac{0.02517}{D^4} Q^2 \quad (4.7.b.)$$

En unidades del sistema internacional el coeficiente numérico 0.02517 se transforma en 0.08262 .

En la tabla 4.3. se listan los valores de K para algunos de los accesorios más comunes. Estos valores son sólo aproximados, ya que K depende de la geometría del accesorio, de Re y, en ocasiones, de las condiciones de flujo.

ACCESORIO	COEF. PÉRDIDAS
Válvula de Globo, todo abierta	10.0
Válvula de Ángulo, todo abierta	5.0
Válv. Retenc. Clapeta, todo abierta	2.5
Válvula Compuerta, todo abierta	0.2
Codo de radio pequeño	0.9
Codo de radio mediano	0.8
Codo de radio grande	0.6
Codo a 45°	0.4
Codo de retorno (180°)	2.2
Té Estándar – flujo recto	0.6
Té Estándar – flujo desviado	1.8
ACCESORIO	COEF. PÉRDIDAS
Entrada brusca	0.5
Salida brusca	1.0

Tabla 4.3. Coeficientes de Pérdidas menores.

Sin embargo existen válvulas especiales, cuya pérdida de carga no puede calcularse solamente en función del caudal, si no que intervienen otras variables, como son las alturas piezométricas aguas arriba y abajo. Se detallan a continuación las reglas lógicas de comportamiento de estos tipos de válvulas:

Válvula de Retención (VR): no es suficiente con establecer pérdidas negativas ($h < 0$) para determinar si la válvula debe estar cerrada, ya que debido a los límites de precisión numérica tienen lugar comportamientos cíclicos de la válvula. Para conseguir un comportamiento más robusto se introduce como factor determinante el caudal, además de la pérdida:

si $|h| > H_{tol}$ entonces

si $h < -H_{tol}$ entonces estado = CERRADA

si $Q < -Q_{tol}$ entonces estado = CERRADA

si no estado = ABIERTA

si no

si $Q < -Q_{tol}$ entonces estado = CERRADA

si no estado = sin cambios

donde:

$H_{tol} = 0,0005$ pies ($0,0001524$ m)

$Q_{tol} = 0,001$ pies³/s ($0,0000283$ m³/s)

Válvulas Reductororas de Presión (VRP): la lógica empleada para comprobar su estado es la siguiente:

Si estado actual = ACTIVA	entonces:
si $Q < -Q_{tol}$	entonces nuevo estado = CERRADA
si $H_i < H_{set} + H_{ml} - H_{tol}$	entonces nuevo estado = ABIERTA
si no	nuevo estado = ACTIVA
Si estado actual = ABIERTA	entonces:
si $Q < -Q_{tol}$	entonces nuevo estado = CERRADA
si $H_i > H_{set} + H_{ml} + H_{tol}$	entonces nuevo estado = ACTIVA
si no	nuevo estado = ABIERTA
Si estado actual = CERRADA	entonces:
si $H_i > H_j + H_{tol}$	
y $H_i < H_{set} - H_{tol}$	entonces nuevo estado = ABIERTA
si $H_i > H_j + H_{tol}$	
y $H_j < H_{set} - H_{tol}$	entonces nuevo estado = ACTIVA
si no	nuevo estado = CERRADA

donde:

Q : caudal actual a través de la válvula
 H_i : altura aguas arriba
 H_j : altura aguas abajo
 H_{set} : presión de consigna
 H_{ml} : pérdida menor a válvula abierta

Válvulas Sostenedoras de Presión (VSP): análogamente a las VRP tenemos:

Si estado actual = ACTIVA	entonces:
si $Q < -Q_{tol}$	entonces nuevo estado = CERRADA
si $H_j > H_{set} + H_{ml} - H_{tol}$	entonces nuevo estado = ABIERTA
si no	nuevo estado = ACTIVA
Si estado actual = ABIERTA	entonces:
si $Q < -Q_{tol}$	entonces nuevo estado = CERRADA
si $H_j < H_{set} + H_{ml} + H_{tol}$	entonces nuevo estado = ACTIVA
si no	nuevo estado = ABIERTA
Si estado actual = CERRADA	entonces:
si $H_j < H_i + H_{tol}$	
y $H_j > H_{set} - H_{tol}$	entonces nuevo estado = ABIERTA
si $H_j < H_i + H_{tol}$	
y $H_i > H_{set} - H_{tol}$	entonces nuevo estado = ACTIVA
si no	nuevo estado = CERRADA

Válvulas Limitadoras de Caudal: para este tipo de válvulas tenemos:

si $H_i < H_j$	entonces estado = CERRADA
si $Q < Q_{set}$	entonces estado = ABIERTA
si $Q > Q_{set}$	entonces estado = ACTIVA

4.4.4. Emisores

En emisores, las pérdidas de carga se calculan a través de la siguiente expresión, considerando al emisor como una tubería ficticia que une al nudo donde se encuentra el emisor con un embalse ficticio:

$$h = \left(\left(\frac{1}{C} \right) Q \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.8)$$

donde:

C: coeficiente de descarga del emisor

γ : exponente de la presión (próximo a 0.5)

El caudal de paso por la tubería ficticia será el descargado por el emisor, siendo la altura del embalse ficticio la cota del nudo.

4.5. PROCESO ANALÍTICO DE RESOLUCIÓN

EPANET aplica el método de iteraciones sucesivas conocido como *Método del Gradiente*, propuesto en 1987 por Todini y Pilati. Aúna técnicas basadas en métodos de optimización, así como técnicas basadas en el método de Newton-Raphson nodal. Comienza aplicando las técnicas de optimización, las cuales garantizan la existencia y unicidad de la solución minimizando la función objetivo, condiciones indispensables para que se produzca la convergencia posteriormente al utilizar las técnicas del método de Newton-Raphson. El problema es finalmente conducido a una solución algebraica mediante el proceso iterativo conocido como Algoritmo de Factorización Incompleta de Choleski / Gradiente Conjugado Modificado, cuyas siglas en inglés corresponden a ICF/MCG (Incomplete Choleski Factorization / Modified Conjugate Gradiente).

Propone dos sistemas de ecuaciones, uno basado en las pérdidas de carga de los elementos de la red, y otro aplicando la ecuación de continuidad en nudos, de modo que en ambos casos, las incógnitas son los caudales circulantes.

El método de resolución del gradiente comienza estimando inicialmente el caudal que atraviesa cada tubería, sin necesidad de cumplir la ecuación de continuidad. Este caudal será el correspondiente a una velocidad de 1 pie/s (0,3048 m/s).

En cada iteración, el método calcula las alturas piezométricas en los nudos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{TH} = \mathbf{F} \quad (4.9)$$

donde:

T: matriz Jacobiana (n, n)

H: vector de incógnitas nodales ($n, 1$)

F: vector de términos independientes ($n, 1$)

Los elementos de la diagonal principal de la matriz jacobiana vienen dados por:

$$T_{ii} = \sum_j p_{ij} \quad (4.10)$$

Los elementos no nulos que quedan fuera de la diagonal principal por:

$$T_{ij} = -p_{ij} \quad (4.11)$$

donde p_{ij} es la inversa de la derivada respecto al caudal, de la pérdida de carga en la línea que va del nudo i al j :

$$p_{ij} = \frac{1}{BA|Q_{ij}|^{B-1} + 2m|Q_{ij}|} \quad (4.12)$$

donde:

A : coeficiente de resistencia

B : exponente de caudal

m : coeficiente de pérdidas menores

y para bombas:

$$p_{ij} = \frac{1}{n\omega^2 r \left(\frac{Q_{ij}}{\omega} \right)^{n-1}} \quad (4.13)$$

donde:

n y r : parámetros de la curva de la bomba

Los términos independientes son la suma del caudal residual no equilibrado en el nudo más el factor de corrección y_{ij} según la siguiente expresión:

$$F_i = \left(\sum_j Q_{ij} - D_i \right) + \sum_j y_{ij} + \sum_f p_{if} H_f \quad (4.14)$$

donde f es un nudo de altura conocida.

El factor de corrección del caudal se calcula en tuberías como:

$$y_{ij} = p_{ij} \left(A|Q_{ij}|^B + m|Q_{ij}|^2 \right) \text{sgn}(Q_{ij}) \quad (4.15)$$

La función $\text{sgn}(Q_{ij})$ vale 1 cuando el caudal circula del nudo i al j y negativo en caso contrario.

En bombas el factor de corrección es de la forma:

$$y_{ij} = -p_{ij} \omega^2 \left(h_0 - r \left(\frac{Q_{ij}}{\omega} \right)^n \right) \quad (4.16)$$

Una vez que se ha resuelto el sistema matricial obteniéndose las alturas, los nuevos caudales se calculan como:

$$Q_{ij} = Q_{ij} - (y_{ij} - p_{ij}(H_i - H_j)) \quad (4.17)$$

Si la suma, extendida a todas las líneas, del valor absoluto de la variación del caudal respecto al caudal total de cada línea es mayor que una cierta tolerancia se calcula de nuevo el sistema matricial.

Sin embargo, la mayoría de las veces la simulación tendrá lugar en periodo extendido, es decir, a lo largo de un cierto periodo de tiempo. En este caso EPANET tiene en cuenta una serie de consideraciones:

- Una vez que se ha solucionado el modelo para el instante actual, el incremento de tiempo adoptado para avanzar al instante siguiente será el mínimo entre los siguientes:

- el instante en que comienza un nuevo periodo de demanda
- el menor intervalo de tiempo que hace que se llene o vacíe algún depósito
- el menor intervalo de tiempo en el que tiene lugar el cambio de estado de una línea
- el próximo instante en el que debe actuar algunas de las leyes de control reguladas por tiempo o produzcan un cambio en la red.

Para calcular el instante en el que se alcanza un determinado nivel en un depósito, se supone que éste evoluciona linealmente según los caudales entrantes o salientes.

El instante de reactivación de las leyes de control basadas en reglas, se determina del siguiente modo:

- las reglas se analizan a intervalos de tiempo fijos, cuyo valor por defecto es 1/10 del intervalo de cálculo hidráulico.
- según este intervalo de tiempo, se actualizan la hora de la simulación y los niveles de agua en los depósitos.
- las actuaciones derivadas del cumplimiento de reglas se añaden a una lista, prevaleciendo la actuación de prioridad más alta, o bien la que ya estaba en la lista.
- si como consecuencia de dichas actuaciones el estado de una o más líneas cambia, se obtiene una nueva solución.

- una vez determinado el intervalo de avance, se actualiza el tiempo de la simulación, se calculan las nuevas demandas, se ajustan los niveles en los depósitos y se verifican las reglas de control.

- finalmente se desencadena un nuevo proceso iterativo para resolver el sistema de ecuaciones, partiendo de los caudales actuales.

Una vez que se conocen las posibilidades y limitaciones de EPANET en la modelización hidráulica de redes de abastecimiento se procede, en los siguientes capítulos, a afrontar distintas situaciones, tanto reales como ficticias, mediante esta herramienta.

CAPÍTULO 5. CÁLCULO DE UNA ESTACIÓN DE BOMBEO EN PERIODO SIMPLE.

Tanto esta aplicación como las siguientes se basan en el primer ejemplo del “Curso de análisis, diseño, operación y mantenimiento de redes hidráulicas a presión”, publicado en 1997 por el Departamento de Mecánica de Fluidos de la Universidad Politécnica de Valencia.

5.1. DESCRIPCIÓN

En este primer análisis se parte de una red sencilla, la cual podría representar el esquema de abastecimiento de agua potable de una pequeña población, que consume un caudal total de 100 l/s y está formada por 17 nudos y 23 líneas, cuyas características están contenidas en la figura 5.1:

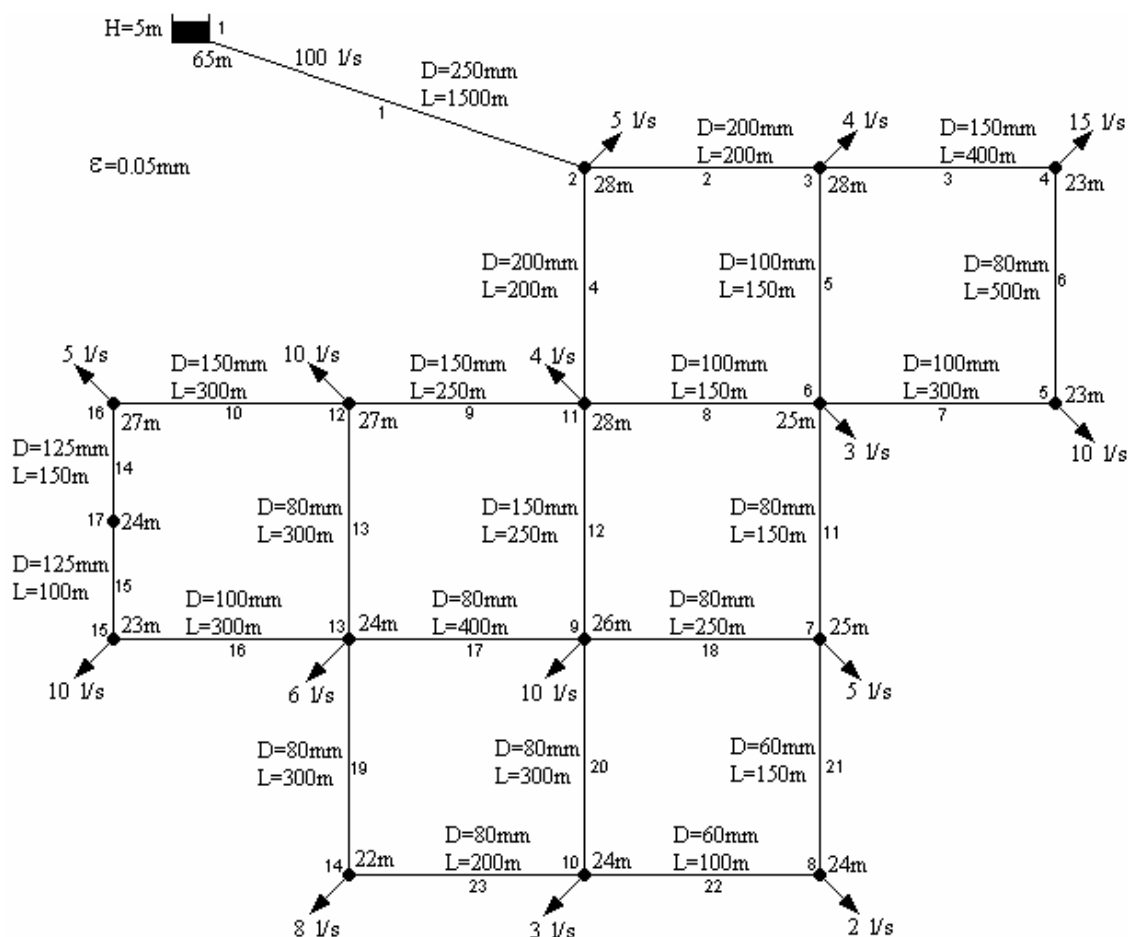


Fig. 5.1. Esquema de la red alimentada por depósito.

Tras introducir los datos en el programa y rodarlo, se observará que con el depósito no se suministran unas condiciones aceptables, ya que las presiones en muchos nudos de consumo son demasiado bajas. Para solucionar esto se decide ayudar al depósito instalando una estación de bombeo que inyectará directamente a la red en el

nudo 17. Estará constituida por una única bomba que debe proporcionar el 30% del caudal consumido en la red.

De modo que la red se encontrará alimentada desde dos puntos, el depósito, que aporta unos 70 l/s, y la bomba, que inyecta a la red los 30 l/s restantes. Así se conseguirá mejorar notablemente la distribución de presiones en la red. Llegados a este punto, se simularán diferentes estados de carga del sistema para estudiar el comportamiento de la red.

Por último se construirá la curva de consigna requerida en el punto donde se sitúa la estación de bombeo, es decir, la presión que debe suministrar la bomba según el nivel de demanda. Adaptando el sistema de bombeo a esta curva de consigna se conseguirá mantener las presiones en toda la red dentro de los valores máximos y mínimos que se establezcan.

5.2. PLANTEAMIENTO

A partir de los datos que caracterizan la red presentes en la figura 5.1, se puede crear el fichero de datos de entrada para que EPANET calcule la red. Será necesario que los siguientes datos se encuentren especificados:

- Depósito:
 - cota a la que está situado (m)
- Nudos de consumo:
 - cota del nudo (m)
 - caudal consumido (l/s)
- Líneas o tuberías:
 - nudos inicial y final de la línea
 - longitud de la tubería (m)
 - diámetro de la tubería (mm)
 - rugosidad de la tubería (mm)

A continuación se presenta el fichero de datos de entrada utilizado, en el cual se detallan las características de cada elemento que compone la red.

[TITLE]

CÁLCULO BOMBEO

[JUNCTIONS]

;ID	Elev	Demand
2	28	5
3	28	4
4	23	15
5	23	10
6	25	3
7	25	5
8	24	2

9	26	10
10	24	3
11	28	4
12	27	10
13	24	6
14	22	8
15	23	10
16	27	5
17	24	0

[RESERVOIRS]

;ID	Head
1	70

[PIPES]

;ID	Node1	Node2	Length	Diameter	Roughness
2	2	3	200	200	0.05
3	3	4	400	150	0.05
4	2	11	200	200	0.05
5	3	6	150	100	0.05
6	4	5	500	80	0.05
7	6	5	300	100	0.05
8	11	6	150	100	0.05
9	11	12	250	150	0.05
10	12	16	300	150	0.05
11	6	7	150	80	0.05
12	11	9	250	150	0.05
13	12	13	300	80	0.05
14	16	17	150	125	0.05
15	17	15	100	125	0.05
16	13	15	300	100	0.05
17	9	13	400	80	0.05
18	9	7	250	80	0.05
19	13	14	300	80	0.05
20	9	10	300	80	0.05
21	7	8	150	60	0.05
22	10	8	100	60	0.05
23	10	14	200	80	0.05
1	1	2	1500	250	0.05

[OPTIONS]

Units	LPS
Headloss	D-W

[COORDINATES]

;Node	X-Coord	Y-Coord
2	2.00	3.00
3	3.00	3.00
4	4.00	3.00
5	4.00	2.00
6	3.00	2.00
7	3.00	1.00
8	3.00	0.00
9	2.00	1.00

10	2.00	0.00
11	2.00	2.00
12	1.00	2.00
13	1.00	1.00
14	1.00	0.00
15	0.00	1.00
16	0.00	2.00
17	0.00	1.50
1	0.50	4.00

[LABELS]

;X-Coord	Y-Coord	Name
0.75	4.15	Depósito

[BACKDROP]

DIMENSIONS -1.00 -1.00 5.00 5.00

[END]

Introduciendo este fichero en EPANET y corriendo el programa (archivo 5.1) se pueden visualizar los resultados. Las presiones en los nudos y las velocidades en las líneas se encuentran representadas en las figuras 5.2 y 5.3 respectivamente.

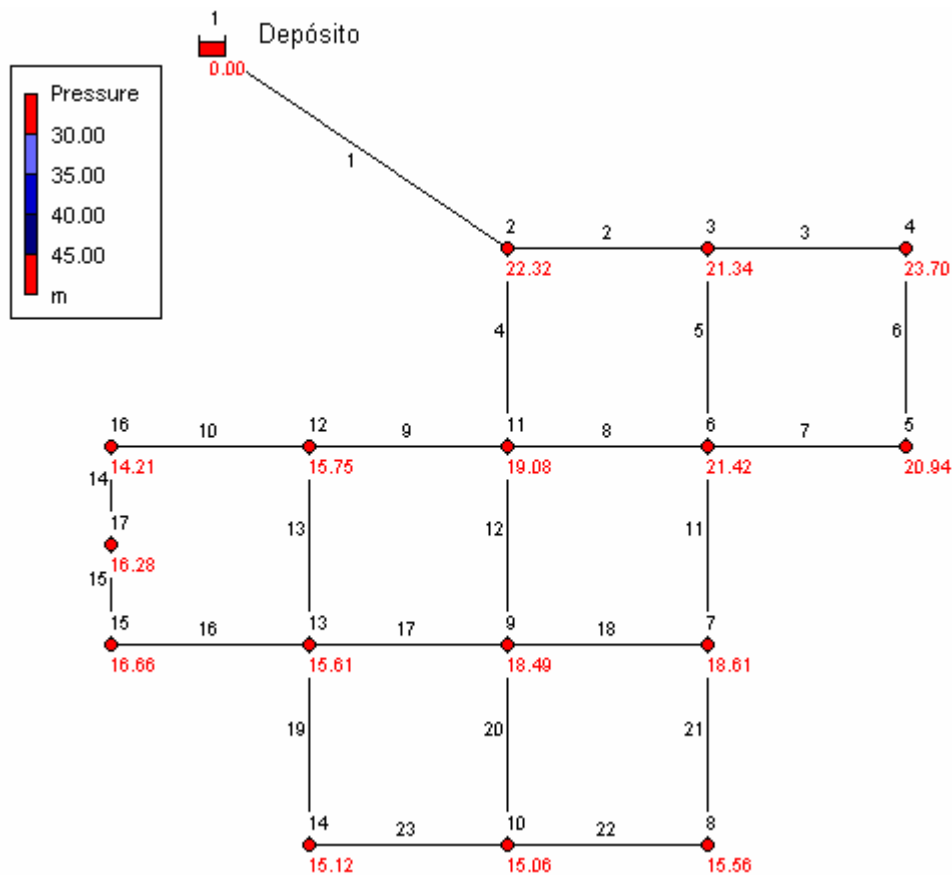


Fig. 5.2. Presiones en nudos (m.c.a.), red inicial.

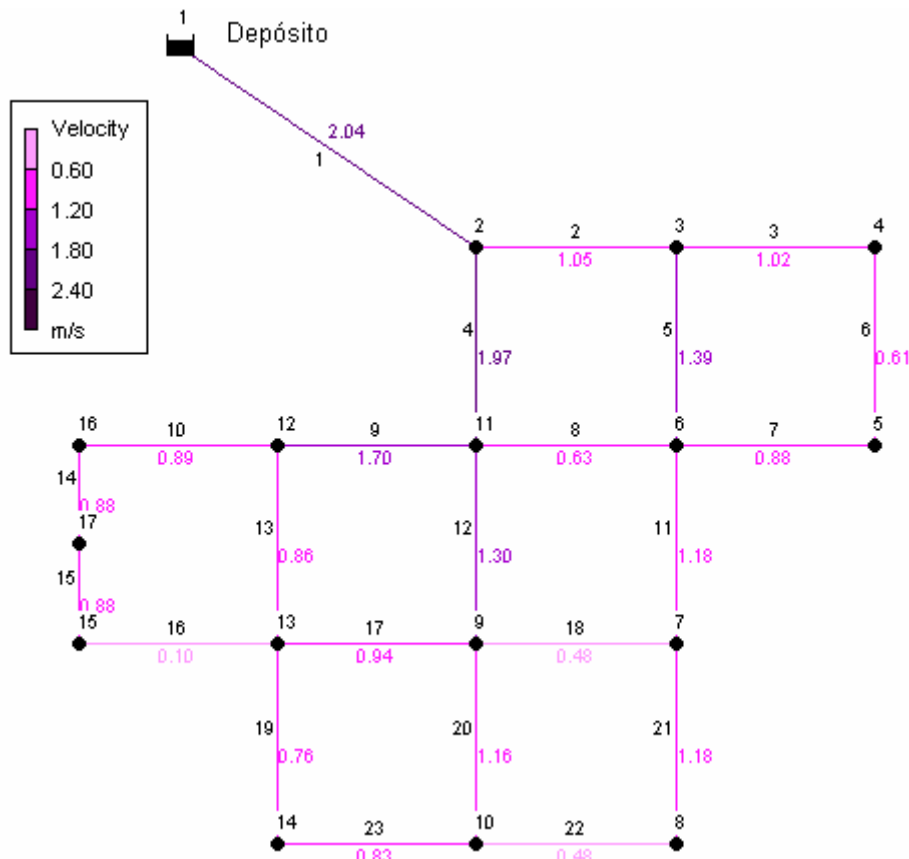


Fig. 5.3. Velocidades en las líneas (m/s), red inicial.

Analizando los valores de las presiones se aprecia que son demasiado bajas, en general inferiores a 20 m.c.a. Por otro lado las velocidades en determinadas líneas son bastante elevadas, rondando los 2 m/s en algunas tuberías.

Con el objetivo de mejorar la situación, se propone inyectar directamente a la red en el nudo 17. Además se impondrá la condición de que la bomba suministre aproximadamente el 30% del caudal total consumido en la red.

5.3. SELECCIÓN DE LA BOMBA

Para proceder a la selección de la bomba necesitamos conocer la altura que ésta debe proporcionar para un caudal de 30 l/s.

Para conseguir que el nudo 17 trabaje como una bomba ficticia se debe colocar el valor -30 l/s en el lugar correspondiente a la demanda del nudo 17 según el archivo 5.2 (el signo negativo nos indica que es un caudal inyectado a la red, dejando el signo positivo para los caudales consumidos). Las presiones calculadas pueden observarse en la figura 5.4.

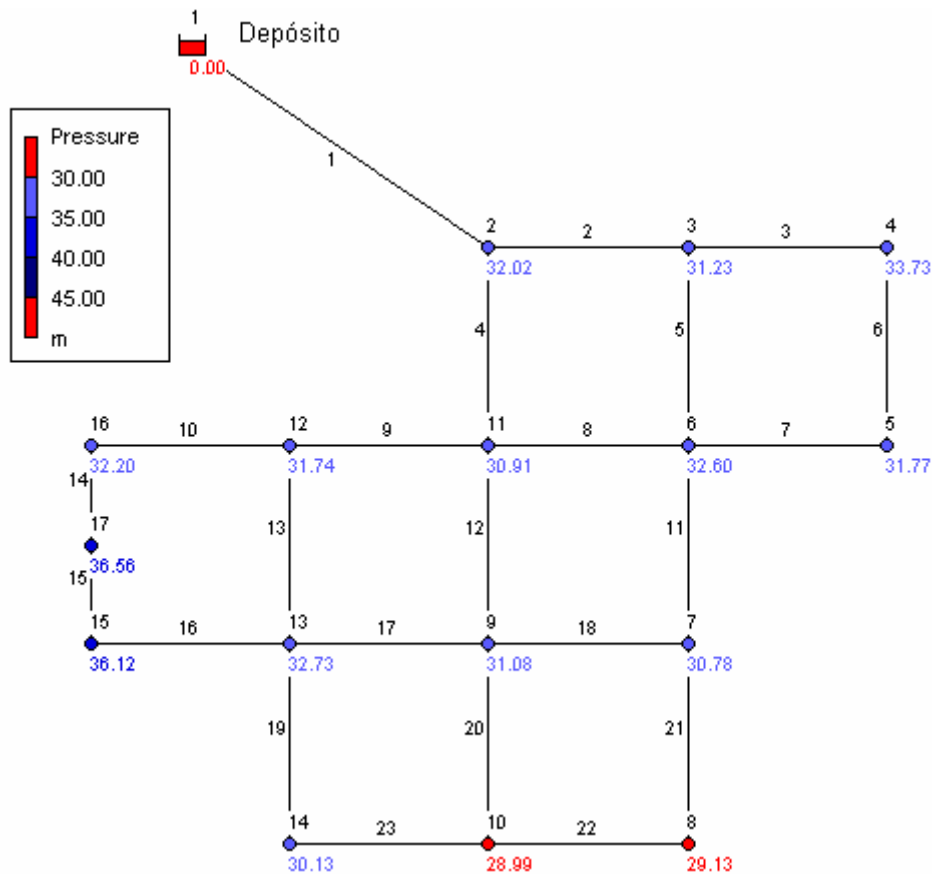


Fig. 5.4. Presiones en los nudos (m.c.a.), inyectando 30 l/s en el nudo 17.

Según los resultados obtenidos, la presión en el nudo 17 cuando la bomba ficticia inyecta los 30 l/s es de 36.56 m.c.a. Así pues, ya conocemos el punto óptimo de la bomba: el caudal que debe trasegar la bomba (30 l/s) y la presión que debe proporcionar (36.56 m.c.a.) Ahora vamos a proceder a seleccionar la bomba necesaria para satisfacer el punto óptimo que hemos determinado.

Para seleccionar la bomba adecuada acudimos a los catálogos comerciales teniendo en cuenta que el punto óptimo debe ser:

$$(Q, H) = (30 \text{ l/s}, 36.56 \text{ m.c.a.})$$

Por ejemplo se puede elegir la bomba mostrada en la figura 5.5, con diámetro de rodete igual a 365 mm.

Tomando varios puntos de la curva podemos ajustarla a una parábola de la forma:

$$H(m) = 44.967 + 0.4054 Q - 0.0214 Q^2; \quad \text{con } Q \text{ en l/s}$$

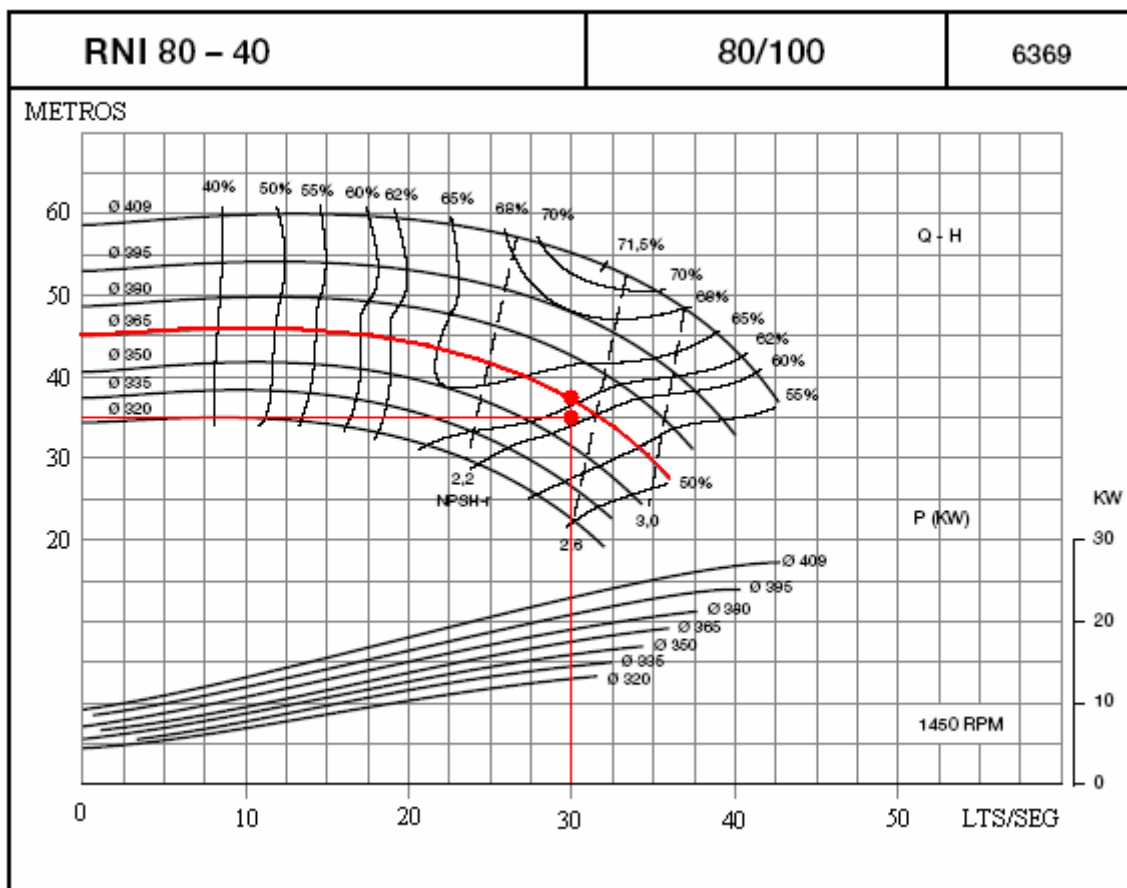


Fig. 5.5. Selección de la bomba.

5.4. RED ALIMENTADA POR MEDIO DE UN DEPÓSITO Y UNA BOMBA

Una vez que ya se ha seleccionado la bomba que satisfará las necesidades exigidas, vamos a modificar el fichero de datos para incluirla como una nueva línea en el problema inicial, en el que la red estaba alimentada únicamente por un depósito, con el cual no se cubrían las presiones mínimas.

Para incluir la bomba como un elemento más, deberemos añadir una línea nueva (para simular la bomba) y un nudo nuevo (para simular el depósito de aspiración), tal y como queda reflejado en la figura 5.6.

El nuevo nudo 18 representa el depósito de aspiración de la bomba, que se encuentra en la misma cota que el nudo 17 donde se inyecta a la red (24m). La nueva línea 24 se define desde el punto 18 (pozo de aspiración) hacia el nudo 17 (nudo de inyección). Esta nueva línea, que simula el comportamiento de la bomba, debemos introducirla en la sección [PUMPS] del fichero de datos.

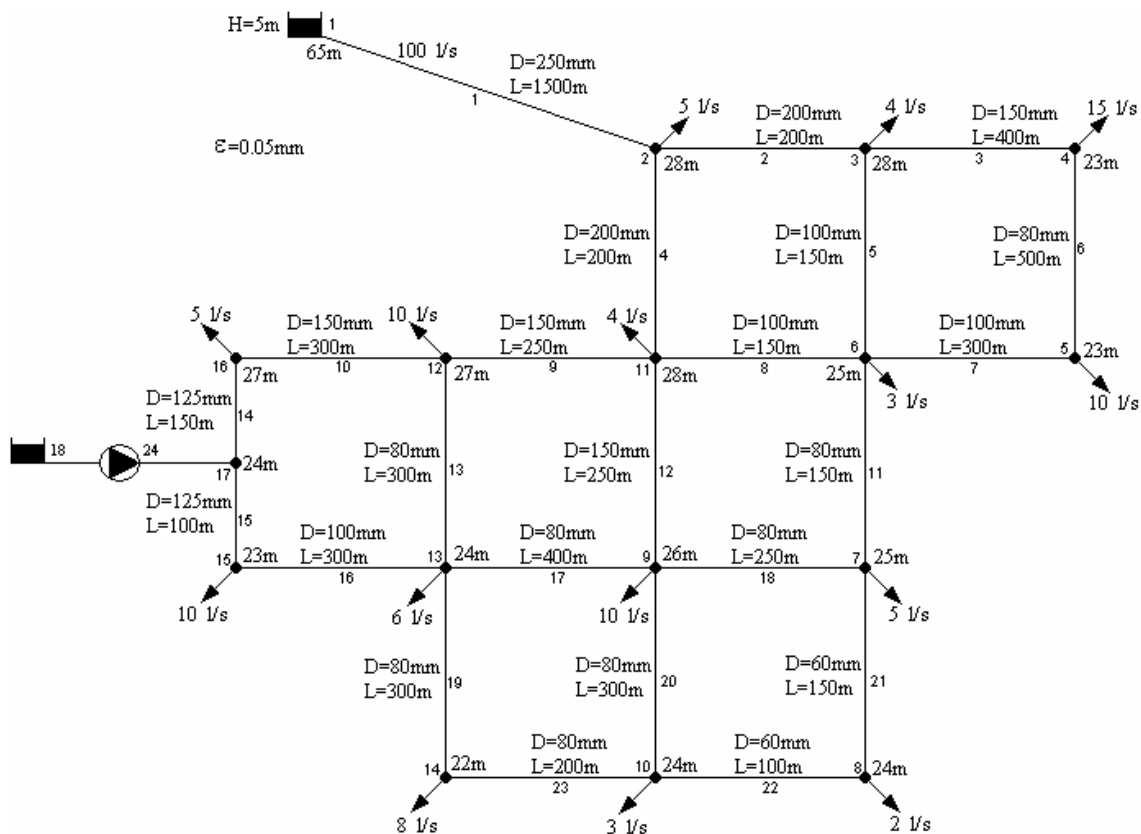


Fig. 5.6. Esquema de la red alimentada por depósito y bomba.

El programa EPANET permite la introducción de los datos de la bomba de cuatro maneras diferentes. En este ejercicio se ha optado por proporcionar al programa tres puntos de la curva característica: la altura a caudal nulo y dos puntos más de dicha curva, los cuales son:

- $P_1 = (0 \text{ l/s}, 45 \text{ mca})$
- $P_2 = (20 \text{ l/s}, 44 \text{ mca})$
- $P_3 = (30 \text{ l/s}, 37.5 \text{ mca})$

Así pues la sección del fichero de datos correspondiente a bombas es:

```
[PUMPS]
;ID línea      NudoAsp      NudoImp      Parámetros
24             18         17            HEAD 2

[CURVES]
;ID            X-Value      Y-Value
;PUMP:
2              0            45
2              20           44
2              30           37.5
```

También será necesario modificar el apartado del fichero correspondiente a nudos y líneas, para que EPANET tenga en cuenta las modificaciones introducidas. Rodando el programa (archivo 5.3) obtenemos los resultados que se muestran en las figuras 5.7 y 5.8.

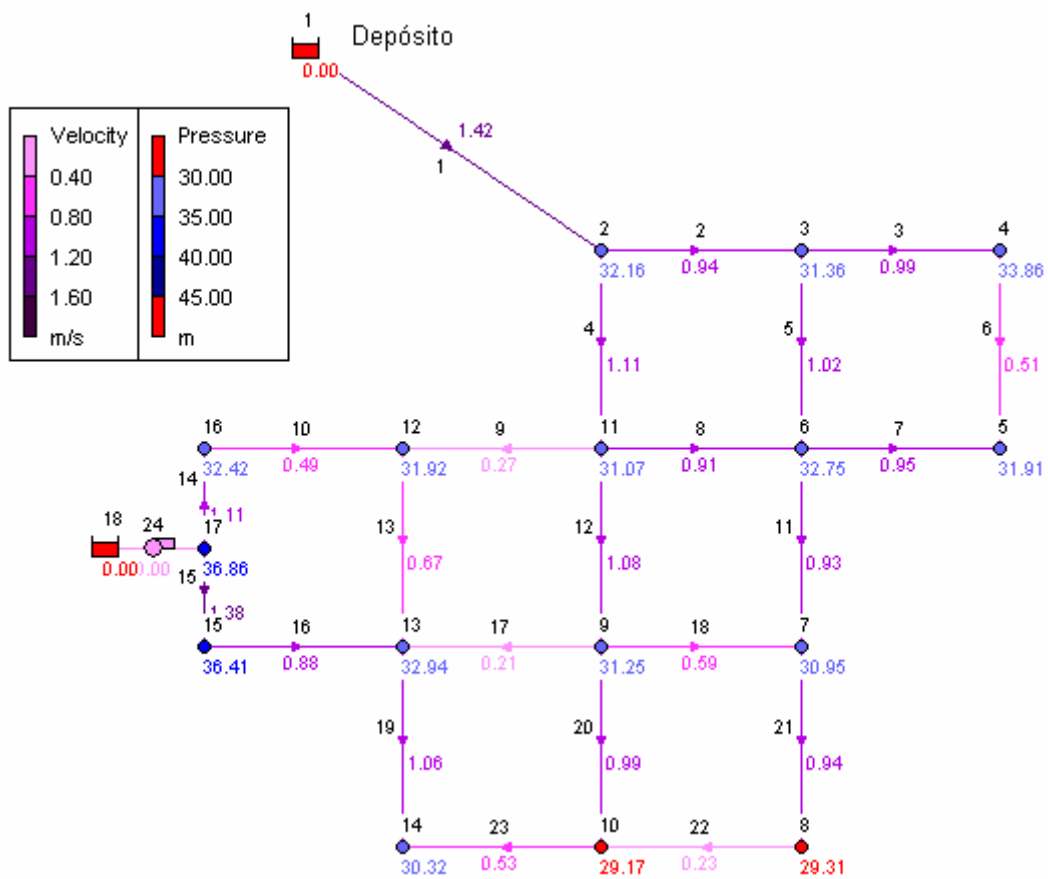


Fig. 5.7. Presiones (m.c.a.) y velocidad (m/s), red con depósito y bomba.

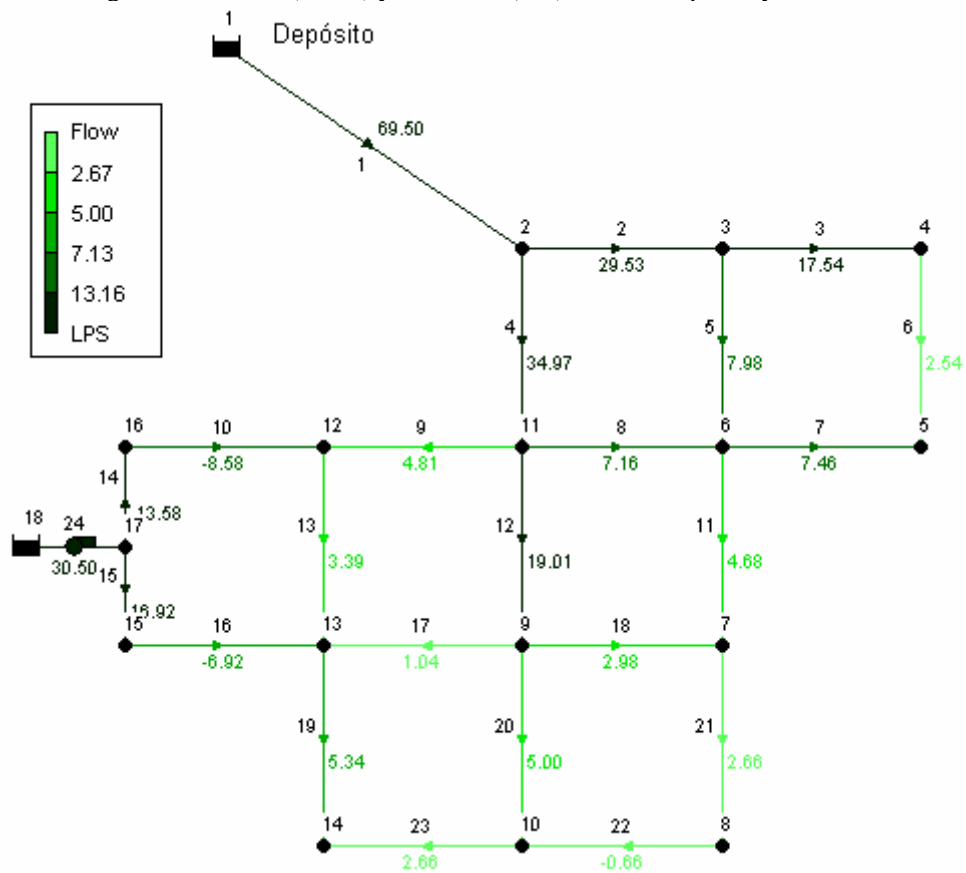


Fig. 5.8. Caudales en líneas (l/s), red con depósito y bomba.

Como puede observarse, la bomba está inyectando aproximadamente los 30 l/s que se le había impuesto y está proporcionando una altura de 36.86 m.c.a. De esta forma se ha conseguido que la población esté alimentada desde dos puntos: por un lado el depósito que aporta 69.50 l/s, y por otro lado la bomba que aporta los 30.50 l/s restantes.

Procederemos ahora a analizar la nueva distribución de caudales y presiones. Comparando la alimentación únicamente con el depósito y la alimentación conjunta desde depósito y bomba se aprecia que el suministro ha mejorado notablemente:

1. En la red inicial, alimentada sólo desde el depósito, las presiones eran excesivamente bajas, muchas de ellas por debajo de los 20 m.c.a. Ahora, alimentado con depósito y bomba, hemos conseguido que prácticamente todas las presiones estén por encima de los 30 m.c.a.; la presión mínima es de 29.17 m.c.a. en el nudo 10. Este valor se corregirá posteriormente mediante modificaciones de la red.
2. En cuando a las velocidades, antes teníamos valores demasiados elevados, incluso por encima de los 2 m/s. Ahora la máxima velocidad es de 1.42 m/s y la mayoría están por debajo de 1 m/s.

5.5. COMPORTAMIENTO DE LA RED ANTE DIFERENTES ESTADOS DE CARGA

Hasta ahora sólo se ha considerado un estado de carga determinado. Vamos a suponer ahora que, manteniendo la distribución relativa de consumos en la red, se modifica el caudal total demandado, lo cual permitirá simular distintos estados de carga.

Supongamos que nos encontramos en una hora del día en la que la demanda de la población ha disminuido un 15%, es decir, se ha reducido a un 85% del consumo medio, y nos interesa conocer cómo es la nueva distribución de presiones y caudales.

EPANET permite modificar el coeficiente de modulación de todos o parte de los consumos. Para multiplicar los consumos de todos los nudos por un determinado factor (0.85 en este caso), deberemos introducir la siguiente línea en la sección [OPTIONS] del fichero de datos:

```
[OPTIONS]
Demand Multiplier    0.85
```

Tan solo con modificar el factor multiplicativo de la sección [OPTIONS] podemos simular diferentes estados de carga. Los resultados que proporciona EPANET cuando el consumo total de la red es un 85% del consumo medio (archivo 5.4-85%) quedan reflejados en las figuras 5.9 y 5.10.

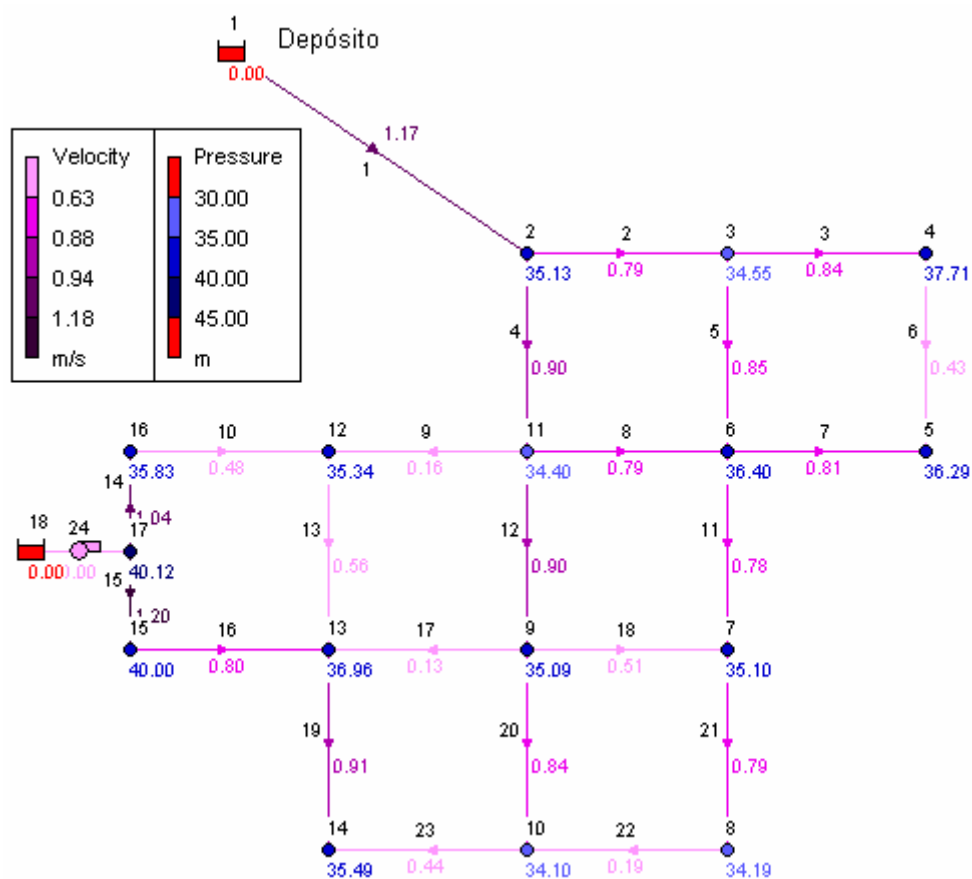
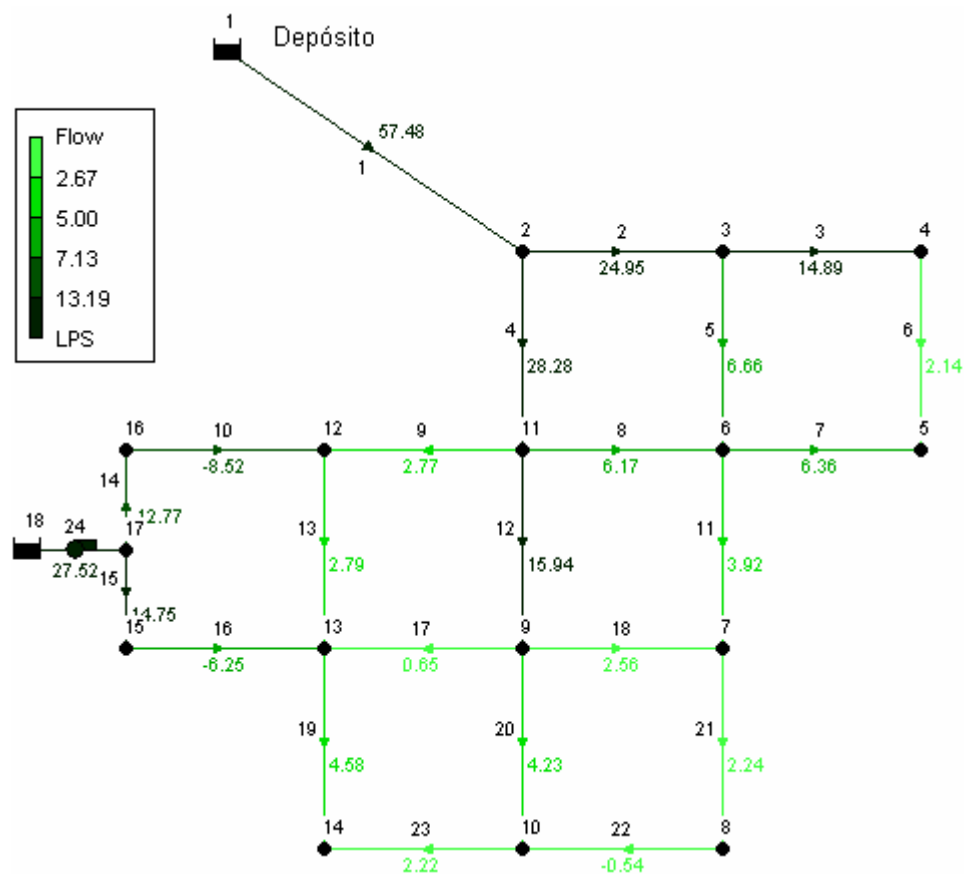


Fig. 5.9. Presiones (m.c.a.) y velocidades (m/s), 85% del consumo.



En esta nueva situación, el consumo total de la población se ha reducido a 85 l/s, de los cuales 57.48 l/s los está aportando el depósito y los 27.52 l/s restantes la bomba. Como consecuencia de la menor demanda existente ahora, el punto óptimo de la bomba se ha modificado, proporcionando una altura de 40.12 m.c.a. para el caudal de 27.52 l/s.

Si nos fijamos en los resultados de EPANET, comprobamos que, como es lógico, debido a la disminución de la demanda, las presiones en toda la red han aumentado (todas superiores a 34 m.c.a.) y las velocidades por todas las tuberías han disminuido (la inmensa mayoría por debajo de 1 m/s).

Como vemos, simplemente modificando el factor multiplicativo de la sección [OPTIONS] en el fichero de datos de entrada podemos simular diferentes estados de carga de la red y calcular así la nueva distribución de presiones en los nudos y caudales circulantes por las líneas.

5.6. OBTENCIÓN DE LA CURVA DE CONSIGNA

Llegados a este punto se dispone de una red alimentada por un depósito junto con una bomba que hemos seleccionado para satisfacer unas condiciones concretas. Dicha bomba está funcionando cerca de su punto óptimo, es decir, con un buen rendimiento, porque ya se ha seleccionado con ese criterio. Pero cuando se modifique el estado de carga de la red, el punto óptimo de la bomba cambiará y pasaremos a situarnos en puntos con rendimientos muy distintos, de forma que cuando el consumo sea muy pequeño o muy elevado respecto del consumo medio, el rendimiento de la bomba será muy deficiente.

Para solucionar este problema es aconsejable trabajar con varias bombas en paralelo (o bombas de velocidad variable). De esta forma, conforme la demanda vaya cambiando, arrancarán o pararán un número determinado de bombas (o modificarán su velocidad de giro) de forma que siempre funcionen próximas a su punto óptimo (punto de máximo rendimiento) o, al menos, en zonas de rendimiento aceptable.

Pero para poder diseñar la estación de bombeo primero debemos conocer cuáles son las necesidades que se tienen, para lo cual debemos calcular la curva de consigna que se debe satisfacer. Como la estación de bombeo inyectará en el nudo 17, se necesita conocer la curva de consigna óptima en dicho punto de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

- Las presiones de servicio en toda la red deberán mantenerse entre 30 y 45 m.c.a. sea cual fuere el caudal demandado.
- El caudal inyectado desde la estación de bombeo se fija aproximadamente en un 30% del consumo total.

Con el fin de conocer la distribución de presiones en los nudos de la red para cada uno de los diferentes estados de carga, se ha procesado el modelo para consumos totales comprendidos entre 30 l/s (30% del consumo total) y 130 l/s (130% del consumo total), espaciados de 10 en 10 l/s, con la condición de que el nudo 17 siempre aporte el 30% del caudal total (archivos del 5.4-30% al 5.4-130%).

El fichero de datos que vamos a utilizar en este apartado es similar al utilizado en el apartado anterior para determinar la demanda en el punto 17, donde lo único que se ha cambiado es el factor multiplicativo en la sección [OPTIONS], que ahora adoptará valores comprendidos entre 0.3 (para el estado de carga en el que la demanda se reduce al 30% del consumo medio) y 1.3 (para el estado de carga en el que la demanda aumenta al 130% del consumo medio) espaciados de 0.1 en 0.1. De modo que un valor de 0.5 nos indica que la demanda es la mitad del consumo medio.

Simplemente modificando el factor multiplicativo, podemos estudiar la presión necesaria en el nudo 17 para cualquier estado de carga.

Para calcular la presión necesaria en el nudo 17 se analizan las presiones en cada estado de carga, calculando cuánto es necesario aumentarla o disminuirla para que la presión en los nudos se encuentre entre 30 y 45 m.c.a. De modo que si un nudo tiene una presión inferior a 30 m.c.a. será necesario aumentar la presión en el punto 17 en un valor igual a la presión que necesita dicho nudo para llegar a los 30 m.c.a. En caso contrario, si algún nudo de la red presenta un valor de presión superior a 45 m.c.a., habrá que restar este exceso de presión al valor de la presión en el nudo 17.

Las presiones calculadas por EPANET cuando el consumo total de la red es el 50% y el 130% del consumo medio (archivos 1.4-50% y 1.4-130%) se muestran en las figuras 5.11 y 5.12 respectivamente.

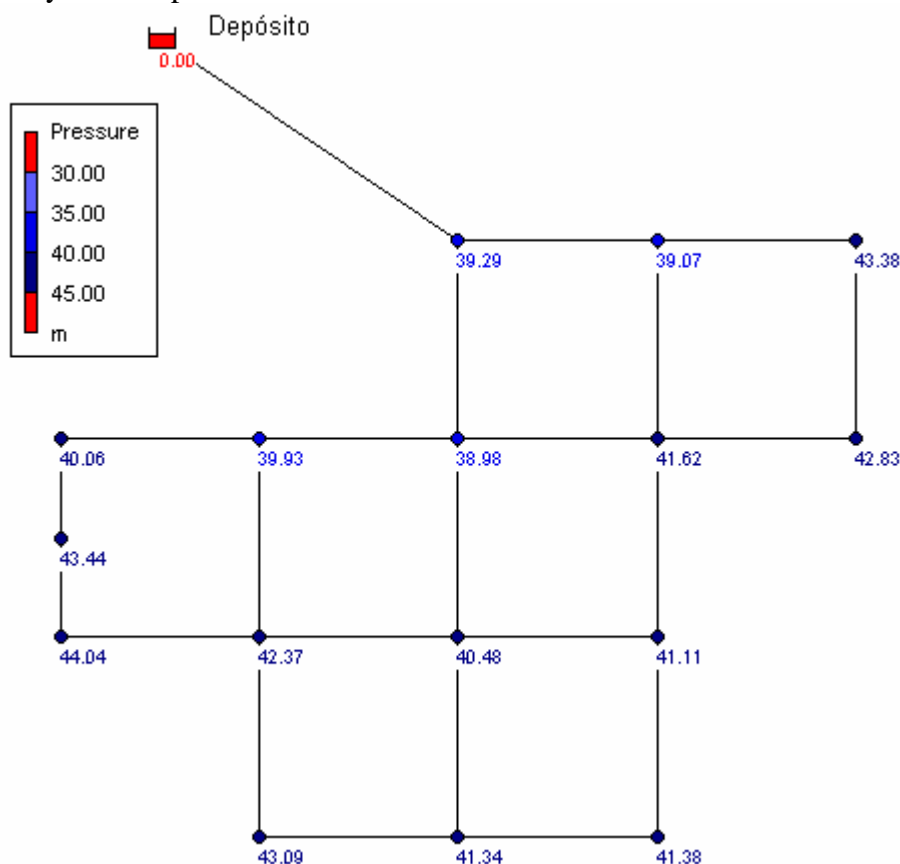


Fig. 5.11. Presiones en nudos (m.c.a.), 50% del consumo.

En la figura 5.11 se observan las siguientes presiones:

- Presión mínima = 38.98 m.c.a. en el nudo 11.
- Presión máxima = 44.04 m.c.a. en el nudo 15.
- Presión en el nudo 17 = 43.44 m.c.a.

De estos resultados podemos deducir que nos sobran 8.98 m.c.a. en toda la red, puesto que si bajamos la presión esos 8.98 m.c.a., todavía se mantendrían todas las presiones entre 30 y 45 m.c.a. tal y como se desea. Así pues, la presión necesaria en el nudo 17 para situarnos dentro de los límites fijados sería $43.44 - 8.98 = 34.46$ m.c.a., lo cual proporciona uno de los puntos de la curva de consigna.

Esto no es estrictamente cierto puesto que al tener dos puntos de alimentación, si modificamos la presión con la que se inyecta caudal en la bomba, variará el caudal aportado por el depósito y la distribución de presiones se verá modificada. No obstante, nos sirve como una primera aproximación para obtener la curva de consigna, la cual podría calcularse con mayor precisión realizando sucesivas iteraciones.

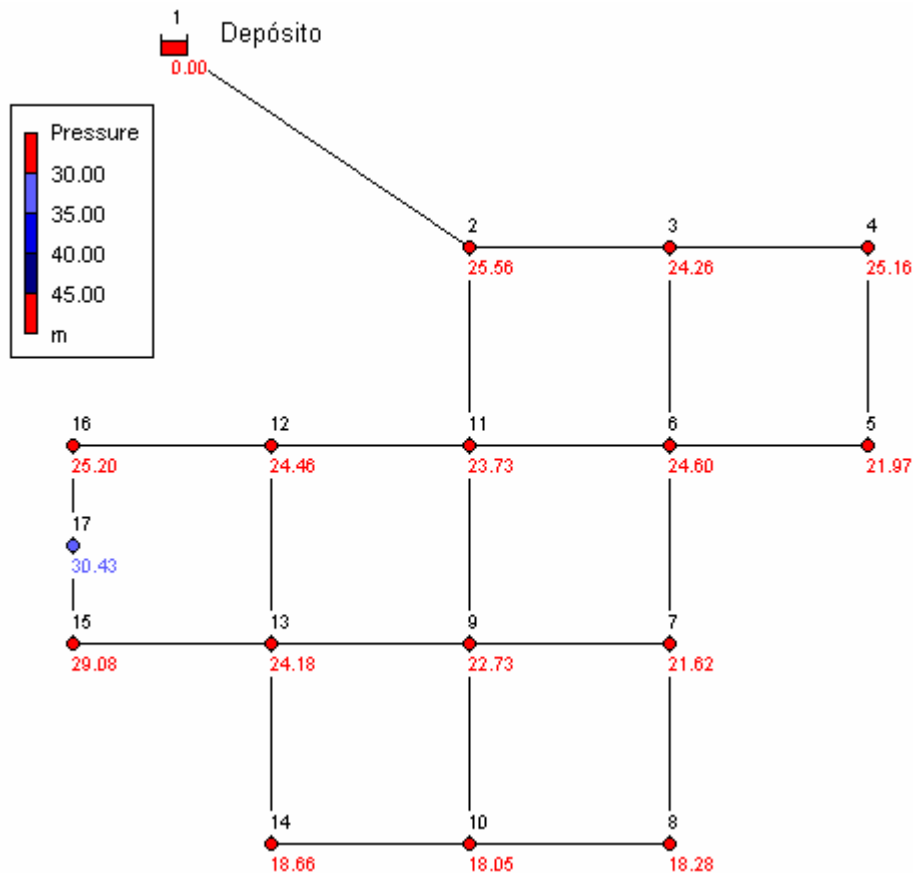


Fig. 5.12. Presiones en nudos (m.c.a.), 130% del consumo.

El razonamiento anterior se repite para los diferentes estados de carga. Por ejemplo, cuando el consumo de toda la red es de 130 l/s (figura 5.12) se tiene:

- Presión mínima = 18.05 m.c.a. en el nudo 10.
- Presión máxima = 30.43 m.c.a. en el nudo 17.
- Presión en el nudo 17 = 30.43 m.c.a.

En este caso, para mantener la presión en toda la red entre 30 y 45 m.c.a. se necesita como mínimo 11.95 m.c.a. más en toda la red ($30 - 18.05 = 11.95$ m.c.a.). Así pues, la presión requerida en el nudo 17 para estar dentro de los límites fijados sería $30.43 + 11.95 = 42.38$ m.c.a.

En la tabla 5.1 se presentan los resultados obtenidos bajo cada estado de carga.

DEMANDAS AL 30%			DEMANDAS AL 40%			DEMANDAS AL 50%		
Nudo	Demanda LPS	Presión m	Nudo	Demanda LPS	Presión m	Nudo	Demanda LPS	Presión m
2	1,5	40,95	2	2	40,21	2	2,5	39,29
3	1,2	40,86	3	1,6	40,06	3	2	39,07
4	4,5	45,59	4	6	44,6	4	7,5	43,38
5	3	45,37	5	4	44,23	5	5	42,83
6	0,9	43,68	6	1,2	42,76	6	1,5	41,62
7	1,5	43,48	7	2	42,42	7	2,5	41,11
8	0,6	44,19	8	0,8	42,94	8	1	41,38
9	3	42,63	9	4	41,67	9	5	40,48
10	0,9	44,17	10	1,2	42,91	10	1,5	41,34
11	1,2	40,82	11	1,6	40	11	2	38,98
12	3	41,81	12	4	40,97	12	5	39,93
13	1,8	44,58	13	2,4	43,6	13	3	42,37
14	2,4	46,08	14	3,2	44,75	14	4	43,09
15	3	45,85	15	4	45,05	15	5	44,04
16	1,5	41,86	16	2	41,06	16	2,5	40,06
17	-9	45	17	-12	44,31	17	-15	43,44
Pmín =		40,82	Pmín =		40	Pmín =		38,98
Pmáx =		46,08	Pmáx =		45,05	Pmáx =		44,04

DEMANDAS AL 60%			DEMANDAS AL 70%			DEMANDAS AL 80%		
Nudo	Demanda LPS	Presión m	Nudo	Demanda LPS	Presión m	Nudo	Demanda LPS	Presión m
2	3	38,19	2	3,5	36,91	2	4	35,46
3	2,4	37,88	3	2,8	36,5	3	3,2	34,93
4	9	41,92	4	10,5	40,22	4	12	38,29
5	6	41,15	5	7	39,2	5	8	36,99
6	1,8	40,25	6	2,1	38,66	6	2,4	36,86
7	3	39,54	7	3,5	37,73	7	4	35,66
8	1,2	39,52	8	1,4	37,36	8	1,6	34,91
9	6	39,05	9	7	37,4	9	8	35,52
10	1,8	39,46	10	2,1	37,29	10	2,4	34,82
11	2,4	37,76	11	2,8	36,34	11	3,2	34,72
12	6	38,69	12	7	37,25	12	8	35,61
13	3,6	40,91	13	4,2	39,21	13	4,8	37,28
14	4,8	41,13	14	5,6	38,84	14	6,4	36,25
15	6	42,85	15	7	41,45	15	8	39,87
16	3	38,87	16	3,5	37,49	16	4	35,91
17	-18	42,4	17	-21	41,19	17	-24	39,81
Pmín =		37,76	Pmín =		36,34	Pmín =		34,72
Pmáx =		42,85	Pmáx =		41,45	Pmáx =		39,87

DEMANDAS AL 90%			DEMANDAS AL 100%			DEMANDAS AL 110%		
Nudo	Demanda LPS	Presión m	Nudo	Demanda LPS	Presión m	Nudo	Demanda LPS	Presión m
2	4,5	33,83	2	5	32,02	2	5,5	30,05
3	3,6	33,18	3	4	31,23	3	4,4	29,09
4	13,5	36,12	4	15	33,73	4	16,5	31,1
5	9	34,51	5	10	31,77	5	11	28,76
6	2,7	34,84	6	3	32,6	6	3,3	30,15
7	4,5	33,34	7	5	30,78	7	5,5	27,97
8	1,8	32,17	8	2	29,13	8	2,2	25,8
9	9	33,41	9	10	31,08	9	11	28,52
10	2,7	32,05	10	3	28,99	10	3,3	25,63
11	3,6	32,91	11	4	30,91	11	4,4	28,71
12	9	33,77	12	10	31,74	12	11	29,51
13	5,4	35,12	13	6	32,73	13	6,6	30,11
14	7,2	33,34	14	8	30,13	14	8,8	26,61
15	9	38,09	15	10	36,12	15	11	33,97
16	4,5	34,15	16	5	32,2	16	5,5	30,05
17	-27	38,27	17	-30	36,56	17	-33	34,68
	Pmín =	32,05		Pmín =	28,99		Pmín =	25,63
	Pmáx =	38,27		Pmáx =	36,56		Pmáx =	34,68

DEMANDAS AL 120%			DEMANDAS AL 130%		
Nudo	Demanda LPS	Presión m	Nudo	Demanda LPS	Presión m
2	6	27,89	2	6,5	25,56
3	4,8	26,77	3	5,2	24,26
4	18	28,24	4	19,5	25,16
5	12	25,49	5	13	21,97
6	3,6	27,48	6	3,9	24,6
7	6	24,92	7	6,5	21,62
8	2,4	22,18	8	2,6	18,28
9	12	25,74	9	13	22,73
10	3,6	21,98	10	3,9	18,05
11	4,8	26,31	11	5,2	23,73
12	12	27,08	12	13	24,46
13	7,2	27,26	13	7,8	24,18
14	9,6	22,79	14	10,4	18,66
15	12	31,62	15	13	29,08
16	6	27,72	16	6,5	25,2
17	-36	32,64	17	-39	30,43
	Pmín =	21,98		Pmín =	18,05
	Pmáx =	32,64		Pmáx =	30,43

Tabla 5.1. Presiones en nudos para cada estado de carga.

Se aplica el razonamiento anterior sobre los datos de cada estado de carga estudiado. El resultado queda reflejado en la tabla 5.2 que contiene los puntos de la curva de consigna, representada gráficamente en la figura 5.13.

% de consumo	Presión en 17 (m.c.a.)
30	34,18
40	34,31
50	34,45
60	34,64
70	34,85
80	35,09
90	36,22
100	37,57
110	39,05
120	40,66
130	42,38

Tabla 5.2. Puntos de la curva de consigna.

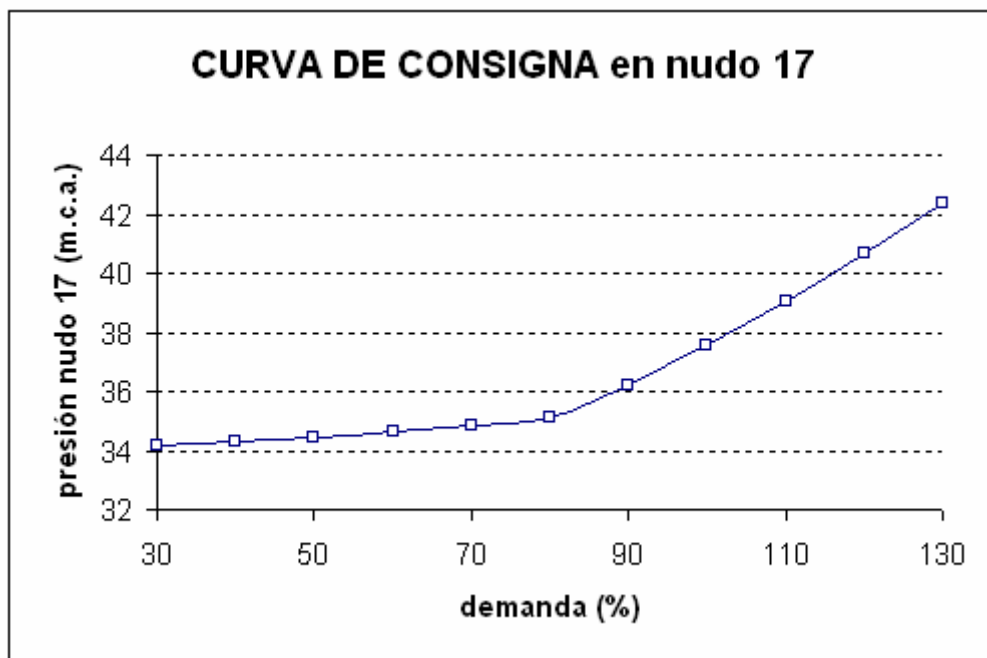


Fig. 5.13. Curva de consigna en el nudo 17.

5.7. CÁLCULO DE LA ESTACIÓN DE BOMBEO

Ahora ya conocemos cuáles son las necesidades de caudal y presión que tendremos en el nudo 17 (curva de consigna), de forma que se cumpla el mantenimiento de todas las presiones de la red entre 30 y 45 m.c.a. y el porcentaje del 30% inyectado por la bomba. Hay que hacer notar de nuevo que esto no es estrictamente cierto, puesto que al tener dos puntos de alimentación, si se modifican los parámetros en uno de los puntos, la distribución de caudales y presiones se verá afectada. A pesar de ello, vamos a considerar que la curva de consigna es suficientemente aproximada y vamos a determinar la estación de bombeo que se ajuste a dicha curva de consigna.

A la hora de diseñar la estación de bombeo se puede variar el número de bombas a instalar, o bien colocar bombas iguales o distintas, o bien utilizar bombas de velocidad variable, etc. Para determinar la solución óptima habría que hacer un estudio más detallado. Para continuar con el ejercicio práctico, vamos a considerar que la estación de bombeo está constituida por tres bombas idénticas en paralelo.

La situación más desfavorable se produce cuando el consumo es máximo, es decir, para un consumo en toda la red de 130 l/s, al cual le corresponde una presión de consigna en el nudo 17 de 42.38 m.c.a. y un caudal inyectado por las bombas de 39 l/s (el 30% de 130 l/s). Ante esta situación deberán funcionar las tres bombas, y cada una de ellas nos deberá proporcionar la misma altura y la tercera parte del caudal, puesto que las bombas son idénticas y están funcionando en paralelo. Así pues, el punto de funcionamiento de cada una de las bombas será:

$$P_F = (Q, H) = (13 \text{ l/s}, 42.38 \text{ m.c.a.}).$$

Acudiendo a los catálogos comerciales, podemos elegir la bomba de la figura 5.14,

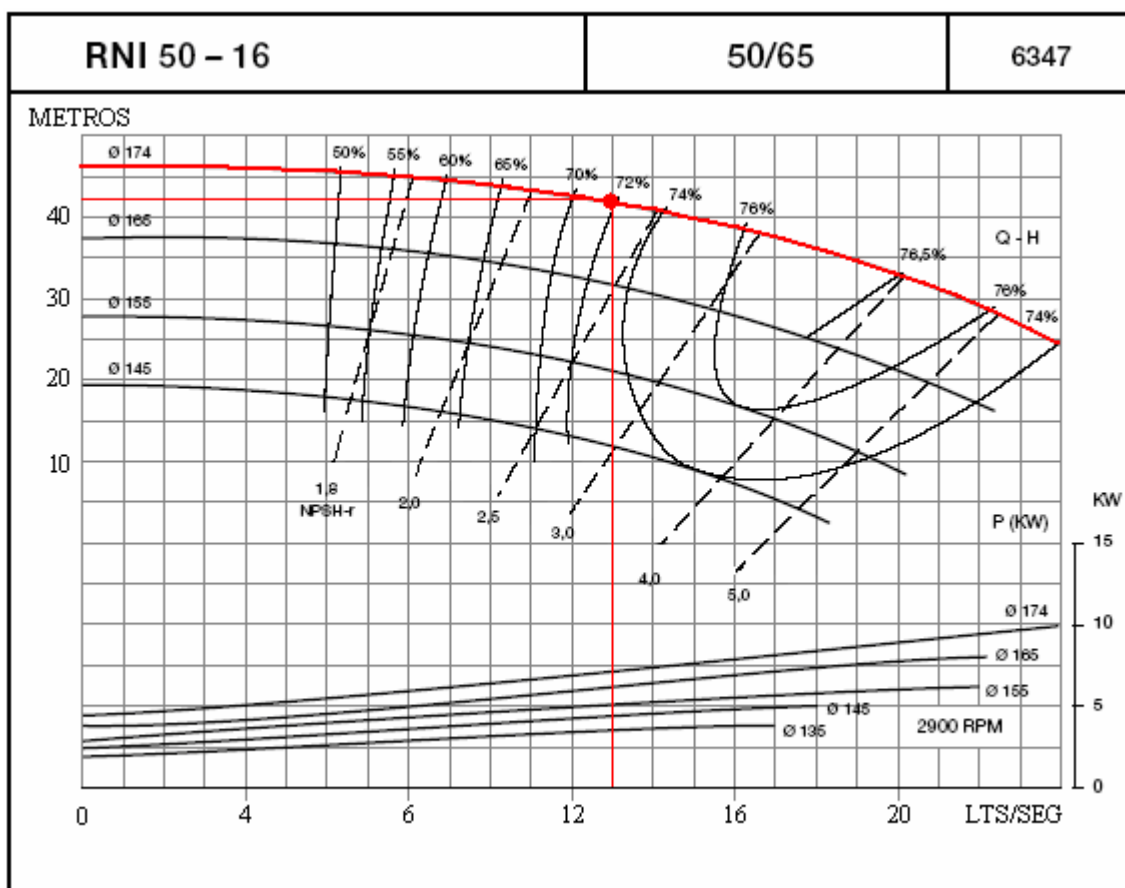


Fig. 5.14. Selección de las bombas para la estación de bombeo.

De la figura 5.14 se extraen 2 puntos más de la curva del catálogo, los cuales, junto con el punto de funcionamiento de la bomba, nos permitirán ajustar la curva característica de la bomba a una parábola mediante un análisis de regresión polinomial. Estos puntos son los siguientes:

- $P_1 = (0 \text{ l/s}, 46 \text{ m.c.a.})$
- $P_F = (13 \text{ l/s}, 42.38 \text{ m.c.a.})$
- $P_2 = (20 \text{ l/s}, 34 \text{ m.c.a.})$

Dicha parábola tendrá la siguiente forma:

$$H_{1B} (m) = 46 + 0.3187 Q - 0.0459 Q^2 \quad \text{con } Q (\text{l/s})$$

De forma que cuando funcionen dos bombas asociadas en paralelo se puede calcular su curva característica modificando los puntos anteriores. Al tratarse de 2 bombas en paralelo se multiplicará el caudal de los puntos por 2:

- $P_1 = (0 \text{ l/s}, 46 \text{ m.c.a.})$
- $P_F = (26 \text{ l/s}, 42.38 \text{ m.c.a.})$
- $P_2 = (40 \text{ l/s}, 34 \text{ m.c.a.})$

La parábola que mejor se adapta a estos puntos es la siguiente:

$$H_{2B} (m) = 46 + 0.1593 Q - 0.0115 Q^2 \quad \text{con } Q (\text{l/s})$$

Análogamente, para tres bombas asociadas en paralelo multiplicaremos el caudal de los puntos de los que se obtiene la curva característica por 3:

- $P_1 = (0 \text{ l/s}, 46 \text{ m.c.a.})$
- $P_F = (39 \text{ l/s}, 42.38 \text{ m.c.a.})$
- $P_2 = (60 \text{ l/s}, 34 \text{ m.c.a.})$

Para estos puntos se obtiene la siguiente parábola:

$$H_{3B} (m) = 46 + 0.10667 Q - 0.0051 Q^2 \quad \text{con } Q (\text{l/s})$$

Los resultados obtenidos quedan reflejados en la figura 5.15, donde se han representado la curva de consigna del nudo 17, y las curvas características de las bombas asociadas en paralelo cuando funciona 1 sola bomba, 2 ó 3 bombas.

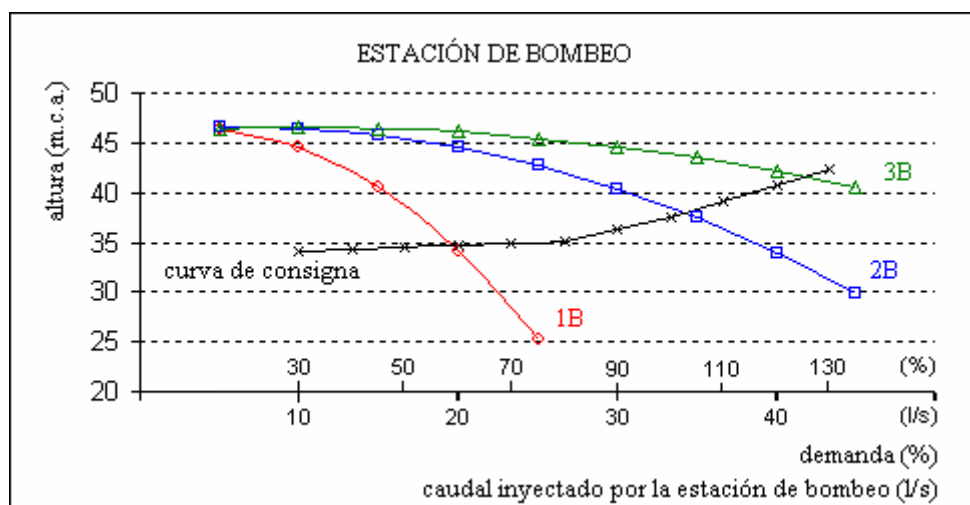


Fig. 5.15. Posibles curvas características de la estación de bombeo.

Del análisis de la figura 5.15 podemos concluir lo siguiente:

- para una demanda menor del 60% del consumo medio es suficiente el funcionamiento de una sola bomba,
- para estados de carga en los que la demanda está comprendida entre el 70 y el 100% del consumo medio deben funcionar 2 de las 3 bombas,
- en aquellas situaciones en las que se alcance la punta de demanda, con valores superiores al 100% del consumo medio entrarán en funcionamiento las tres bombas.

Esto nos da la posibilidad de estudiar también la regulación de la estación de bombeo, es decir, determinar el funcionamiento de las bombas (cuando arrancan y paran) en función del caudal demandado, de las horas del día, de las presiones, etc. como se verá más adelante.

Una vez calculada la estación de bombeo, podemos introducirla en el fichero de datos de entrada. Para ello, en la sección [PUMPS] incluiremos las tres bombas idénticas en paralelo: líneas 24, 25 y 26, todas ellas del nudo 18 (depósito de aspiración) al nudo 17 (punto de inyección) y con la misma curva característica:

```
[PUMPS]
;ID      Node1      Node2      Parameters
24       18         17         HEAD 2
25       18         17         HEAD 2
26       18         17         HEAD 2

[CURVES]
;ID      X-Value    Y-Value
;PUMP:
2        0          48
2        13         43
2        20         34
```

Ahora se puede simular el comportamiento de la red alimentada desde el depósito y desde la estación de bombeo constituida por tres bombas idénticas en paralelo que inyectan en el nudo 17.

Por ejemplo, suponiendo que la red consume el caudal medio (Demanda Multiplier 1.0). En este caso, el caudal total es de 100 l/s y el caudal aportado por la estación de bombeo es aproximadamente de 30 l/s. Acudiendo a la figura 5.15 observamos que para poder satisfacer las necesidades de caudal y presión se precisa el funcionamiento de dos bombas en paralelo.

Para simular el funcionamiento de tan solo dos bombas, vamos a anular una de ellas en el fichero de datos de entrada, por ejemplo, anulamos la bomba 24. Para ello podemos borrar la línea correspondiente o simplemente colocar “;” al principio de la línea con lo que el programa no leerá la información contenida en esa línea (también podríamos controlar el estado de la bomba mediante la sección [CONTROLS])

Haciendo estas modificaciones en el fichero de entrada y rodando el programa (archivo 5.5) se obtienen los resultados contenidos en la figura 5.16.

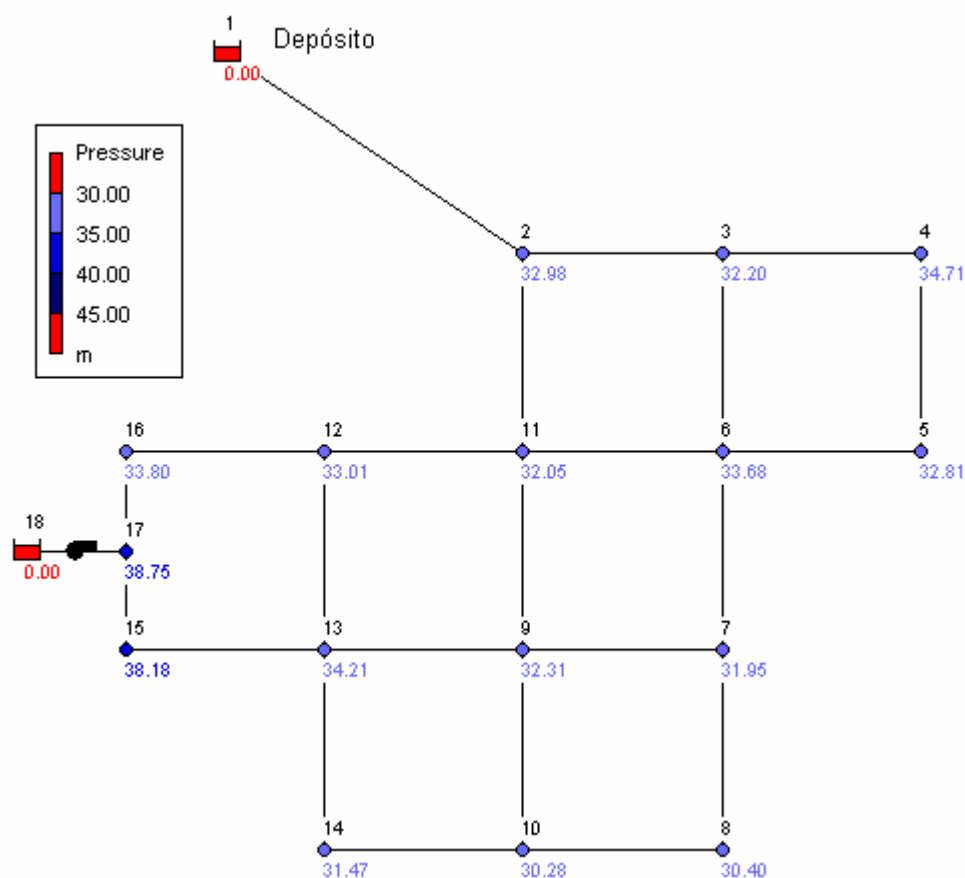


Fig. 5.16. Presiones en nudos (m.c.a.), depósito+2bombas.

Como era de esperar, los valores de presiones son muy similares a los que se obtuvieron en la figura 5.4, en la que las condiciones impuestas eran similares. En aquel caso el estado de carga era el mismo (consumo igual al 100% de la demanda) y se colocó una bomba ficticia en el nudo 17, forzando la entrada de 30 l/s a la red, con el objetivo de obtener la presión necesaria que debía suministrar la bomba.

El valor de presión necesaria en el nudo 17 calculado por EPANET era entonces de 36.56 m.c.a., 2 m.c.a. menos que la presión que se obtiene con 2 bombas en funcionamiento. Estos 2 m.c.a. de más que aporta el sistema de bombeo se extiende por toda la red, de modo que en general los nudos tienen presiones más altas que las que se obtenían con la bomba ficticia.

De modo que con este último cálculo se ha definido el sistema de bombeo equivalente a la bomba ficticia necesaria para cada condición de carga establecida de manera aproximada. Se concretará más adelante al estudiar la red en periodo extendido.

CAPÍTULO 6. CONTROL DE PRESIONES EN LA RED MEDIANTE EL USO DE VÁLVULAS REGULADORAS Y AUTOMÁTICAS

6.1. DESCRIPCIÓN

Con el objetivo de familiarizarse con todo tipo de válvulas, se parte de la red alimentada por depósito y estación de bombeo que inyecta en el nudo 17, a la cual se añadirán una serie de válvulas de diferentes tipos y en diferentes lugares para analizar los cambios que se producen en la distribución de caudales y presiones a lo largo de la red.

En primer lugar se introducirán diversas válvulas reguladoras para posteriormente estudiar los efectos de las válvulas reductoras de presión (VRP's).

6.2. CONTROL DE LA RED MEDIANTE VÁLVULAS REGULADORAS

Se pretende estudiar los efectos que la colocación de válvulas reguladoras en diversas líneas de la red introduce en la distribución de caudales y presiones.

Concretamente, añadiendo tres válvulas reguladoras, tal y como se observa en la figura 6.1. Una de ellas situada en la tubería de alimentación a la red desde el depósito, otra colocada junto a la bomba, y la última en una línea interior de la red (por ejemplo, en la línea 10).

Hay que modificar el fichero de datos de entrada añadiendo estas tres válvulas reguladoras. Para ello, en primer lugar se introducen tres nudos nuevos (19, 20 y 21) para poder crear las nuevas líneas donde van a estar ubicadas las válvulas. Estos nuevos nudos los definimos sin caudal consumido, y con una cota igual a la cota del punto adyacente (28 m para el nudo 19, 24 m para el nudo 20 y 27 m para el nudo 21).

Seguidamente debemos modificar las líneas junto a las cuales hemos introducido las válvulas, ya que hemos cambiado la topología de la red. Ahora la línea 1 no va desde el nudo 1 al 2, sino que va del nudo 1 al 19. Las líneas 24, 25 y 26 van del nudo 18 al 20. Y la línea 10 va del nudo 2 al 16.

Finalmente hay que introducir en la sección correspondiente a válvulas [VALVES], las nuevas líneas donde irán situadas las válvulas definiendo sus características:

- Identificativo de línea.
- Nudos aguas arriba y aguas abajo de la válvula.
- Diámetro de la válvula (mm).
- Tipo de válvula (TCV para válvulas de regulación).

- Consigna (coeficiente de pérdidas menores para válvulas de regulación).

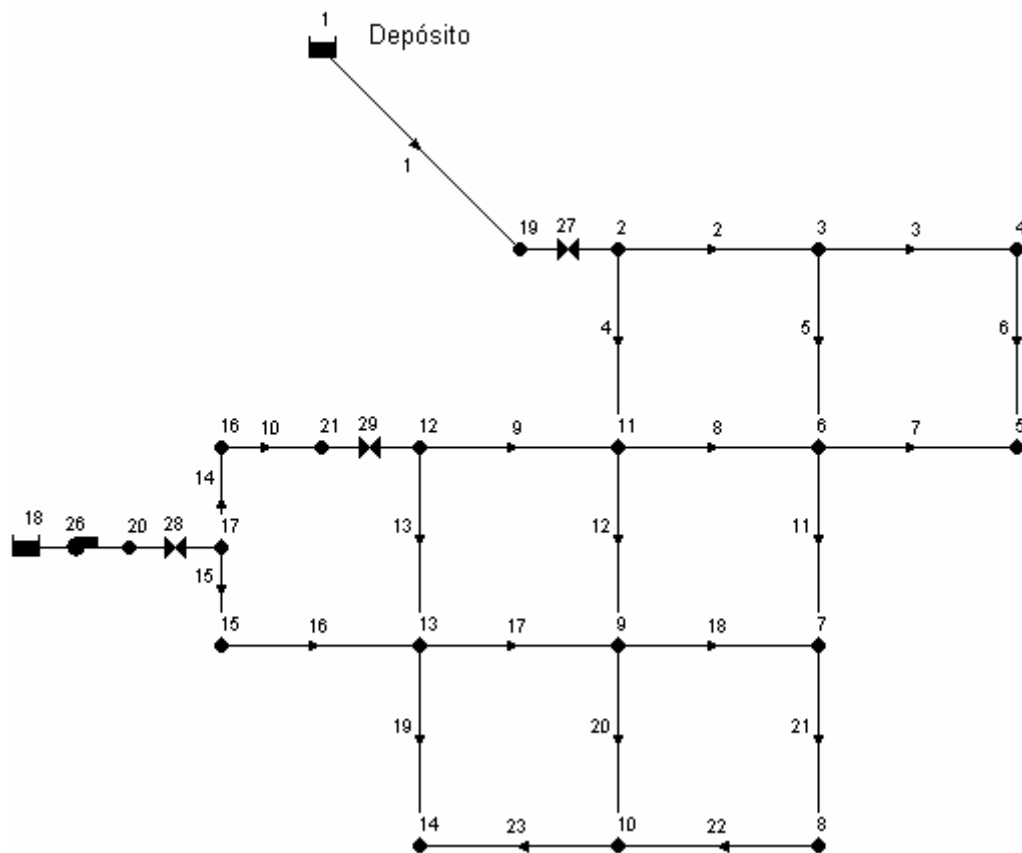


Fig. 6.1. Esquema de la red (tres válvulas de regulación)

De modo que podemos proceder a cerrar parcialmente la válvula que hay junto al depósito. Con ello reduciremos el caudal aportado por éste y aumentará en consecuencia el que suministra la bomba para poder satisfacer los 100 l/s de Demanda. Para simular el cierre parcial de la válvula, bastará con modificar la constante K (coeficiente de pérdidas menores) de la válvula, por ejemplo $K = 120$. De manera que el nuevo fichero de datos es el siguiente:

[TITLE]
VÁLV. CONTROL

[JUNCTIONS]

;ID	Elev	Demanda
2	28	5
3	28	4
4	23	15
5	23	10
6	25	3
7	25	5
8	24	2
9	26	10
10	24	3
11	28	4
12	27	10

13	24	6
14	22	8
15	23	10
16	27	5
17	24	0
19	28	0
20	24	0
21	27	0

[RESERVOIRS]

;ID	Head
1	70
18	24

[PIPES]

;ID	Node1	Node2	Length	Diameter	Roughness
2	2	3	200	200	0.05
3	3	4	400	150	0.05
4	2	11	200	200	0.05
5	3	6	150	100	0.05
6	4	5	500	80	0.05
7	6	5	300	100	0.05
8	11	6	150	100	0.05
9	11	12	250	150	0.05
10	21	16	300	150	0.05
11	6	7	150	80	0.05
12	11	9	250	150	0.05
13	12	13	300	80	0.05
14	16	17	150	125	0.05
15	17	15	100	125	0.05
16	13	15	300	100	0.05
17	9	13	400	80	0.05
18	9	7	250	80	0.05
19	13	14	300	80	0.05
20	9	10	300	80	0.05
21	7	8	150	60	0.05
22	10	8	100	60	0.05
23	10	14	200	80	0.05
1	1	19	1500	250	0.05

[PUMPS]

;ID	Node1	Node2	Parameters
24	18	20	HEAD2
25	18	20	HEAD2
26	18	20	HEAD2

[VALVES]

;ID	Node1	Node2	Diameter	Type	Setting
27	19	2	250	TCV	120
29	21	12	150	TCV	0
28	20	17	200	TCV	0

[STATUS]

;ID	Status/Setting
-----	----------------

[CURVES]

;ID	XValue	Y-Value
;PUMP:		
1	0	43.5
1	15	42
1	30	36.5
;PUMP:		
2	0	48
2	13	43
2	20	34

[OPTIONS]

Units	LPS
Headloss	D-W
DemandaMultiplier	1.0

[COORDINATES]

;Node	XCoord	Y-Coord
2	2.00	3.00
3	3.00	3.00
4	4.00	3.00
5	4.00	2.00
6	3.00	2.00
7	3.00	1.00
8	3.00	0.00
9	2.00	1.00
10	2.00	0.00
11	2.00	2.00
12	1.00	2.00
13	1.00	1.00
14	1.00	0.00
15	0.00	1.00
16	0.00	2.00
17	0.00	1.50
19	1.50	3.00
20	-0.46	1.50
21	0.50	2.00
1	0.50	4.00
18	-0.98	1.50

[LABELS]

;X-Coord	YCoord	Label&AnchorNode
0.75	4.15	Depósito

[BACKDROP]

DIMENSIONS	-1.00	-1.00	5.00	5.00
------------	-------	-------	------	------

[END]

Los resultados obtenidos con EPANET (archivo 6.1) aparecen en las figuras 6.2 y 6.3.

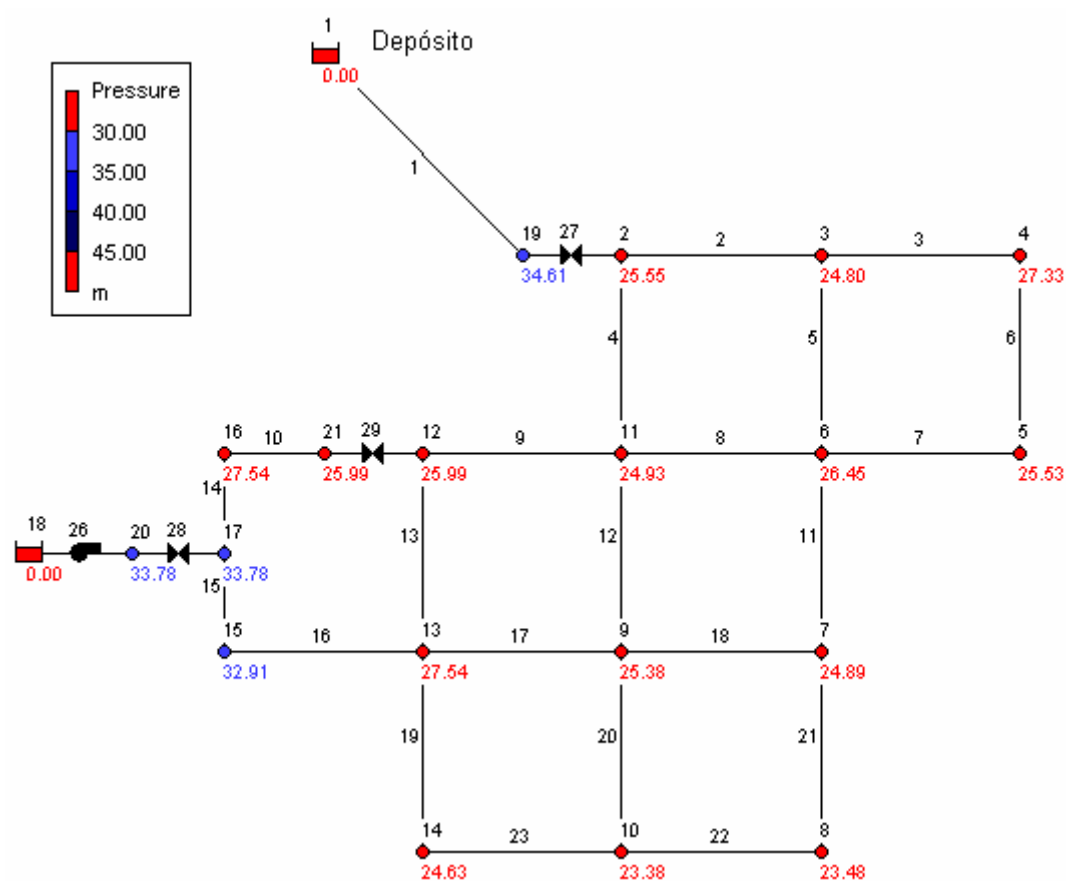


Fig. 6.2. Presiones en nudos (m.c.a.), válvula 27 activa.

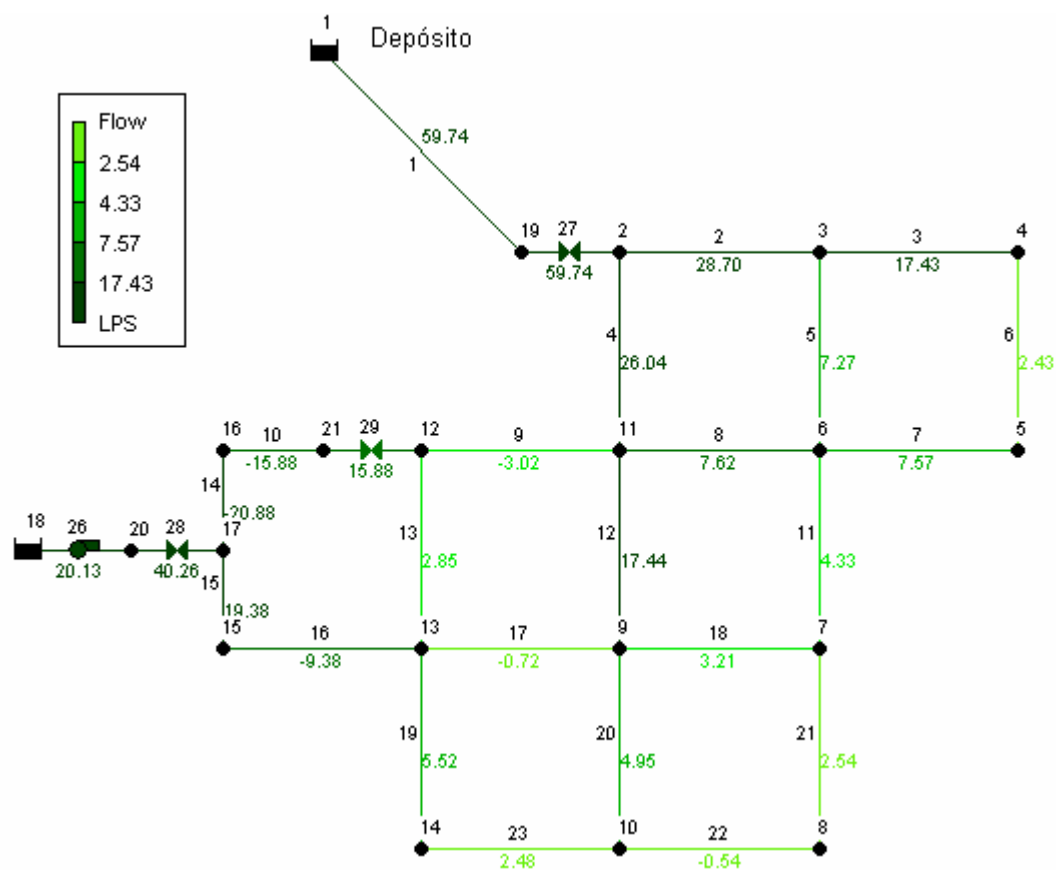


Fig. 6.3. Caudales por tuberías (m.c.a.), válvula 27 activa.

Al cerrar parcialmente la válvula 27 disminuimos el caudal que aporta el depósito, el cual es ahora de 59.74 l/s frente a los 66.37 l/s que aportaba cuando la válvula estaba totalmente abierta. Esto obliga a que el caudal restante, 40.26 l/s, deba ser aportado por las dos bombas en funcionamiento.

Pero no sólo se produce una variación en la distribución de los caudales, sino que también se modifica la distribución de presiones. Esto es debido a 2 motivos: por un lado, la válvula parcialmente cerrada introduce unas pérdidas localizadas, concretamente 9.06 m.c.a., que provocan una disminución de todas las presiones aguas abajo de la válvula. Por otra parte, el punto de funcionamiento de la estación de bombeo se ha desplazado hacia la derecha, para poder suministrar un caudal mayor, lo que implica que se inyecte a una presión menor.

6.3. CONTROL DE LA RED MEDIANTE VÁLVULAS REDUCTORAS DE PRESIÓN

En este apartado se va a estudiar el comportamiento de una de las válvulas automáticas más utilizadas, las válvulas reductoras de presión (VRP's), para analizar cómo afectan a la distribución de caudales y presiones.

Para realizar este ejercicio vamos a forzar una situación en la que un sector de la red esté situado a cotas más bajas de forma que las presiones en esta zona sean muy elevadas y sea razonable la utilización de VRP's. Concretamente vamos a bajar la cota de toda la zona sur de la población: el nudo 14 tendrá cota 11m, el nudo 10 tendrá cota 13m y el nudo 8 tendrá cota 19m.

Teniendo en cuenta que la situación más desfavorable para las VRP's (que será cuando las presiones aguas abajo de ellas sean mayores) se producirá cuando menor sea la demanda, vamos a modificar las cotas de los nudos 8, 10 y 14, y vamos a rodar el programa cuando el consumo de la red es el 70% del consumo medio y están en funcionamiento las dos bombas (archivo 6.2).

Con estas nuevas cotas las presiones en los nudos 8, 10 y 14 pasan a ser de 43.49, 49.43 y 51.03 m.c.a. respectivamente, mientras que en el resto de la red estamos próximos a los 40 m.c.a. Ante esta situación pretendemos reducir las presiones en esta zona por debajo de los 40 m.c.a., y para ello vamos a colocar dos VRP's taradas a dicha presión en las líneas 19 y 20, tal y como puede verse en la figura 6.4.

Para confeccionar el nuevo fichero de datos de entrada, primero se deben introducir dos nudos nuevos (22 y 23) para crear las nuevas líneas donde estarán colocadas las VRP's. A continuación se modificarán las líneas junto a las cuales se han introducido las VRP's. Ahora la línea 19 ya no va desde el nudo 13 al 14, sino que va del nudo 13 al 22, y la línea 20 va del nudo 9 al 23.

Finalmente hay que introducir en la sección [VALVES] las nuevas líneas donde irán situadas las VRP's y sus características.

En este caso se definen una de las válvulas en la línea 30 que va del nudo 22 al 14 y la otra en la línea 31 que va del nudo 23 al 10, ambas con una presión de tarado de 40 m.c.a. Añadiendo estas dos VRP's, la sección [VALVES] queda de la siguiente manera:

[VALVES]

;ID	Node1	Node2	Diameter	Type	Setting
27	19	2	250	TCV	0
29	21	12	150	TCV	0
28	20	17	200	TCV	0
30	22	14	12	PRV	40
31	23	10	12	PRV	40

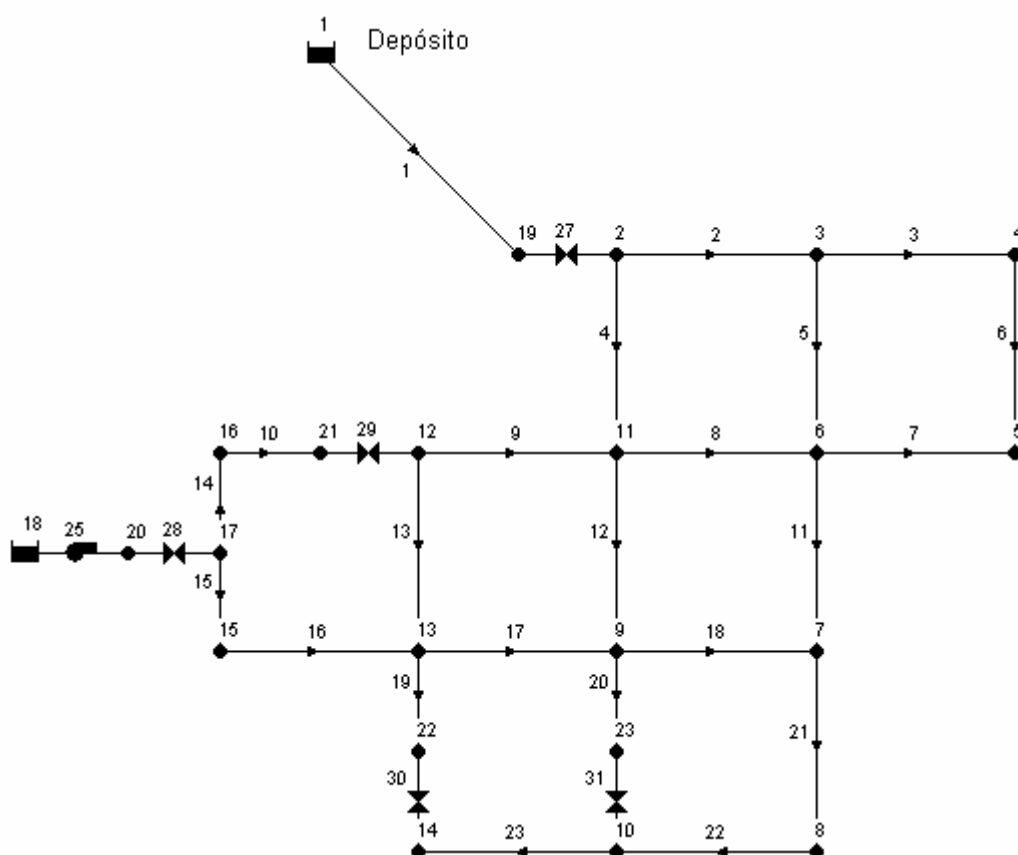


Fig. 6.4. Esquema de la red con dos VRP's.

Como se observa, la consigna de las válvulas de regulación es 0 (válvulas totalmente abiertas) y para las válvulas reductoras de presión la consigna es 40 m.c.a. (presión de tarado).

Las presiones calculadas por EPANET cuando el consumo es del 70% y funcionan dos bombas (archivo 6.3) están representadas en la figura 6.5, donde se observa que la válvula 30 se ha cerrado parcialmente de forma que produce una pérdida de 13.56 m.c.a. y reduce la presión en el nudo 14 hasta los 40 m.c.a. fijados. La válvula 31 también se ha cerrado parcialmente produciendo unas pérdidas de 9.76 m.c.a. hasta reducir la presión en el nudo 10 a 40 m.c.a.

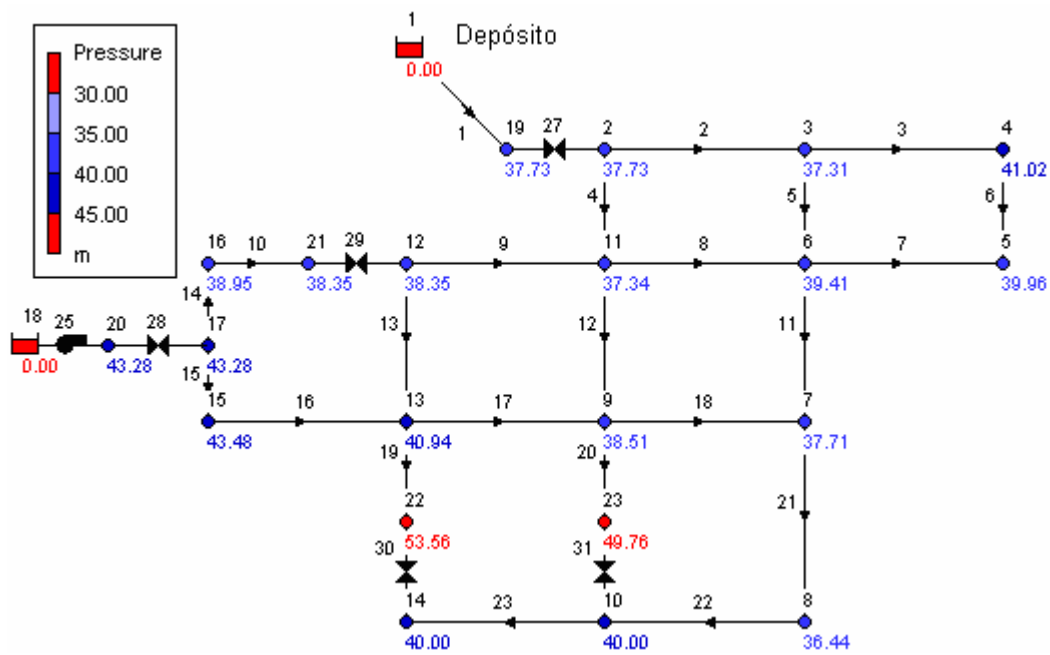


Fig. 6.5. Presiones en nudos (m.c.a.), con dos VRP's y consumo del 70%.

Se puede ahora simular cualquier estado de carga diferente. Por ejemplo, supongamos que el consumo de la red es el consumo medio y que están funcionando dos bombas. En esta situación y sin VRP's (archivo 6.4), tendríamos unas presiones en los nudos 8, 10 y 14 de 35.40, 41.28 y 42.47 m.c.a. respectivamente mientras que en el resto de la red estaríamos aproximadamente entre los 32 y 35 m.c.a. Veamos lo que sucede con las dos VRP's cuya presión de tarado es de 40 m.c.a. (archivo 6.5) en la figura 6.6.

En esta nueva situación el consumo de la red es superior al caso anterior, de modo que las presiones en toda la red son inferiores. En este caso, la válvula 31 no actúa, está totalmente abierta y la válvula 30 está cerrada parcialmente provocando unas pérdidas de 4.69 m.c.a. para conseguir reducir la presión a 40 m.c.a. en el nudo 14.

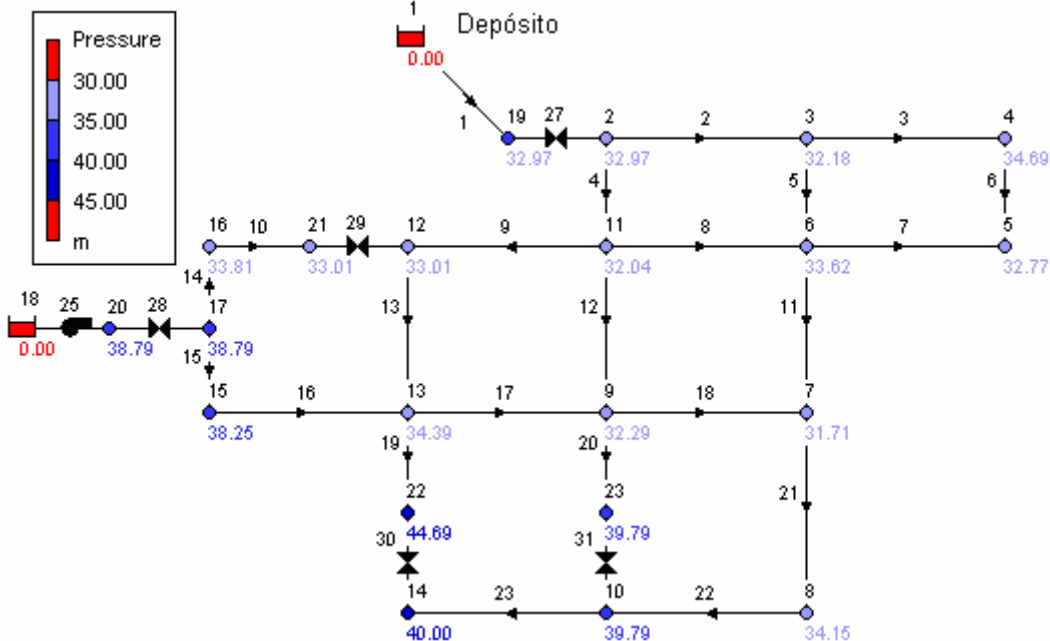


Fig. 6.6. Presiones en nudos (m.c.a.), con dos VRP's y consumo del 100%.

CAPÍTULO 7. ESTUDIO DE LA RESPUESTA DE LA RED ANTE SITUACIONES EXTRAORDINARIAS

7.1. DESCRIPCIÓN

El objetivo de este ejercicio es estudiar la respuesta de una red ante situaciones extraordinarias como pueden ser la rotura de alguna tubería, un incendio, etc., para ver cómo se modifica la distribución de caudales y presiones y estudiar posibles mejoras. Vamos a partir de la red alimentada a través de un depósito y una estación de bombeo que inyecta en el nudo 17.

En primer lugar vamos a suponer que se produce una rotura en una de las tuberías de la red para ver cómo afecta a la distribución de caudales y presiones.

Posteriormente se estudiará lo que sucede ante un hipotético incendio en algún punto de la población para comprobar si la respuesta de la red es aceptable o no.

7.2. ROTURA DE UNA TUBERÍA

Supongamos que se produce una rotura en la tubería 4 de forma que queda fuera de servicio. Para simular esta situación, podemos borrar la línea correspondiente a la tubería 4 o simplemente colocar “;” al principio de dicha línea con lo EPANET no leerá la información que contiene esa línea. Haciendo esta modificación, la sección [PIPES] del fichero de entrada quedará como:

```
[PIPES]
;ID      Node1  Node2  Length  Diameter  Roughness  MinorLoss  Status
2         2      3      200      200       0.05       0         Open
3         3      4      400      150       0.05       0         Open
;4        2     11      200      200       0.05       0         Open
5         3      6      150      100       0.05       0         Open
```

Rodando EPANET cuando el consumo de la red es el consumo medio y están funcionando dos de las tres bombas (archivo 7.1) se obtienen los resultados mostrados en la figura 7.1.

En el caso de producirse la rotura de la tubería 4, se modifica la distribución de caudales y las presiones disminuyen notablemente: la presión en la mayoría de los nudos no supera los 25 m.c.a., llegando incluso a los 17.14 m.c.a. en el nudo 10.

Una posible solución a este problema sería aumentar los diámetros de algunas tuberías. Por ejemplo, veamos lo que sucede si aumentamos los diámetros de las tuberías 5 y 6 a 150 mm. Modificando el fichero de datos de entrada y rodando el programa (archivo 7.2) obtenemos los resultados de la figura 7.2.

Con estos nuevos diámetros, la distribución de presiones mejora considerablemente: todas las presiones son superiores a 24 m.c.a.

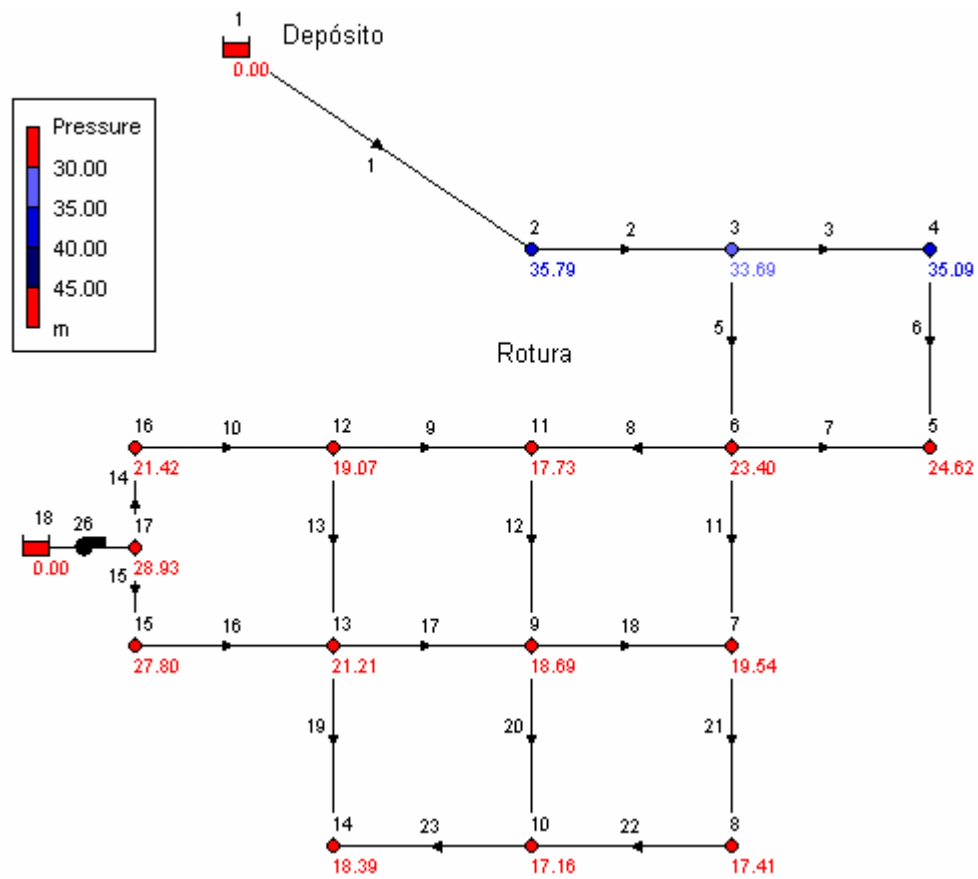


Fig. 7.1. Presiones en nudos (m.c.a.), rotura tubería 4.

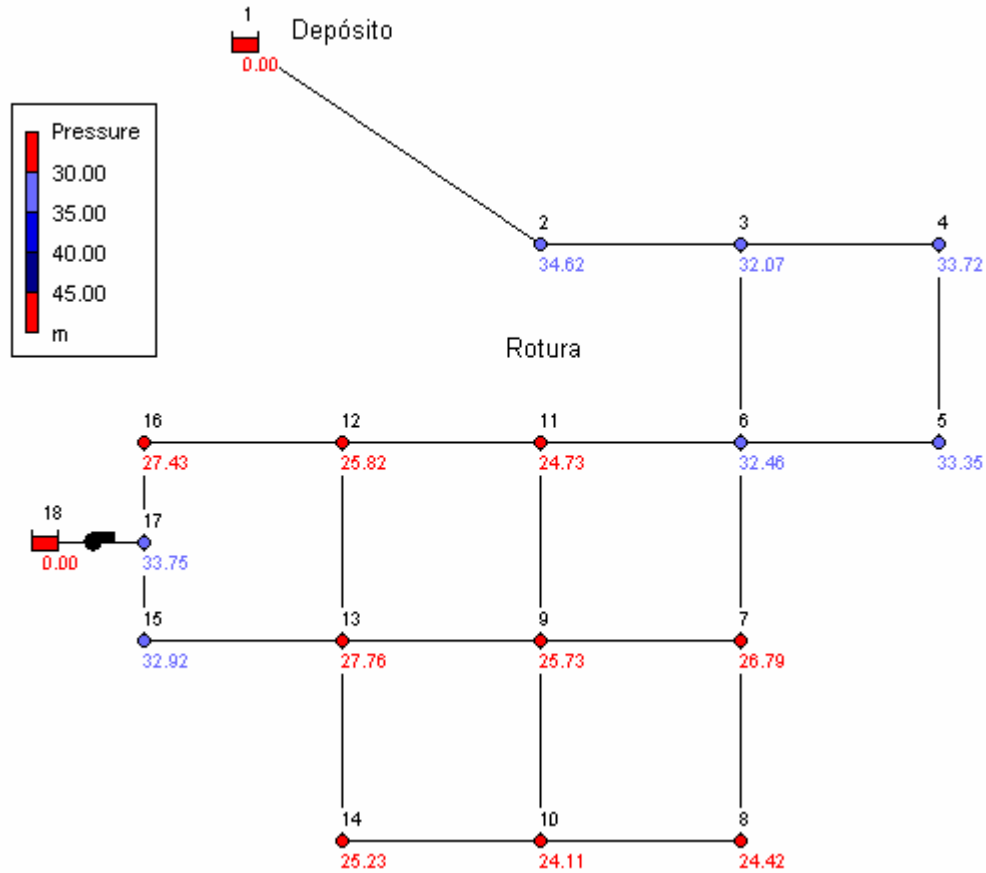


Fig. 7.2. Presiones en nudos (m.c.a.), rotura tubería 4 y diámetros modificados.

De igual forma pueden simularse la rotura de otras tuberías y estudiar la solución más adecuada. Así se puede analizar la respuesta de la red ante estas situaciones para buscar soluciones antes de que las roturas lleguen a producirse.

7.3. INCENDIO

Supongamos ahora que se produce un incendio en las proximidades del nudo 5 de forma que tienen que ser utilizados los dos hidrantes de incendio más próximos: uno de ellos situado en el propio nudo 5 y otro situado a 200 metros. Ambos hidrantes son del tipo 80 mm y deberán satisfacer un caudal mínimo de 500 l/min = 8.33 l/s con una presión mínima de 10 m.c.a.

Para simular esta situación tenemos que introducir un nudo nuevo (19) donde estará colocado el segundo hidrante con lo cual se modifica la topología de la red y, en consecuencia, hay que modificar la sección correspondiente a nudos [JUNCTIONS] y la sección correspondiente a tuberías [PIPES].

Ahora la tubería 6 va del nudo 4 al 19 y tiene una longitud de 300 metros, mientras que la tubería nueva (27) va del nudo 19 al 5 con una longitud de 200 metros.

En cuanto a los nudos, habrá que introducir el nudo 19 con su cota correspondiente (23m) y con su consumo de 8.33 l/s (caudal mínimo que debe satisfacer un hidrante tipo 80 mm), y habrá que modificar el consumo del nudo 5 ($10 + 8.33 = 18.33$ l/s).

Rodando el programa cuando el consumo de la red es el consumo medio y están funcionando dos bombas (archivo 7.3) se obtienen los resultados mostrados en la figura 7.3.

Se comprueba que las presiones están por encima del mínimo requerido (10 m.c.a.) puesto que las presiones mínimas se tienen en los nudos donde están los hidrantes con valores de 15.50 y 15.60 m.c.a. Así pues, la solución es aceptable. En caso contrario, habría que modificar la red (por ejemplo, aumentando diámetros) hasta alcanzar los requerimientos mínimos: caudal en los hidrantes de 500 l/min con presiones por encima de los 10 m.c.a.

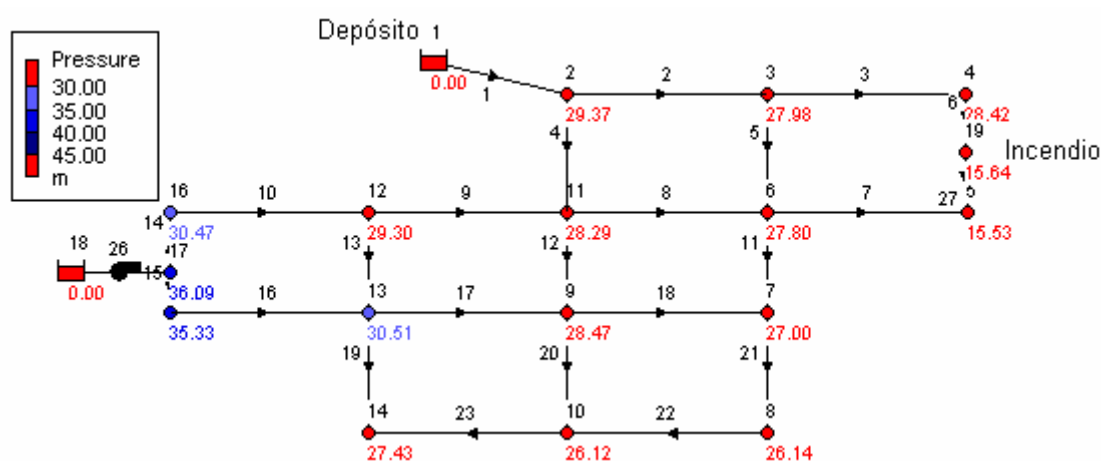


Fig. 7.3. Presiones en los nudos (m.c.a.), incendio nudo 5.

CAPÍTULO 8. CÁLCULO DE UNA ESTACIÓN DE BOMBEO EN PERIODO EXTENDIDO.

8.1. DESCRIPCIÓN

En este último ejercicio se determina el régimen de funcionamiento en periodo extendido (a lo largo de una semana) de la estación de bombeo de la red ya estudiada en los ejercicios anteriores.

Con este propósito se analizará la curva de consigna calculada en el capítulo 5, adaptándola a la red, ya que como se comentó en ese caso, la curva obtenida se trataba solamente de una primera aproximación a la real, puesto que al estar la red alimentada por 2 puntos, el depósito y la estación de bombeo, las variaciones en las características de uno de ellos, en este caso en la presión de la estación de bombeo, modifican la distribución final de caudales y presiones.

Del estudio de la curva de consigna se determinará el régimen de explotación del sistema de bombeo en función de la evolución temporal de la demanda. Se aprovechará entonces la posibilidad que ofrece EPANET de variar determinadas magnitudes, en este caso los consumos en los nudos, asociando a cada uno una curva de modulación o patrón, es decir, una curva de carga diaria.

Por otro lado será necesario modificar la configuración inicial de la red, y en particular determinados elementos, como el depósito, el cual ha sido tratado hasta ahora como un embalse, es decir, como un punto de suministro de caudal ilimitado y nivel constante. Esto era posible debido a que hasta este momento no se había planteado la evolución temporal del nivel en el depósito, al estudiarse únicamente la red en periodo simple.

8.2. PLANTEAMIENTO

En términos generales, las características iniciales de la red se verán alteradas en los siguientes términos:

- el nudo 1, donde anteriormente se localizaba el embalse 1, pasa ahora a ser un depósito, al que llegará agua en las horas valle de demanda (durante la noche) procedente de la estación de bombeo, y contribuirá a satisfacer el consumo el resto del día.
- la demanda de los nudos deja de ser un valor constante, siendo multiplicada por el coeficiente modulador de la demanda según la curva de modulación. De este modo el consumo adoptará valores distintos según la hora del día.

Se comenzará extrayendo la mayor cantidad de información de la gráfica 8.1, donde se representan la curva de consigna ya calculada superpuesta sobre las tres posibles curvas características del sistema de bombeo, según funcionen 1, 2 ó 3 bombas:

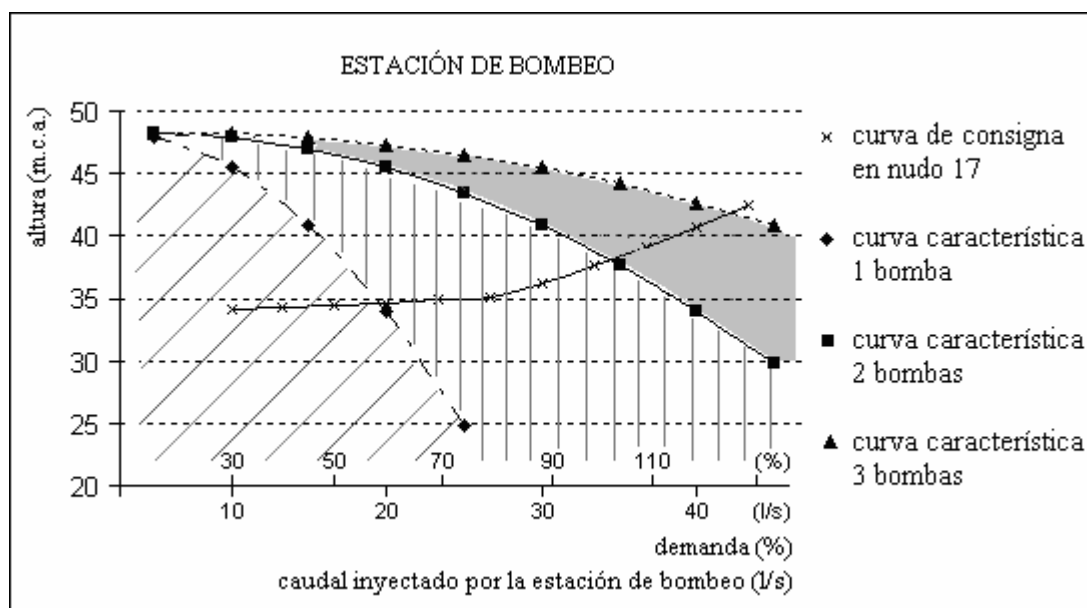


Fig. 8.1. Curva de consigna en nudo 17 y curvas características del sistema de bombeo.

A raíz del gráfico se podría establecer el siguiente régimen de funcionamiento:

- Observando la zona rayada oblicuamente de la gráfica se puede suponer que, con consumos iguales o inferiores al 60% del consumo total, se satisface la demanda sin sobrepasar las presiones límite funcionando una sola bomba.
- Del mismo modo, para consumos comprendidos entre el 70 y el 100% del consumo total, será necesaria la puesta en funcionamiento de dos de las bombas (zona rayada verticalmente).
- Para demandas superiores al 100 % del consumo total entrarían en funcionamiento las tres bombas (zona sombreada).

8.3. DETERMINACIÓN DEL RÉGIMEN DE EXPLOTACIÓN DE LA RED

En este punto se comprueba la validez del régimen de funcionamiento definido anteriormente mediante EPANET. Rodando el programa se obtienen presiones diferentes a las que cabría esperar tras el análisis de la curva de consigna, debido fundamentalmente a la influencia del depósito, como ya se ha comentado anteriormente. Al disminuir la presión en el punto 17, las presiones de la red se reequilibran, homogeneizándose nuevamente.

A continuación se resume el análisis comparativo llevado a cabo con los datos obtenidos con EPANET (los archivos utilizados se encuentran en la carpeta *Configuración 0*). Se ha rodado el programa combinando las posibles configuraciones de la red (solamente depósito y depósito más 1, 2 y 3 bombas) con los diferentes estados

de carga, obteniendo los siguientes valores límites para las presiones (m.c.a.) de la tabla 8.1:

30%	Dep.	D+1B	D+2B	D+3B	40%	Dep.	D+1B	D+2B	D+3B
Pmin=	39,63	40,95	41,39	41,54	Pmin=	37,88	39,95	40,7	40,96
Pmax=	44,57	46,22	47,27	47,9	Pmax=	42,86	44,94	46,58	47,45

50%	D	D+1B	D+2B	D+3B	60%	D	D+1B	D+2B	D+3B
Pmin=	35,24	38,66	39,8	40,2	Pmin=	32,07	37,08	38,69	39,26
Pmax=	40,72	43,48	45,7	46,87	Pmax=	38,15	41,69	44,61	46,15

70%	D	D+1B	D+2B	D+3B	80%	D	D+1B	D+2B	D+3B
Pmin=	28,38	35,23	37,36	38,15	Pmin=	24,17	32,97	35,8	36,87
Pmax=	35,17	39,58	43,33	45,31	Pmax=	31,76	37,14	41,91	44,55

90%	D	D+1B	D+2B	D+3B	100%	D	D+1B	D+2B	D+3B
Pmin=	19,45	29,51	33,31	35	Pmin=	14,21	25,66	30,28	32,36
Pmax=	27,94	34,38	40,43	43,68	Pmax=	23,7	31,48	38,75	42,68

110%	D	D+1B	D+2B	D+3B	120%	D	D+1B	D+2B	D+3B
Pmin=	8,46	21,41	26,93	29,45	Pmin=	1,46	16,77	23,27	26,27
Pmax=	19,04	28,28	36,88	41,56	Pmax=	14,08	24,77	34,8	40,31

Tabla 8.1. Presiones máximas y mínimas en los diferentes estados de carga.

Como se observa, para bajos estados de carga (del 30 al 60% del consumo total), las presiones que suministra la estación de bombeo cuando funciona con 1, 2 ó 3 bombas son muy similares.

Sirva de ejemplo los valores de presión mínima cuando existe una demanda del 40% del consumo total. En este caso, el funcionamiento de 3 bombas sólo aporta un metro más de presión que funcionando una sola bomba ($P_{\min, 3B} = 40.96$ m.c.a., $P_{\min, 1B} = 39.95$ m.c.a.).

La diferencia de presiones suministrada por cada distinta configuración aumenta conforme crecen los consumos. Esto es debido a que para bajos caudales las bombas trabajan fuera de su rango de máxima eficiencia.

Es en este momento cuando se puede determinar el régimen de explotación más apropiado. En cada estado de carga se optará por aquella configuración de la red que suministre presiones entre 30 y 45 m.c.a., tal y como se muestra en la tabla 8.2.

Cabe destacar que en las puntas de demanda, cuando la red está sometida a estados de carga mayores del 100% del consumo medio, no se suministran las presiones mínimas ni tan siquiera con la puesta en marcha de las 3 bombas.

Debido a esta deficiencia se proyecta una nueva estación de bombeo de mayor potencia que satisfaga los estados de carga mayores.

<i>Estado de Carga</i>	<i>Configuración de la Red</i>	<i>Presiones</i>
30%	DEPÓSITO	$P_{\min}=39.63$ m.c.a. $P_{\max}=44.57$ m.c.a.
40%		$P_{\min}=37.88$ m.c.a. $P_{\max}=42.86$ m.c.a.
50%		$P_{\min}=35.24$ m.c.a. $P_{\max}=40.72$ m.c.a.
60%		$P_{\min}=32.07$ m.c.a. $P_{\max}=38.25$ m.c.a.
70%	DEPÓSITO + 1 BOMBA	$P_{\min}=35.23$ m.c.a. $P_{\max}=39.58$ m.c.a.
80%		$P_{\min}=32.97$ m.c.a. $P_{\max}=37.14$ m.c.a.
90%	DEPÓSITO + 2 BOMBAS	$P_{\min}=33.31$ m.c.a. $P_{\max}=40.43$ m.c.a.
100%		$P_{\min}=30.28$ m.c.a. $P_{\max}=38.75$ m.c.a.

Tabla 8.2. Régimen de explotación.

8.4. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA DEMANDA

Para conseguir una simulación más representativa de la realidad, EPANET nos permite asociar a cada consumo un factor multiplicativo que aumente o disminuya la demanda en cada instante temporal.

Si bien es cierto que en grandes urbes, la evolución del consumo en el tiempo es más homogénea, en pequeñas localidades se acentúan considerablemente tanto las puntas de demanda como los valles.

Por lo que para definir una curva de carga diaria de la red de estudio, es necesario estimar el número de habitantes a los que se les suministra caudal. Si se establece una dotación de 200 l-habitante/día, y se conoce el caudal medio de la red, que se definió en el ejercicio 1 como 100 l/s (8.640.000 l/día), se está suministrando caudal a unos 43.200 habitantes.

Se trata, por lo tanto, de un pequeño núcleo de población, en el que se concentrará la demanda a determinadas horas del día. De modo que su curva de carga podría corresponder a la de la figura 8.2:

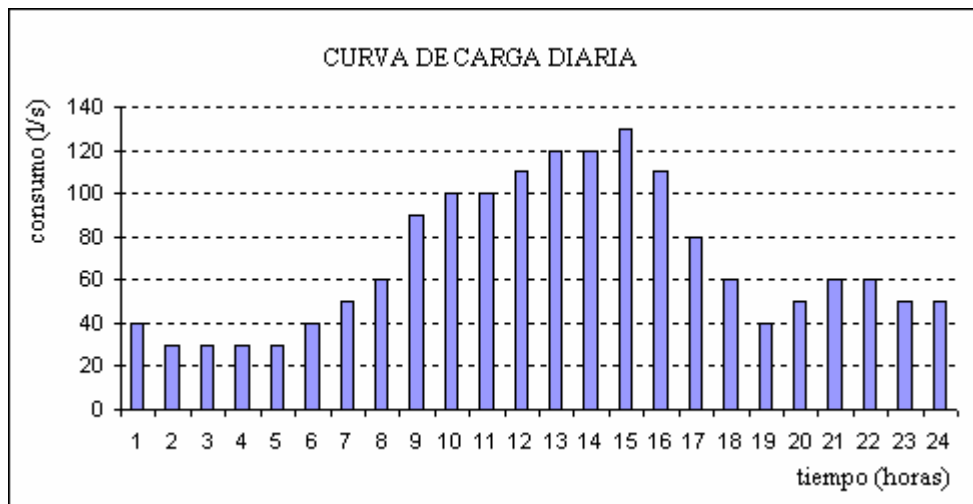


Fig. 8.2. Curva de carga de la red.

A partir de esta curva de carga se establecerá el régimen de funcionamiento de la estación de bombeo.

8.5. ADAPTACIÓN DE LA RED A LA NUEVA SITUACIÓN

Debido a que el sistema de bombeo originalmente proyectado no satisface la demanda punta, se exponen a continuación diferentes configuraciones de la red, de entre las cuales, tras un estudio técnico y económico, se elegirá aquella que, cumpliendo satisfactoriamente con la demanda, minimice costos.

Para cada nueva configuración propuesta se procederá de la siguiente manera:

- se proyectará la red bajo el estado de carga más desfavorable, el correspondiente al de máxima demanda y nivel mínimo en el depósito. Se consigue asignando valores estimados a las variables y parámetros hasta llegar, por prueba y error, a aquellos que proporcionan las presiones requeridas en cada instante;
- una vez establecidos los elementos y parámetros requeridos, se comprobará que no se alcanzan las presiones máximas en la red bajo los menores estados de carga, suponiendo un nivel máximo en el depósito, mediante simulaciones instantáneas;
- mediante la comprobación llevada a cabo, se puede determinar qué elementos deben entrar en marcha en cada estado de carga;
- a continuación se establecerá un patrón de funcionamiento del sistema, en función de la variación de la demanda, definiendo qué elementos tienen que trabajar en cada momento del día;
- por último, se montará la simulación en periodo extendido. Así mismo se comprobará que la bomba puede trasegar el volumen de agua necesario al depósito durante la noche. Si las bombas proyectadas no son capaces de

Las soluciones propuestas son las siguientes:

- configuración 1: depósito más 2 bombas iguales en paralelo,
- configuración 2: depósito más una bomba,
- configuración 3: depósito más tres bombas.

8.5.1. Configuración 1: depósito más dos bombas iguales en paralelo:

Se requieren dos bombas cuyo funcionamiento simultáneo sea capaz de satisfacer los estados de mayor carga.

8.5.1.1 Estimación del punto de funcionamiento

Para definir las se convertirá al nudo 17 de nuevo en una bomba ficticia, y por prueba y error, se establecerá el caudal que tiene que inyectar en la red para que las presiones se mantengan dentro de los límites establecidos (entre 30 y 45 m.c.a.) en la situación más desfavorable, esto es, al 130% del consumo medio y con el depósito en el nivel mínimo.

Forzando al nudo 17 a inyectar a la red 29.90 l/s ($23 \text{ l/s} \cdot 1.3 = 29.90 \text{ l/s}$, ya que hay que tener en cuenta que EPANET considera el caudal inyectado por la bomba ficticia como una demanda, por lo cual la multiplica por el factor multiplicador de demanda) (archivo 8.1.1) resultan todas las presiones por encima de 30 m.c.a., según la figura 8.4. En el procedimiento para obtener este valor se ha rodado el programa con distintos valores de demanda negativa en el nudo 17 hasta llegar a aquél con el que todas las presiones eran satisfactorias, obteniéndose una presión en el nudo 17 de 33.36 m.c.a.

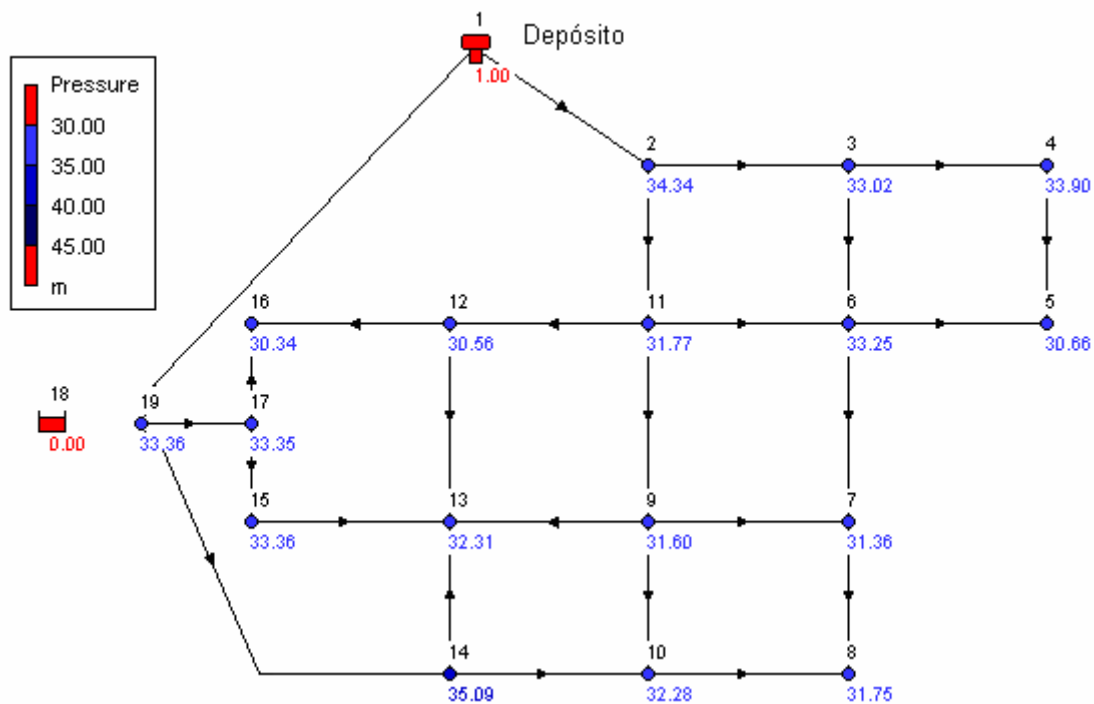


Fig. 8.4. Presiones con bomba ficticia en condiciones más desfavorables (130% del consumo medio y nivel mínimo en el depósito).

Si se disminuye el caudal inyectado, las presiones no superan, en determinados puntos, los 30 m.c.a. Por lo que se puede establecer el punto óptimo de la estación de bombeo:

$$(Q, H) = (30 \text{ l/s}, 33.36 \text{ m.c.a.})$$

Como se han definido las bombas en paralelo, el punto óptimo de cada bomba es la mitad del caudal necesario, manteniéndose el mismo valor para la altura:

$$(Q, H) = (15 \text{ l/s}, 33.36 \text{ m.c.a.})$$

De este modo podemos introducir en el archivo de datos dos nuevas líneas que representarán 2 bombas, definiendo su curva asociada gracias al punto calculado anteriormente (15 l/s, 33.36 m.c.a.) (archivo 8.1.2). De este modo se obtienen los resultados de la figura 8.5, muy similares a los calculados con la bomba ficticia.

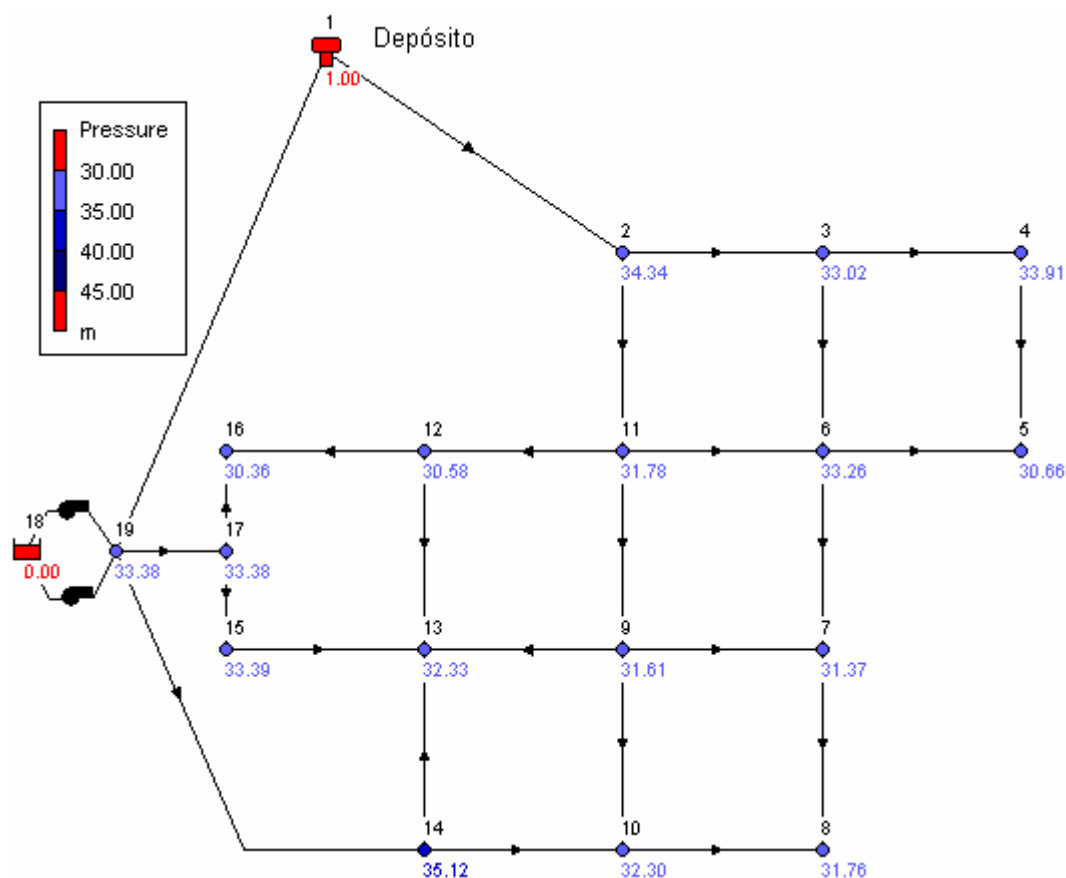


Fig. 8.5. Presiones con bomba ficticia sustituida en condiciones más desfavorables.

8.5.1.2 Comprobación:

Llegados a este punto se hace necesario comprobar que el funcionamiento de estas bombas no origina presiones mayores a 45 m.c.a. cuando funcionan en estados de carga menores, hasta el 90% (ya que los estados de carga inferiores o iguales al 80% del consumo medio se satisfacen únicamente con el depósito). Para ello, se han analizado primeramente las presiones que se obtienen en cada estado de carga cuando funciona

una sola bomba. De los resultados obtenidos al rodar EPANET (archivos 8.1.3) contenidos en el archivo Excel *Pmax* y *Pmin.Config-1*, se puede concluir que para los estados de carga del 90 y 100% de la demanda total puede abastecerse a la red con el funcionamiento de una sola bomba, mientras que para los estados de carga superiores sería necesaria la entrada en funcionamiento de ambas bombas.

8.5.1.3 Simulación en periodo extendido:

En la determinación del volumen necesario de depósito interviene la variación temporal de la demanda, es decir, la curva de carga diaria del sistema, ya que según el estado de carga, el depósito inyecta un caudal distinto. Se establecerá un diámetro equivalente para el depósito de 25 m, que sólo se modificará cuando sea estrictamente necesario, ya que se supone que el depósito ya está construido.

De modo que se necesita una simulación de la red en periodo extendido, que se realizará con las dos bombas ya definidas. Las curvas características de estas bombas se modificarán en función de su capacidad para trasegar agua hacia el depósito ya que no son capaces de suministrarle el volumen necesario con la curva característica definida anteriormente. Se necesita elevar 41 m el volumen con el que el depósito suministrará caudal a la red el resto del día. De modo que se irá modificando el caudal del punto óptimo, fijando la altura en 45 m.c.a. (41 m más las pérdidas de energía por la conducción), hasta obtener los resultados apropiados, lo que tendrá lugar cuando se inyecte al depósito el volumen necesario para satisfacer la demanda el resto del día. No sólo se puede llegar a la solución variando el punto característico de las bombas, si no también modificando la duración de sus periodos de funcionamiento.

La curva de carga diaria de la red se representa en la tabla 8.3, asociada al régimen de explotación más conveniente. Hay que tener en cuenta que este régimen de explotación se ha estimado en función de las presiones que se obtienen con las dos bombas anteriormente definidas, las cuales ya se saben insuficientes para inyectar el volumen requerido al depósito.

Se comienza entonces definiendo a qué hora tiene que abrirse o cerrarse cada elemento, según la tabla 8.3. Esta tabla se traduce, para EPANET, en el siguiente conjunto de reglas simples:

[CONTROLS]

LINK 28 CLOSED AT CLOCKTIME 8 AM (tubería entre bombeo y depósito)

LINK 27 OPEN AT CLOCKTIME 8 AM (tubería entre bombeo y red)

LINK 31 OPEN AT CLOCKTIME 8 AM (tubería entre bombeo y red)

LINK 25 CLOSED AT CLOCKTIME 8 AM (bomba 2)

LINK 25 OPEN AT CLOCKTIME 11 AM

LINK 25 CLOSED AT CLOCKTIME 4 PM

LINK 24 CLOSED AT CLOCKTIME 4 PM (bomba 1)

LINK 27 CLOSED AT CLOCKTIME 9 PM

LINK 31 CLOSED AT CLOCKTIME 9 PM

LINK 28 OPEN AT CLOCKTIME 9 PM

LINK 25 OPEN AT CLOCKTIME 9 PM

LINK 24 OPEN AT CLOCKTIME 9 PM

HORA	FACTOR DE CARGA	CONFIGURACIÓN		
		HACIA EL DEPÓSITO	HACIA LA RED	
12 a.m.	0.4	2 BOMBAS	DEPÓSITO	- tuberías 27 y 31 cerradas (interrumpe conexión entre bombeo y red) - bombas 24 y 25 en marcha
1 a.m.	0.3			
2 a.m.	0.3			
3 a.m.	0.3			
4 a.m.	0.3			
5 a.m.	0.4			
6 a.m.	0.5			
7 a.m.	0.6			
8 a.m.	0.9		DEPÓSITO + 1 BOMBA	- tuberías 27 y 31 abiertas - bomba 25 cerrada
9 a.m.	1		DEPÓSITO + 2 BOMBAS	- bomba 25 abierta
10 a.m.	1			
11 a.m.	1.1			
12 p.m.	1.2			
1 p.m.	1.2		DEPÓSITO	- bombas 24 y 25 cerradas
2 p.m.	1.3			
3 p.m.	1.1			
4 p.m.	0.8			
5 p.m.	0.6			
6 p.m.	0.4			
7 p.m.	0.5			
8 p.m.	0.6	2 BOMBAS		
9 p.m.	0.6			
10 p.m.	0.5			
11 p.m.	0.5			

Tabla 8.3. Régimen de explotación.

Por consiguiente, el análisis de sensibilidad se llevará a cabo sobre el caudal de la curva característica y la duración del bombeo.

Cuando estos valores sean inferiores al óptimo que buscamos, EPANET avisará de que los nudos quedan desconectados, es decir, de que no hay suficiente volumen de agua en el depósito para satisfacer la demanda. En este caso será necesario ampliar la duración del bombeo, o bien aumentar el caudal del punto óptimo de las bombas.

Si los valores asignados a estas dos variables son superiores al óptimo, el depósito no se vaciará del todo. En nuestro caso, en el que la simulación comienza con un nivel inicial de 2 m en el depósito, se habrá alcanzado los valores óptimos de caudal y volumen de depósito cuando el nivel que se alcanza en éste al final del día sea de 2 m.

Procediendo de este modo, se obtiene el siguiente punto óptimo para las nuevas bombas (archivo 8.1.4):

$$(Q, H) = (55.8 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

que optimiza las siguientes dimensiones del depósito:

- *nivel inicial: 2 m*
- *niveles límite: 5 m - 1 m*
- *diámetro: 25 m*

Cabe llamar la atención sobre el hecho de que estas nuevas bombas de mayor potencia no originan en la red presiones mayores de 45 m.c.a., gracias a que la estación de bombeo está conectada al depósito, de menor altura piezométrica, por lo que las presiones se reparten, fluyendo caudal hacia el depósito y en sentido inverso según las necesidades de la red. Además, se han añadido 2 válvulas reductoras de presión, con un valor de consigna de 45 m.c.a. en las tuberías en las que la estación inyecta caudal a la red. La pérdida que carga que introducen no supera los 3 m.c.a. en momentos puntuales.

La variación que sufre el nivel del depósito a lo largo de un día es la siguiente (figura 8.6). Obsérvese que se llena y vacía completamente cada día:

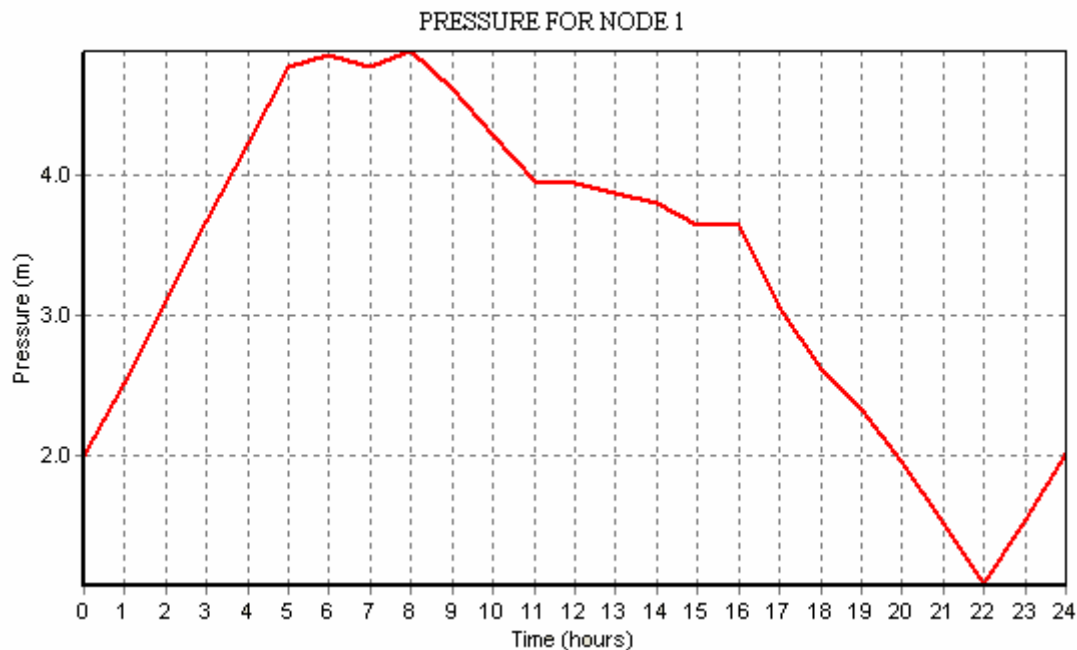


Fig. 30. Evolución temporal del nivel del depósito.

8.5.2. Configuración 2: depósito más una única bomba

En este caso, se proyecta colocar una sola bomba, que estará funcionando ininterrumpidamente, recargando el depósito durante la noche y satisfaciendo de día la demanda.

La bomba requerida debe inyectar el mismo caudal a la misma presión que la bomba ficticia que se calculó en el comienzo de la simulación anterior, es decir:

$$(Q, H) = (30 \text{ l/s}, 33.36 \text{ m.c.a.})$$

Definiendo una única bomba con dicho punto óptimo se obtienen los resultados de la figura 8.7 en la situación más desfavorable (archivo 8.2.1):

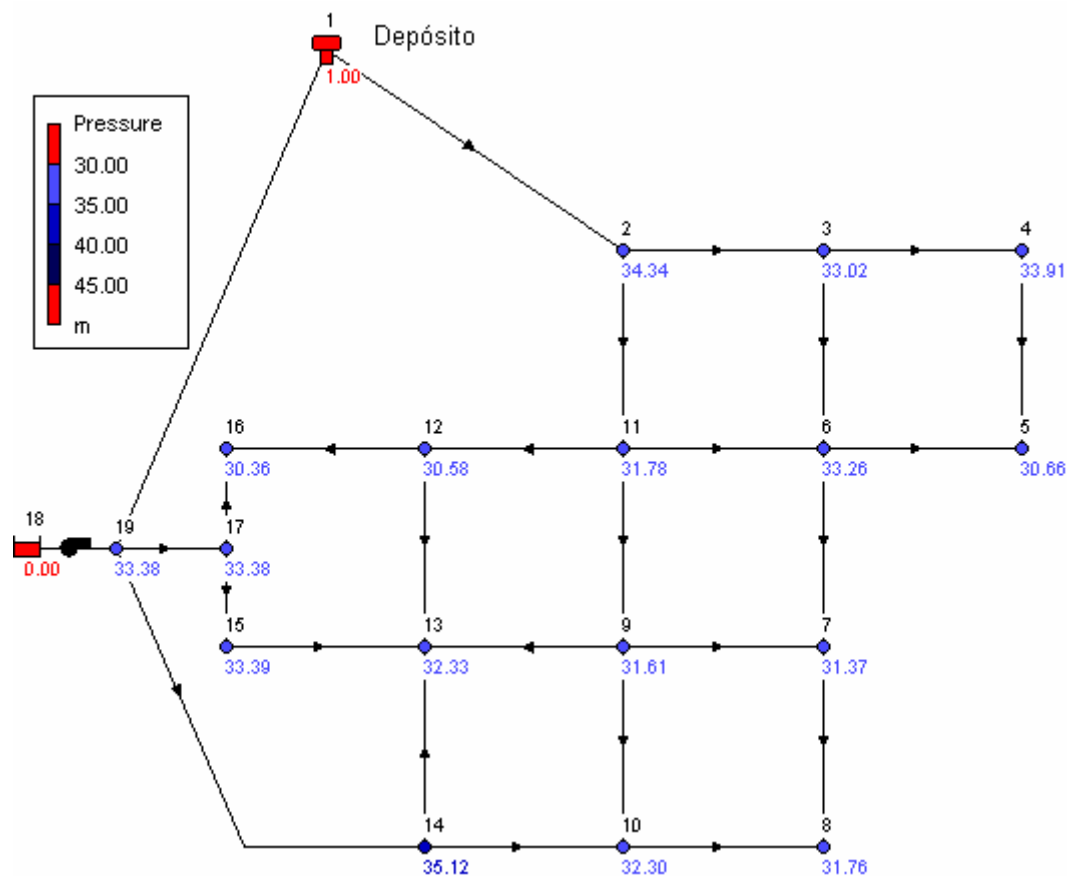


Fig. 8.7. Una única bomba en situación más desfavorable.

Con esta nueva bomba definida rodamos el programa para cada estado de carga (de nuevo desde el 90 al 130% del consumo medio) comprobando que las presiones no superan los 45 m.c.a. en los estados de carga menores del 130% del consumo medio. De los resultados obtenido al rodar EPANET (archivos 8.2.2) contenidos en el archivo Excel *Pmax* y *Pmin.Config-2*, se observa la escasa eficiencia de esta configuración, ya que al estar la bomba dimensionada para la situación más desfavorable, en los estados de carga menores las presiones en todos los puntos son superiores a 40 m.c.a. A su vez, de ellos podemos extraer el patrón de explotación presente en la tabla 8.4.

La bomba únicamente dejará de funcionar durante 5 horas, desde las 16h hasta las 21h. No sólo habrá que controlar su puesta en marcha y parada, si no que también será necesario actuar sobre las tuberías que conectan la bomba con el depósito o con la red, abriéndolas o cerrándolas, de modo que la bomba haga llegar caudal al depósito durante la noche, y suministre la punta durante el día.

Las reglas simples a introducir en EPANET son las siguientes:

[CONTROLS]
 LINK 24 CLOSED AT CLOCKTIME 4 PM
 LINK 27 OPEN AT CLOCKTIME 8 AM
 LINK 31 OPEN AT CLOCKTIME 8 AM
 LINK 27 CLOSED AT CLOCKTIME 4 PM
 LINK 31 CLOSED AT CLOCKTIME 4 PM
 LINK 24 OPEN AT CLOCKTIME 9 PM

HORA	FACTOR DE CARGA	CONFIGURACIÓN		
		HACIA EL DEPÓSITO	HACIA LA RED	
12 a.m.	0.4	BOMBA	DEPÓSITO	- tuberías 27 y 31 cerradas (interrumpe conexión entre bombeo y red) - bomba 24 en marcha
1 a.m.	0.3			
2 a.m.	0.3			
3 a.m.	0.3			
4 a.m.	0.3			
5 a.m.	0.4			
6 a.m.	0.5			
7 a.m.	0.6			
8 a.m.	0.9		DEPÓSITO + BOMBA	- tuberías 27 y 31 abiertas - bomba 24 en marcha
9 a.m.	1			
10 a.m.	1			
11 a.m.	1.1			
12 p.m.	1.2			
1 p.m.	1.2			
2 p.m.	1.3		DEPÓSITO	- tuberías 27 y 31 cerradas - bomba 24 parada
3 p.m.	1.1			
4 p.m.	0.8			
5 p.m.	0.6			
6 p.m.	0.4			
7 p.m.	0.5			
8 p.m.	0.6			
9 p.m.	0.6			
10 p.m.	0.5			
11 p.m.	0.5			

Tabla 8.4. Régimen de explotación.

Rodando el programa en periodo extendido (introduciendo la curva de carga diaria definida anteriormente) EPANET avisa de que la bomba no puede suministrar el caudal necesario a la presión requerida (archivo 8.2.3), debido, como en la configuración anterior, a que no es capaz de elevar hacia el depósito el volumen de agua que éste necesita para suministrarlo a la red durante el día, por lo que los nudos quedan desconectados.

Por este motivo es necesario redefinir la curva característica de la bomba. Estableciendo como altura necesaria 45 m.c.a., se aumentará el caudal progresivamente, hasta que dejen de aparecer las advertencias de EPANET y el nivel del agua en el depósito alcance el máximo y mínimo cada día.

De esta manera (archivo 8.2.4.), se obtiene el siguiente punto de funcionamiento:

$$(Q, H) = (92.87 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

De modo que si configuramos la estación de bombeo con una única bomba definida por el anterior punto de funcionamiento, las presiones que resultan se encuentran todas dentro de los límites establecidos. De estos resultados se han obtenidos los siguientes gráficos que ayudan a comprender el funcionamiento de la red.

En la figura 8.8 queda representado el régimen de funcionamiento de la red, es decir, el resultado directo de las leyes de control simples. Como se observa, la bomba se encuentra parada desde las 16h hasta las 20h, cuando empieza a inyectar caudal

únicamente al depósito, de manera que todo el flujo que impulsa la bomba pasa por la tubería 28 que la conecta con el depósito, por lo que ambas líneas son coincidentes.

Este estado se mantiene hasta las 7h, cuando al aumentar la demanda es necesario que la bomba inyecte caudal también a la red, de manera que desde las 7h hasta las 16h la bomba suministra caudal tanto a la red como al depósito, por lo que la línea resultante de la suma de los flujos que circulan por las tuberías 27, 28 y 31 coincidiría con la línea que representa el caudal bombeado por la estación.

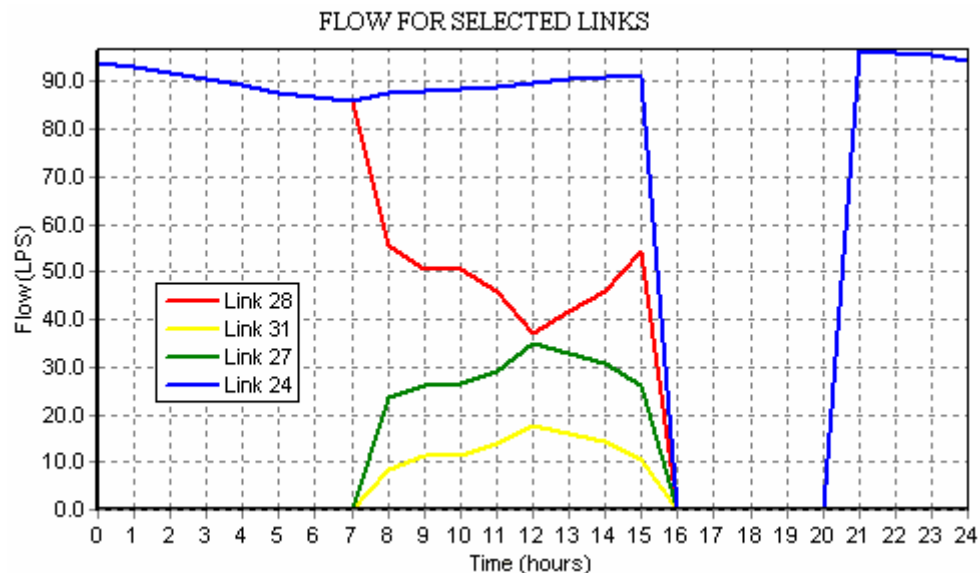


Fig. 8.8. Variación del flujo en bomba 24 y en tuberías 27, 28 y 31.

Sin embargo el volumen de depósito no está optimizado, observándose en la figura 8.9 una tendencia descendente:

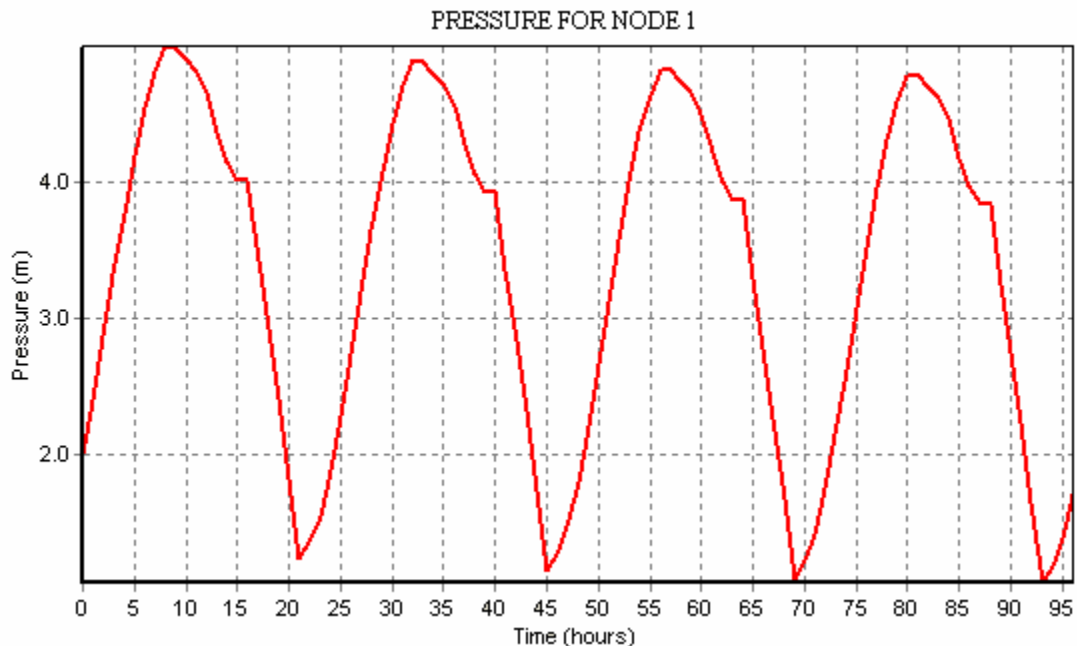


Fig. 8.9. Variación del nivel en el depósito en 96 horas.

Es de prever que, a largo plazo, el volumen inicial con el que empieza un nuevo día disminuya progresivamente de 2 m al nivel mínimo de 1 m. En este caso, los nudos

de consumo quedarían desconectados al no contener el depósito el volumen de agua suficiente para abastecer la demanda en las primeras horas del día. Esta predicción se confirma al rodar el programa el periodo extendido de una duración de un mes (archivo 8.2.4.bis), advirtiéndonos de nuevo EPANET de que determinados nudos quedan desconectados.

Este problema se soluciona aumentando el caudal del punto de funcionamiento de la bomba gradualmente, hasta que el nivel inicial y final del depósito en cada nuevo día sea el mismo. Procediendo de esta manera (archivo 8.2.5), se obtiene el siguiente punto de funcionamiento:

$$(Q, H) = (98.5 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

siendo la variación del nivel en el depósito a lo largo de un día la representada en la figura 8.10. Obsérvese que el nivel comienza y finaliza el día con una altura de 2 m.

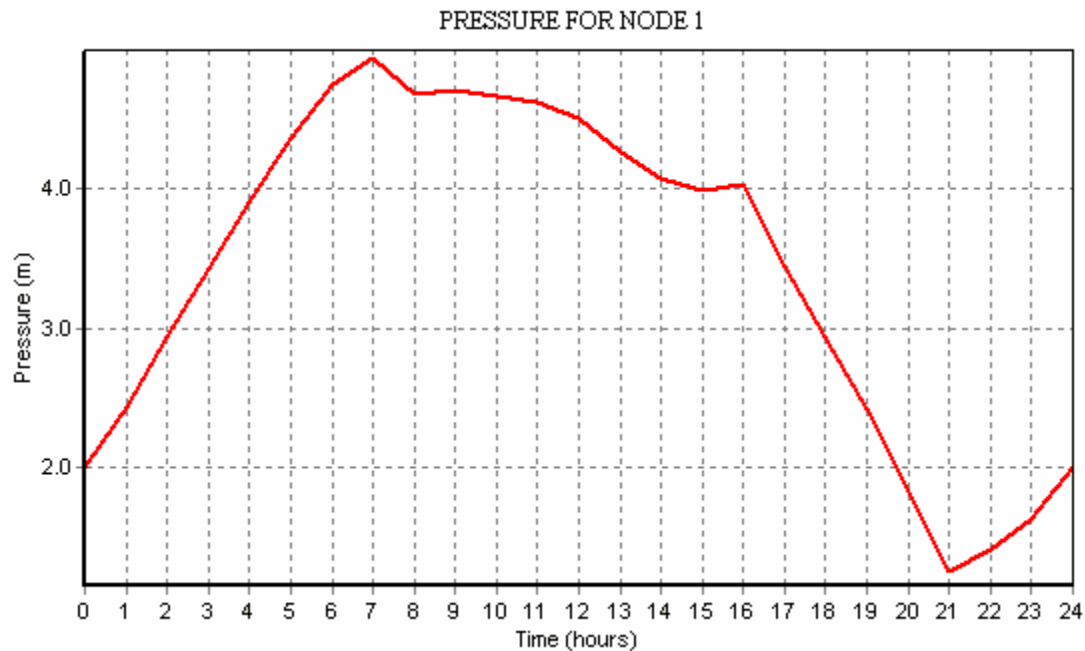


Fig. 8.10. Variación del nivel en el depósito en 24 horas.

8.5.3. Configuración 3: depósito más tres bombas:

La tercera solución que se propone responde más fielmente al esquema que se trazó en el capítulo 4. Será necesario aumentar la potencia de las bombas que se definieron entonces, ya que recordemos que el funcionamiento simultáneo de las tres bombas no era capaz de satisfacer los estados de carga superiores al 100% del consumo medio, por lo que mucho menos enviar agua hacia el depósito.

Se decide instalar en la estación de bombeo 3 bombas idénticas en paralelo.

Estas tres bombas trabajarán a la vez durante la noche, para enviar agua hacia el depósito. De la configuración anterior ya se conoce el punto óptimo del sistema de bombeo para que tenga la potencia suficiente para rellenar el depósito durante la noche:

$$(Q, H) = (98.5 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

Éste era el punto óptimo de la bomba que funcionaba sola en la configuración 2. Pero en este caso se trata de 3 bombas en paralelo las que tienen que suministrar esas condiciones de caudal y presión a la salida de la estación de bombeo. De modo que en el punto óptimo de cada bomba se mantendrá la presión de 45 m.c.a., reduciéndose el caudal que tienen que suministrar a 1/3 de 98.5 l/s. De modo que se obtiene el siguiente punto:

$$(Q, H) = (32.8 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

A continuación se procede a estudiar qué estados de carga puede satisfacer una única bomba, dos de ellas, o tres trabajando al unísono para establecer el régimen de funcionamiento.

Se comprueba, tras rodar EPANET (archivos 8.3.1-90% y 8.3.1-130%), que en las condiciones extremas, es decir, cuando el estado de carga corresponde al 90% de la demanda total y el nivel en el depósito es de 5 m, y cuando la demanda es el 130% del consumo medio y el depósito está en su nivel mínimo, una única bomba es suficiente para mantener las presiones en los nudos de consumo entre 30 y 45 m.c.a.

De modo que para satisfacer la demanda sólo se necesita una de estas bombas más el depósito. Así que únicamente entrarán en funcionamiento las tres a la vez durante la noche, cuando sea preciso que el depósito reciba agua.

Se modificará seguidamente el archivo 8.3.1. para analizar la red en periodo extendido asociando la curva de carga diaria a las demandas de cada nudo, y estableciendo el régimen de explotación del sistema de bombeo indicado anteriormente, según el cual una sola bomba y el depósito hacen frente a la demanda durante el día, entrando en funcionamiento las otras dos bombas durante la noche. Para que EPANET tenga en cuenta este régimen de explotación se han introducido las siguientes leyes de control simples:

[CONTROLS]

LINK 25 CLOSED AT CLOCKTIME 8 AM (bomba 2)

LINK 26 CLOSED AT CLOCKTIME 8 AM (bomba 3)

LINK 28 CLOSED AT CLOCKTIME 8 AM (tubería entre bombeo y depósito)
LINK 31 OPEN AT CLOCKTIME 8 AM (tubería entre bombeo y red)
LINK 27 OPEN AT CLOCKTIME 8 AM (tubería entre bombeo y red)

LINK 25 OPEN AT CLOCKTIME 11 PM
LINK 26 OPEN AT CLOCKTIME 11 PM
LINK 28 OPEN AT CLOCKTIME 11 PM
LINK 31 CLOSED AT CLOCKTIME 11 PM
LINK 27 CLOSED AT CLOCKTIME 11 PM

Durante el día el depósito se vacía, de modo que únicamente suministra agua una bomba. Los mensajes de advertencia de EPANET informan que la bomba está abierta, pero que no puede suministrar todo el caudal demandado (archivo 8.3.2.).

Como solución se proponen 3 opciones:

- aumentar el caudal del punto característico de las bombas, para que durante la noche llegue más agua al depósito. Será necesario entonces aumentar la capacidad de almacenamiento de agua del depósito,
- poner en marcha 2 bombas durante la hora punta de demanda. De este modo el suministro de demanda estará repartido entre el depósito y las tres bombas, disminuyendo el caudal que tiene que aportar el depósito para satisfacer la demanda,
- comenzar a recargar el depósito cuando llegue la punta de demanda. Para esto será necesario desconectar dos de las bombas de la red para que trabajen enviando agua al depósito, así como aumentar el volumen del depósito.

En la búsqueda del punto de funcionamiento de la estación de bombeo de la primera opción se aumenta 1 m la altura del depósito. Las bombas trabajan durante las mismas horas que anteriormente, pero requerirán una mayor potencia.

El punto característico de las bombas que optimiza el depósito de 30 m de diámetro es el siguiente (archivo 8.3.3):

$$(Q, H) = (46.7 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

El principal inconveniente de esta opción es la necesidad de ampliar el volumen del depósito.

Ejecutando la segunda opción se amplían las horas de funcionamiento de 2 de las bombas, introduciendo las siguientes variaciones a las leyes de control que se establecieron anteriormente:

[CONTROLS]
LINK 25 OPEN AT CLOCKTIME 11 AM
LINK 26 OPEN AT CLOCKTIME 1 PM
LINK 25 CLOSED AT CLOCKTIME 4 PM
LINK 26 CLOSED AT CLOCKTIME 3 PM

De este modo se obtiene el archivo 8.3.4, en el que el punto óptimo de las bombas que optimiza el depósito es el siguiente:

$$(Q, H) = (41.65 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

Como se observa, las bombas estarán funcionando 7 horas más que según la opción anterior, y el caudal que tienen q suministrar es sólo un poco inferior.

En la tercera opción se propone instalar bombas diferentes:

- una de ellas, de menor potencia, que suministre caudal junto con el depósito en aquellos estados de carga mayores del 90%. (los estados de carga iguales o menores del 80% de la demanda total pueden satisfacerse únicamente con el depósito).
- más otras dos de mayor potencia, que trabajarán únicamente enviando volumen de agua al depósito durante la noche.

Por otra parte, también se proyecta ampliar la altura del depósito 1 m.

De modo que las leyes simples que se introducen en EPANET para determinar este régimen de funcionamiento son las siguientes:

[CONTROLS]

LINK 24 OPEN AT CLOCKTIME 8 AM
LINK 24 CLOSED AT CLOCKTIME 5 PM

LINK 25 CLOSED AT CLOCKTIME 8 AM
LINK 25 OPEN AT CLOCKTIME 4 PM
LINK 26 CLOSED AT CLOCKTIME 8 AM
LINK 26 OPEN AT CLOCKTIME 4 PM

Para determinar el punto de funcionamiento de la bomba 24 que tiene que satisfacer la punta de demanda junto con el depósito, se ha confeccionado el archivo 8.3.5, para calcular en periodo simple los parámetros mínimos que necesita la bomba, obteniéndose el siguiente punto característico:

$$(Q, H) = (30 \text{ l/s}, 35 \text{ m.c.a.})$$

La bomba 24 quedará definida de esta manera, mientras que las curvas características de las bombas 25 y 26 se determinarán rodando el programa en periodo extendido, para obtener el punto característico que optimiza el depósito de 6 m de altura.

Con las leyes simples y la bomba 24 establecidas se procede a rodar el programa en periodo extendido (archivo 8.3.6). De modo que el punto óptimo de las bombas 25 y 26 es:

$$(Q, H) = (49.3 \text{ l/s}, 45 \text{ m.c.a.})$$

De entre estas tres opciones se elige la segunda, por ser la única en la que no se requiere aumentar el volumen del depósito.

En el siguiente apartado se analizan las tres configuraciones estudiadas desde el punto de vista de la eficiencia energética y económica.

8.6. ANÁLISIS ENERGÉTICO Y ECONÓMICO DE LAS CONFIGURACIONES PROPUESTAS

A continuación se examinan los consumos de energía de cada una de las configuraciones planteadas en los apartados anteriores. En la tabla 8.5 se resumen las principales características de cada una:

<i>configuración</i>	<i>nº bombas</i>	<i>nº horas funcionamiento</i>	<i>pto característico</i>	<i>archivo</i>
1	2	bomba 24: 19 h bomba 25: 17 h	(55.8 l/s, 45 m.c.a.)	8.1.4.net
2	1	bomba 24: 20 h	(98.5 l/s, 45 m.c.a.)	8.2.5.net
3	3	bomba 24: 10 h bomba 25: 11 h bomba 26: 16 h	(30 l/s, 35 m.c.a.)	8.3.5.net
			(49.3 l/s, 45 m.c.a.)	

Tabla 8.5. Características de las distintas configuraciones de la estación de bombeo.

Acudiendo a catálogos comerciales, se sustituirán los puntos característicos por las curvas características correspondientes. Se buscarán aquellas bombas del catálogo que puedan suministrar los valores de caudal y altura requeridos.

Como se observará, es muy difícil encontrar la curva característica que contenga el punto de funcionamiento requerido, por lo que se elegirá la curva que quede inmediatamente por encima del punto de funcionamiento en cuestión, asegurando así que se suministrará el caudal necesario.

En la tabla 8.6 se resumen el tipo de bomba que requiere cada configuración, junto con tres puntos de la curva característica asociada. Estos datos se han obtenido de los gráficos 8.11, 8.12, 8.13 y 8.14.

<i>configuración</i>	<i>tipo de bomba</i>	<i>Ø rodete (mm)</i>	<i>Fig.</i>	<i>puntos de la curva</i>
1	125-40	395	8.12	(20 l/s, 54 m) (40 l/s, 52.5 m) (60 l/s, 48 m)
2	150-40	380	8.13	(80 l/s, 51.5 m) (100 l/s, 49 m) (120 l/s, 45 m)
3	100-32	329	8.14	(25 l/s, 37 m) (35 l/s, 35 m) (45 l/s, 30 m)
	125-40	380	8.13	(20 l/s, 54 m) (40 l/s, 52.5 m) (60 l/s, 48 m)

Tabla 8.6. Características de las distintas bombas.

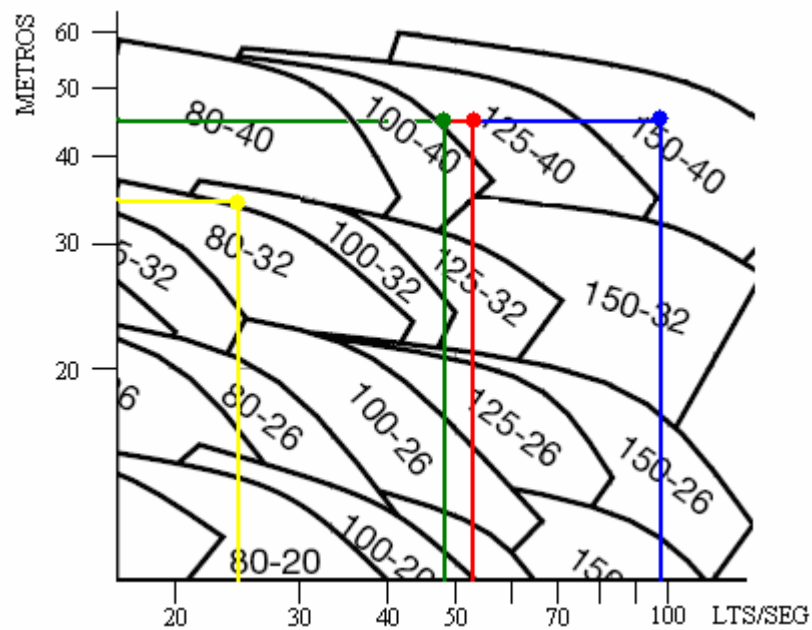


Fig.8.11. Selección bombas.

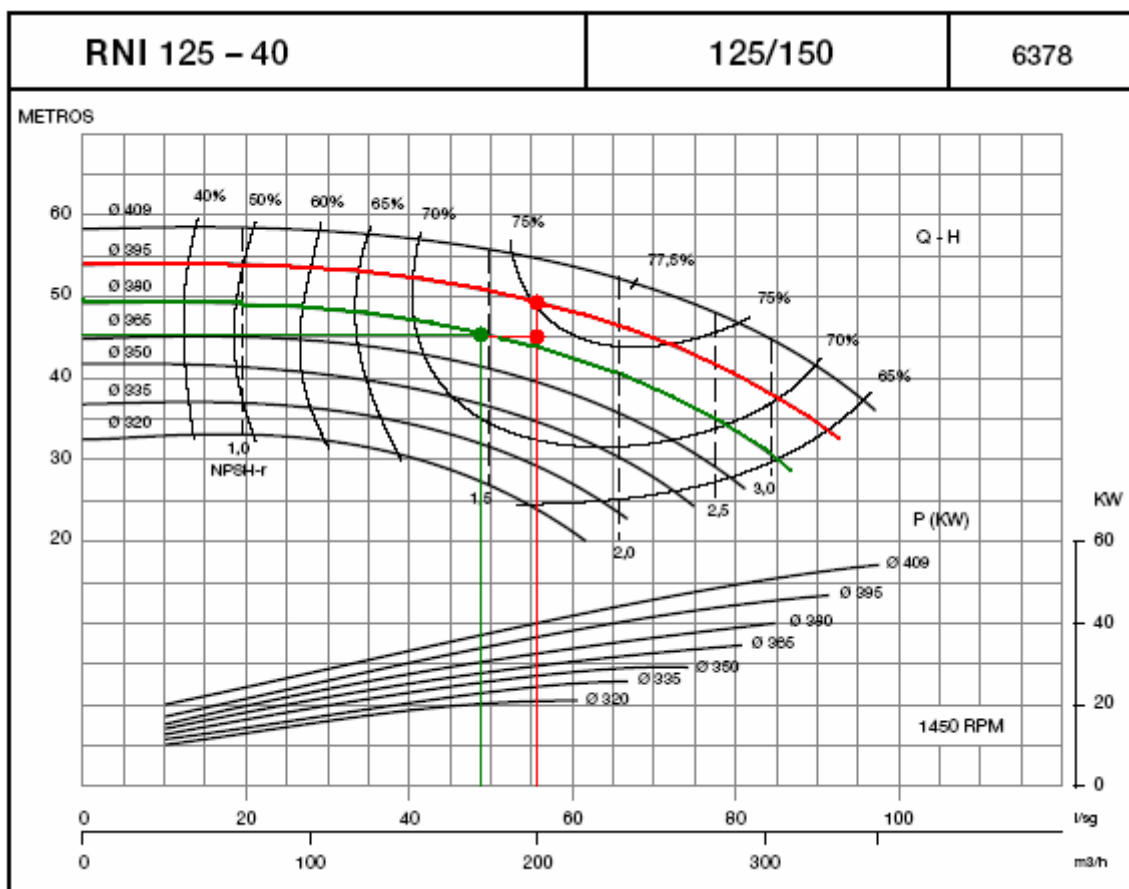


Fig. 8.12. Curvas características bombas de configuraciones 1 y 3.

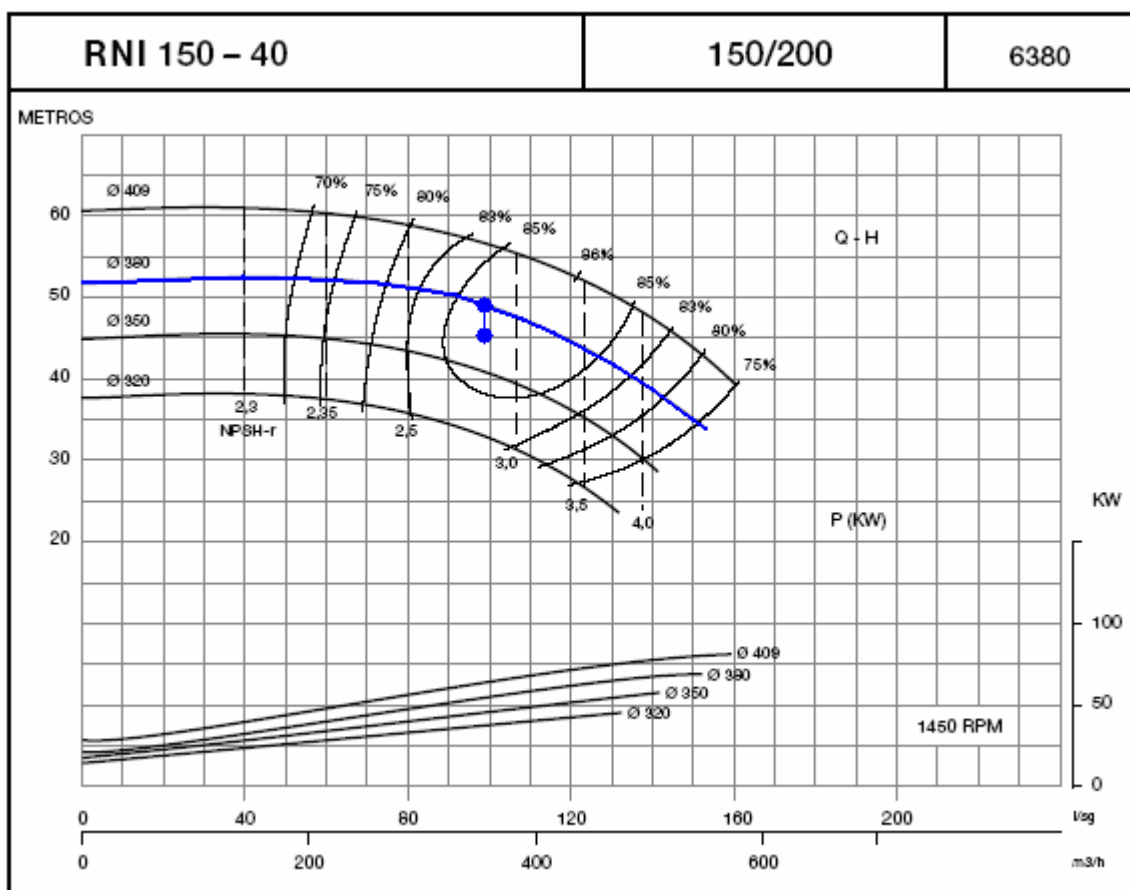


Fig. 8.13. Curva característica bomba de configuración 2.

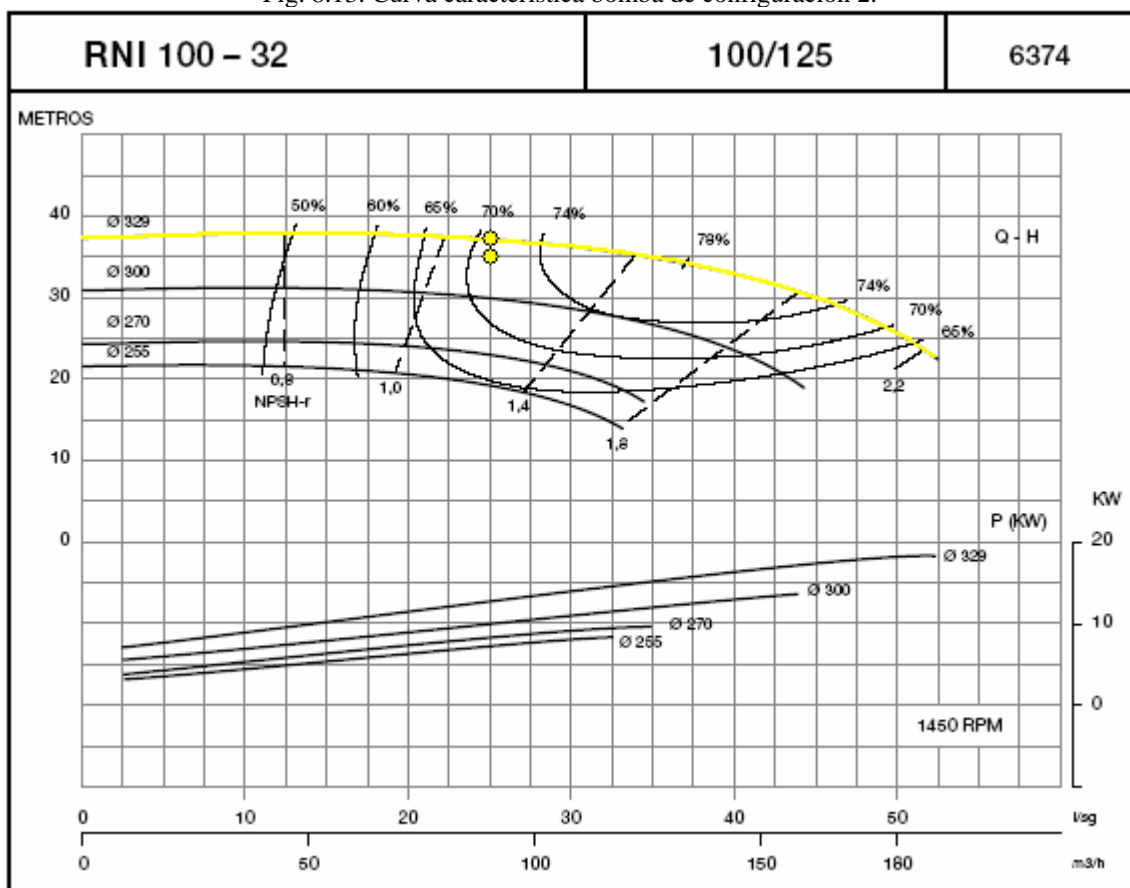


Fig. 8.14. Curva característica bomba de configuración 3.

8.7. CÁLCULO CONSUMO ENERGÉTICO Y ECONÓMICO

Para que EPANET calcule el consumo de energía en cada simulación, se le va a asignar a cada bomba una curva que especifica el rendimiento (en tanto por cien) en función del caudal de paso. Esta curva se define a partir de los gráficos anteriores que contienen dicha información. Son las siguientes:

Q (l/s)	rendimiento (%)
125-40	395 mm
20	50
30	62
40	69,5
50	73,5
60	76,25
80	75
90	70
150-40	380 mm
60	75
70	77,5
80	82
90	84,5
100	85,5
110	86
120	85,5
130	84
140	81,5
125-40	380 mm
20	51
30	62,5
40	69,5
50	73
60	73
80	70
100-32	329 mm
20	63
30	75
40	76,5
50	70

Tabla 8.7. Datos rendimiento.

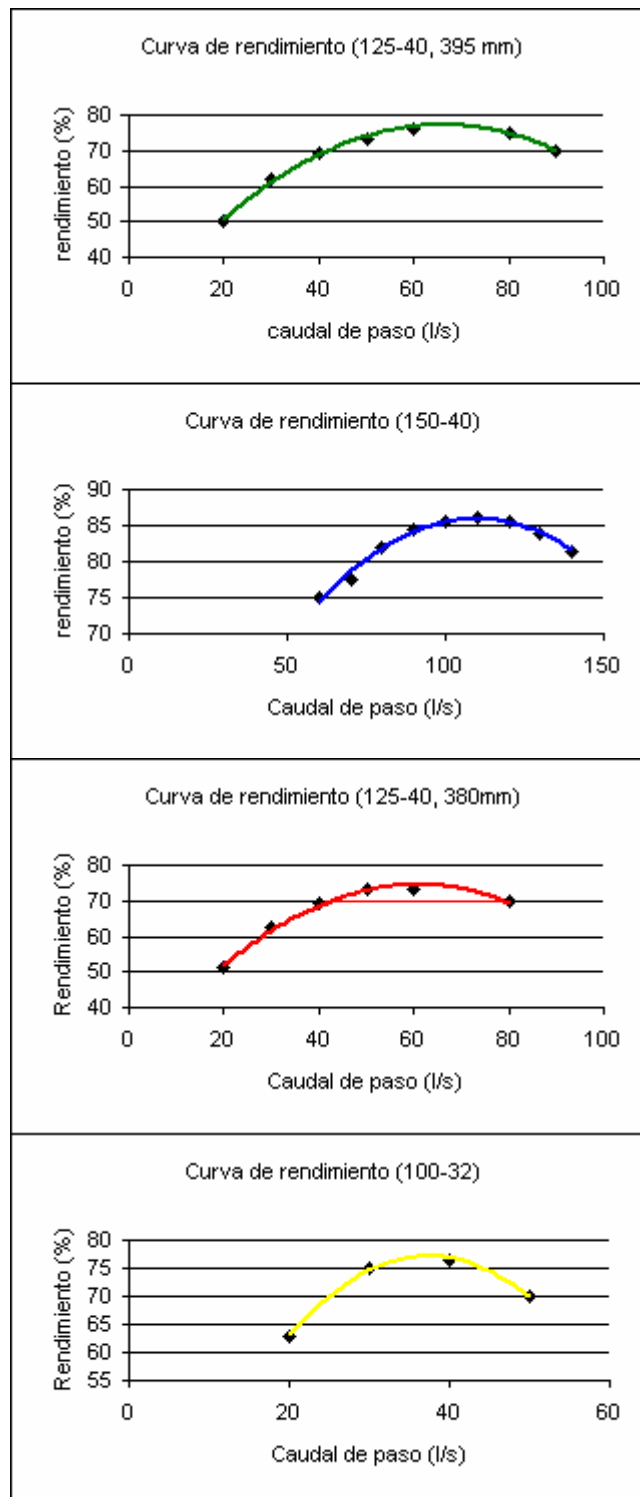


Fig. 8.15. Curvas de rendimiento.

Junto con las curvas de eficiencia se puede introducir, modificando las propiedades de cada bomba en el editor de propiedades, el precio del KWh, pudiendo especificar, incluso, las variaciones de este valor. Asumiendo que el precio de 1 KWh es de 8.9 cént.€, y que durante la noche, de 23h a 7h, disminuye su valor en un 30%, los consumos energéticos y económicos diarios de cada configuración son los siguientes:

<i>Configuración 1:</i>						
<i>Energy Report</i>						
	<i>Percent</i>	<i>Average</i>	<i>Kw-hr</i>	<i>Average</i>	<i>Peak</i>	<i>Cost</i>
<i>Pump</i>	<i>Utilization</i>	<i>Efficiency</i>	<i>/m3</i>	<i>Kwatts</i>	<i>Kwatts</i>	<i>/day</i>
24	75.00	72.19	0.19	30.55	36.06	37.01
25	62.50	71.39	0.20	29.46	36.06	27.41
					TotalCost	64.42
<i>Configuración 2:</i>						
<i>Energy Report</i>						
	<i>Percent</i>	<i>Average</i>	<i>Kw-hr</i>	<i>Average</i>	<i>Peak</i>	<i>Cost</i>
<i>Pump</i>	<i>Utilization</i>	<i>Efficiency</i>	<i>/m3</i>	<i>Kwatts</i>	<i>Kwatts</i>	<i>/day</i>
24	79.17	84.34	0.16	49.14	56.41	63.60
					TotalCost	63.60
<i>Configuración 3:</i>						
<i>Energy Report</i>						
	<i>Percent</i>	<i>Average</i>	<i>Kw-hr</i>	<i>Average</i>	<i>Peak</i>	<i>Cost</i>
<i>Pump</i>	<i>Utilization</i>	<i>Efficiency</i>	<i>/m3</i>	<i>Kwatts</i>	<i>Kwatts</i>	<i>/day</i>
24	42.26	65.91	0.17	12.95	13.35	11.17
25	66.67	72.33	0.17	29.70	30.00	29.18
26	66.67	72.33	0.17	29.70	30.00	29.18
					TotalCost	69.54

Tabla 8.8. Resumen consumo energético y económico.

Ante los resultados obtenidos, se opta por instalar la configuración 2, ya que es la que consume menos energía al día. Esto era de esperar, pues, como se observó en la tabla 8.5, es la configuración en la que menos horas de bombeo se necesita, no compensando la menor potencia que requieren las bombas del resto de configuraciones.

CAPÍTULO 9. DIMENSIONAMIENTO DE REDES REALES DE REGADIO EN PERIODO EXTENDIDO

En el presente capítulo se desarrolla la aplicación de EPANET a dos redes reales de regadíos, concretamente a las redes que abastecen los sectores I-A y I-B de las Vegas Bajas del Guadalquivir, representadas en las figuras 9.1 y 9.2 respectivamente.

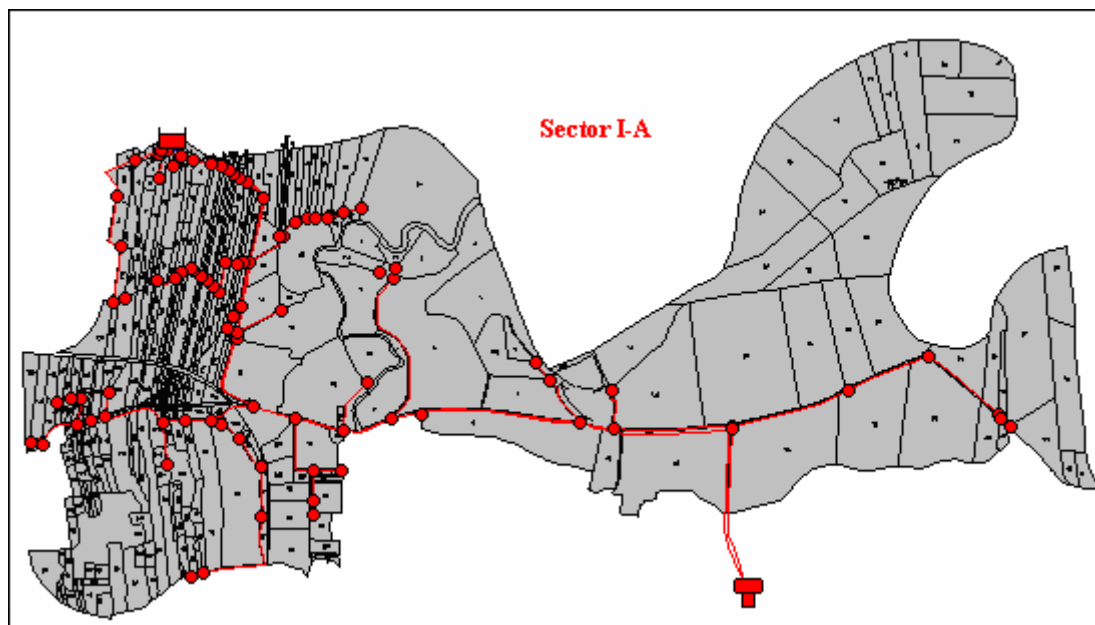


Fig. 9.1. Red de regadío del sector I-A.

A partir de las dotaciones necesarias para cada parcela calculadas en el estudio hídrico llevado a cabo por INITEC (2003), se van a dimensionar las estaciones de bombeo, así como las balsas y tuberías de impulsión, que satisfagan las exigencias mínimas necesarias.

9.1. PLANTEAMIENTO

Ambas redes se han proyectado con el objetivo de que el abastecimiento sea independiente de la estación de bombeo durante un número de horas determinado, para que, en caso de que se produzca una parada de la estación de bombeo, el suministro de caudal no se suspenda inmediatamente. Para conseguirlo, la balsa tiene un volumen de reserva, al que no se recurrirá excepto en caso de parada de los equipos. Debido a esta especificación, se pueden definir dos volúmenes en la balsa; por un lado este volumen de reserva, destinado a situaciones excepcionales; por otro lado se hablará del volumen mínimo del depósito, o volumen de regulación, como aquél que varía diariamente en el depósito, aumentando el nivel cuando el bombeo está en marcha y los consumos de la red son mínimos y disminuyendo en caso contrario.

Se calculará un volumen de reserva en la balsa que le permita aportar caudal durante un número de horas determinado (entre 8 y 12 horas), de modo que permita realizar aquellas actuaciones sobre la estación de bombeo para las que se requiera

suspender su funcionamiento (limpieza, reparaciones...). De manera similar, se hallará el volumen de regulación, que permitirá a la balsa suministrar el caudal demandado entre 20 y 60 horas, según la alternativa propuesta.

La estación de bombeo está conectada únicamente con la balsa, suministrándole caudal para satisfacer la demanda. Solamente la balsa aporta el caudal necesario de manera ininterrumpida a todos los nudos de la red.

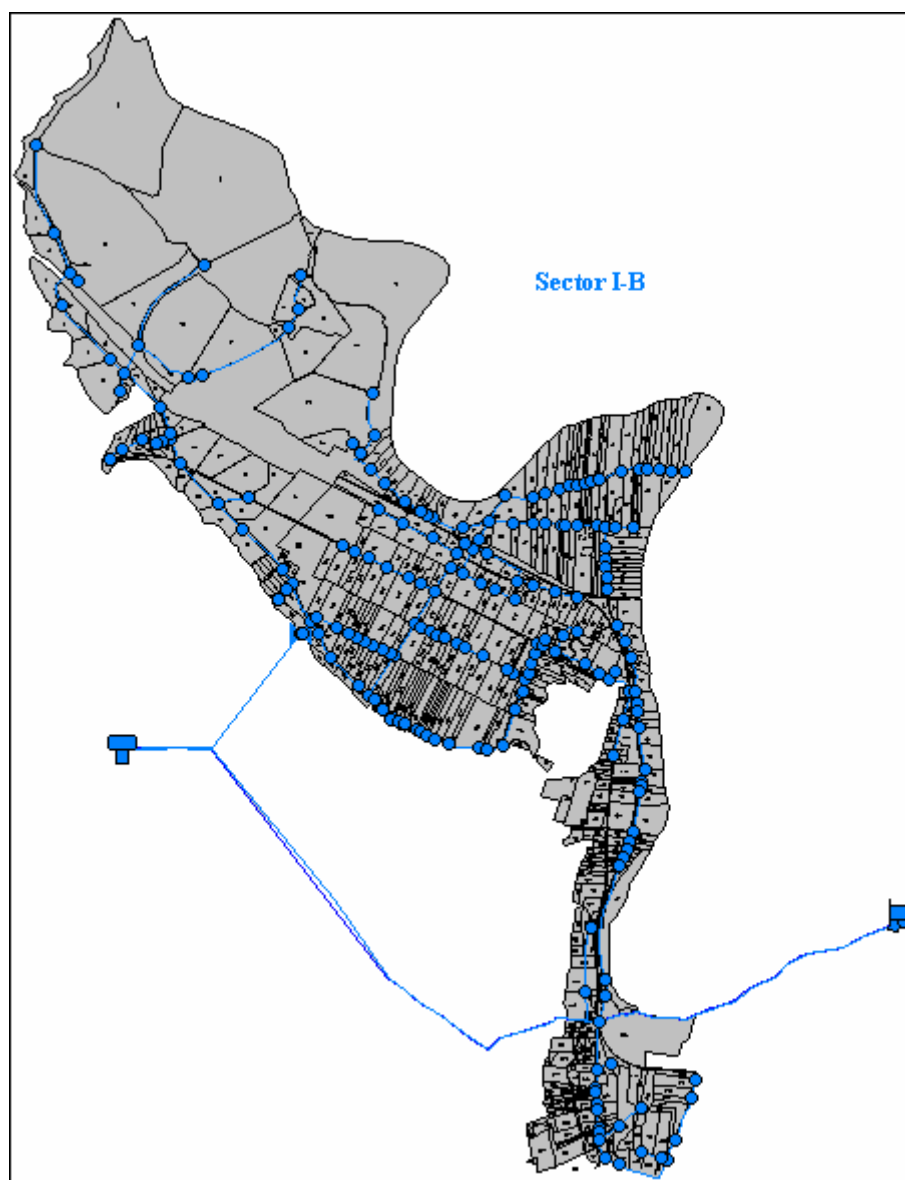


Fig. 9.2. Red de regadío del sector I-B.

La presión requerida en las bornas dependerá del tipo de regadío. En riegos por aspersión varía desde 15 a 30 m.c.a. (baja presión), 30 a 50 m.c.a. (media presión) y superior a 50 m.c.a. (alta presión). En las parcelas en las que se haya implantado riego por goteo se necesitarán bajas presiones, de entre 10 y 20 m.c.a. En cada tobera se aplicarán las medidas puntuales necesarias para adecuar las presiones a estos valores necesarios.

Para la conducción de impulsión se establece un periodo de amortización de 30 años. Los costes de la tubería se aumentarán en un 20% en concepto de puesta en obra,

que engloba movimiento de tierras, valvulería y accesorios. La anualidad obtenida de estos costes será necesario aumentarla en un 1% del valor de la tubería, en representación del mantenimiento anual necesario.

Para calcular la anualidad de la balsa se considerará un periodo de amortización de 30 años. Los gastos anuales de mantenimiento se establecen en un 3% del coste total de la balsa.

Los equipos de bombeo tienen una vida útil de 15 años y un coste de mantenimiento anual del 3% del coste de instalación. Para que la red continúe en funcionamiento tras estos 15 años, se requerirá al menos una sustitución de los equipos de bombeo.

Al Kwh se le asigna un valor de 0.0714€

La tasa de actualización es del 4%.

El objetivo es dimensionar la estación de bombeo de ambos sectores, así como el volumen de la balsa y el diámetro de la tubería de impulsión, para lo cual se dispone de los datos presentes en la tabla 9.1.

	<i>Sector I-A</i>	<i>Sector I-B</i>
<i>Superficie (Ha)</i>	467	696
<i>Cota balsa (m)</i>	314	344
<i>Cota embalse (m)</i>	236	236
<i>Dif. Altura (m)</i>	78	108
<i>Consumo_{total} (l/s)</i>	519.51	748.05
<i>Consumo_{total} (m³/h)</i>	1870.24	2692.98
<i>Consumo_{total} (m³/día)</i>	44885.7	64631.52
<i>Demanda (horas/día)</i>	20	20
<i>Longitud Impulsión (m)</i>	5050.72	5221.8

Tabla 9.1. Datos iniciales de cada sector.

9.2. ADECUACIÓN DE LA RED

En primer lugar es necesario modificar las características actuales de la red, para que las presiones en los nudos y las velocidades por las líneas sean las adecuadas. Se procurará que las presiones se encuentren entre 20 y 60 m.c.a., y las velocidades de las tuberías entre 0.5 y 2 m/s

En los archivos respectivos de EPANET será suficiente con que el depósito tenga un nivel inicial suficiente para abastecer a la red de manera instantánea, ya que la simulación tendrá lugar en periodo simple. Las características de la estación de bombeo, así como de la tubería de impulsión son irrelevantes por el momento.

9.2.1. Sector I-A

Los resultados que ofrece el archivo 9.A.1.net están contenidos en el documento de Excel “Adecuación de las redes”, en la hoja de cálculo “Seccion I-A”. El resumen de estos resultados se encuentra en la tabla 9.2:

Pres. máx	65.72 m.c.a.	nudo 28	Vel máx	2.86 m/s	línea 70
Pres mín	22.74 m.c.a.	nudo 43b	Vel mín	0.57 m/s	línea 44c
Pres media	52.10 m.c.a.		Vel media	1.23 m/s	

Tabla 9.2. Valores extremos de presión y velocidad en el Sector I-A.

En vista de los resultados obtenidos, se plantea únicamente la necesidad de aumentar el diámetro de la tubería 70 a 80 mm, aceptándose el resto de datos por estar dentro de los rangos recomendables. Esta modificación se introduce en el archivo 9.A.2.net, observándose que la nueva velocidad para la tubería 70 es de 1.35 m/s. Al tratarse de un ramal secundario, no introduce modificaciones en el resto de variables de la red, obteniéndose los siguientes valores máximos y mínimos:

Pres. máx	65.72 m.c.a.	nudo 28	Vel máx	1.88 m/s	línea 73
Pres mín	22.74 m.c.a.	nudo 43b	Vel mín	0.57 m/s	línea 44c
Pres media	52.11 m.c.a.		Vel media	1.21 m/s	

Tabla 9.3. Valores extremos de presión y velocidad en el Sector I-A con modificaciones.

Como se observa en la figura 9.3, los nudos de mayores presiones corresponden a los ramales principales, por lo que no es recomendable reducir sus presiones, ya que se disminuirían las presiones por toda la red.

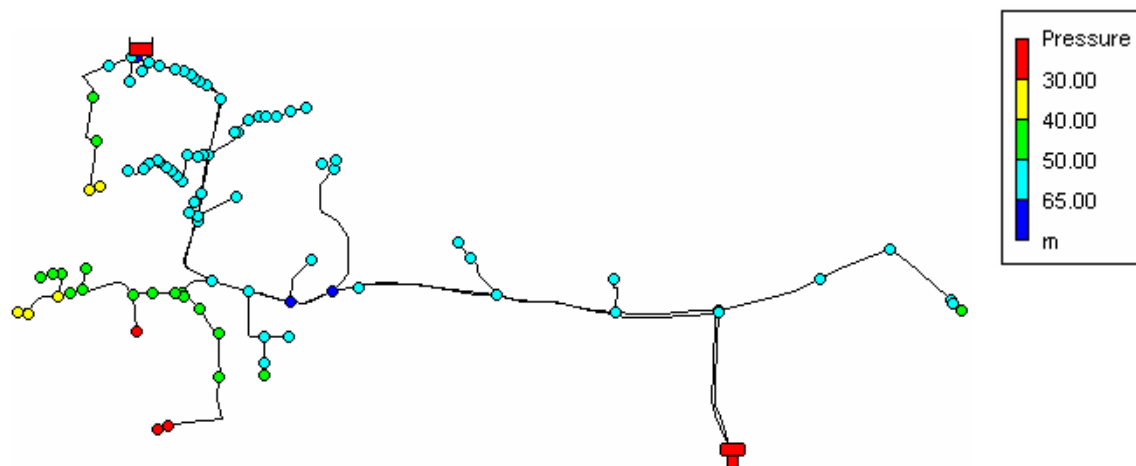


Fig. 9.3. Presiones (m.c.a.) en el sector I-A.

9.2.2. Sector I-B

Del mismo modo que anteriormente se obtiene la siguiente tabla resumen de los resultados obtenidos al rodar el archivo 9.B.1.net:

Pres _{máx}	75.74 m.c.a.	nudo 85	Vel _{máx}	2.13 m/s	línea 30
Pres _{mín}	25.53 m.c.a.	nudo 167	Vel _{mín}	0.25 m/s	línea 133
Pres _{media}	54.51 m.c.a.		Vel _{media}	1.35 m/s	

Tabla 9.4. Valores extremos de presión y velocidad en Sector I-B.

Como se observa en la figura 9.4, las máximas presiones, superiores a 65 m.c.a., corresponden a un pequeño sector, aguas arriba y aguas abajo del punto 85. Para reducir estas presiones se introduce una válvula de rotura de carga, con un valor de consigna de 10 m.c.a. en el nudo E12. Rodando el archivo 9.B.2.net en el que se ha introducido esta modificación se observa que sólo el nudo 85 supera los 65 m.c.a. (figura 9.5), con un valor de 65.74 m.c.a.

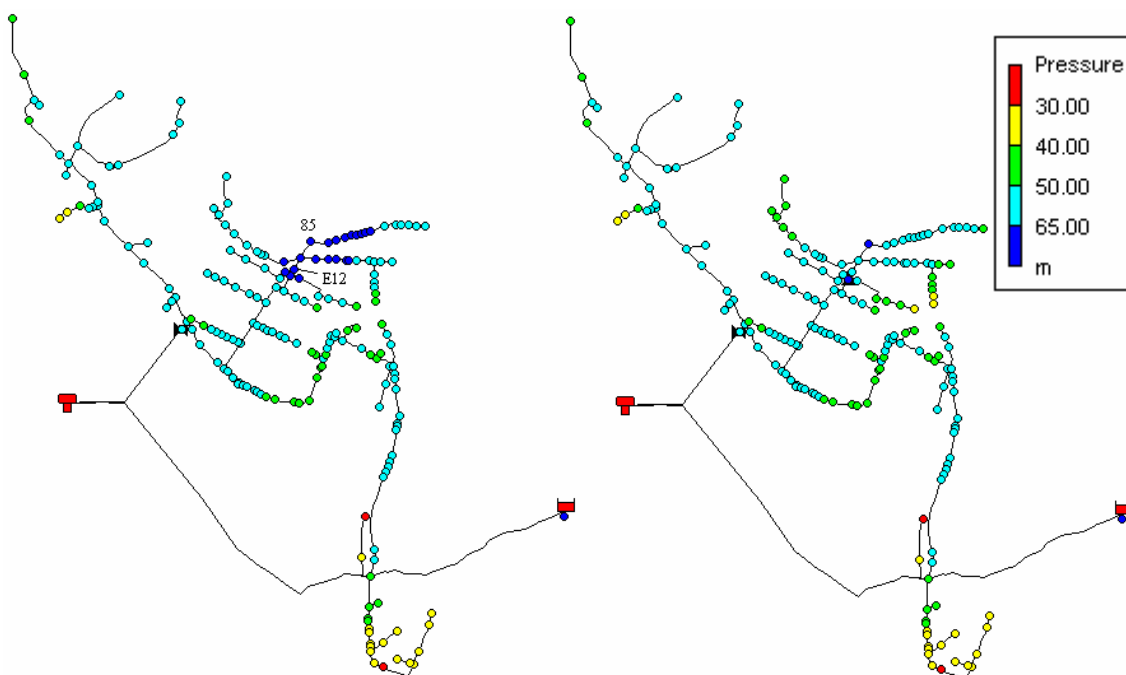


Fig. 9.4. Presiones (m.c.a.) en sector I-B.

Fig.9.5. Presiones (m.c.a.) en sector I-B con válvula de rotura de carga.

En el mismo archivo 9.B.2.net, se ha aumentado el diámetro de la tubería 30 a 369 mm, circulando entonces el agua a una velocidad de 1.32 m/s. Con el objetivo de aumentar la velocidad de la tubería 133, se ha reducido su diámetro a 30 mm, aumentando su velocidad a 0.83 m/s. El resumen de los resultados obtenidos del archivo 9.B.2.net está contenido en la siguiente tabla:

Pres _{máx}	65.74 m.c.a.	nudo 85	Vel _{máx}	1.97 m/s	línea 16
Pres _{mín}	25.53 m.c.a.	nudo 167	Vel _{mín}	0.53 m/s	línea 77
Pres _{media}	51.56 m.c.a.		Vel _{media}	1.35 m/s	

Tabla 9.5. Valores extremos de presión y velocidad en Sector I-B con modificaciones.

9.3. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS

A continuación se plantean diferentes regímenes de explotación en términos generales, de manera que puedan concretarse para cada uno de los sectores más adelante:

9.3.1. Bombeo en 20 horas para satisfacer la demanda de un día

En esta primera alternativa se supone que la estación de bombeo trabaja durante las 20 horas de demanda, bombeando el caudal que la iguala.

En este caso no se define un volumen mínimo o de regulación en la balsa, ya que conforme entra caudal procedente de la estación de bombeo, sale de la balsa para satisfacer la demanda. El volumen necesario dependerá únicamente de la garantía que deba dar la instalación. Es decir, si falla el bombeo debido a problemas técnicos, la balsa podrá suministrar de manera autónoma la demanda durante un número de horas definido por el volumen de agua en reserva. Cuanta más capacidad de almacenamiento posea la balsa, mayor garantía conferirá al sistema (podrá suministrar el caudal demandado durante más horas), siendo los costes fijos por su construcción mayores.

9.3.2. Bombeo en 8 horas para satisfacer la demanda de un día

En esta alternativa se pone en marcha la estación de bombeo durante las 8 horas en las que se puede aplicar la tarifa reducida de electricidad. En este caso los caudales bombeados serán mayores que anteriormente, ya que en 8 horas se tiene que bombear hacia la balsa el volumen que antes se bombeaba en 24 horas.

En este caso sí es necesario que la balsa posea un volumen mínimo o de regulación, que será el suficiente para almacenar el volumen de agua que debe aportar la balsa durante las 16 horas diarias en las cuales no funciona el bombeo. Este volumen mínimo se verá incrementado con un volumen de reserva, que dependerá del número de horas durante las cuales se quiera garantizar el suministro.

9.3.3. Bombeo en 12 horas para satisfacer la demanda de tres días

En este caso los caudales serán mucho mayores que en las dos alternativas anteriores, puesto que el caudal demandado en tres días (equivalente a 60 horas de demanda), se bombea en 12 horas.

El volumen de regulación también será mucho mayor, el suficiente como para abastecer a la red durante las 60 horas repartidas en los tres días siguientes a la parada de los equipos.

9.4. MODELACIÓN Y ANÁLISIS EN CADA SECTOR

A continuación se presentan las simulaciones y análisis económicos llevados a cabo para cada sector, en las que se han definido los distintos parámetros que optimizan la red. Éstos son:

- el punto de funcionamiento de la estación de bombeo,
- el volumen de la balsa,
- el diámetro de la tubería de impulsión.

Para cada alternativa se evaluarán los costos económicos y energéticos, con cuyo análisis se decidirá la opción adecuada.

Para definir la presión del punto característico de la estación de bombeo, se introducirá una bomba ficticia, que inyecte a la red el caudal necesario, el cuál se calculará en cada apartado. Los valores de caudal y presión se afinarán posteriormente por tanteo sustituyendo la bomba ficticia por una con una curva característica asociada.

Los valores de caudal y presión del punto de funcionamiento serán aquellos se mantengan constante el volumen de la balsa en el bombeo ininterrumpido, de modo que no se consuma el volumen de reserva destinado a situaciones excepcionales. Para el caso de bombeo reducido a 8 y 12 horas, los valores óptimos de presión y temperatura serán aquellos que mantengan el nivel de la balsa entre los límites establecidos, llenándose y vaciándose completamente.

La energía que tiene que comunicar la bomba al fluido variará según el diámetro de la tubería de impulsión, es decir, según las pérdidas de energía que se produzcan.

El diámetro de la tubería de impulsión se definirá tras un estudio técnico y económico de la solución propuesta, que deberá realizarse para cada alternativa. Este análisis se realizará obteniendo en cada caso una gráfica como la de la figura 9.6, en la que intervienen los siguientes factores:

- el periodo de amortización de las instalaciones,
- coste de la potencia instalada (equipos de bombeo),
- coste de la tubería de impulsión,
- coste de la balsa,
- gastos anuales de mantenimiento,
- coste del consumo energético.

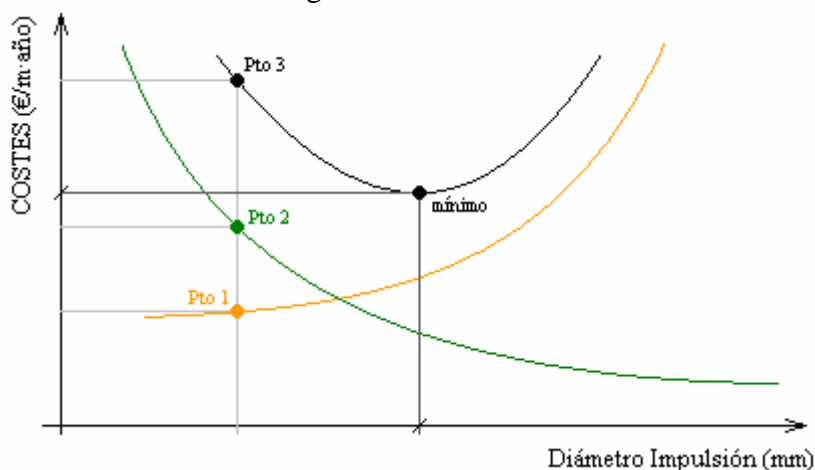


Fig. 9.6. Solución técnica y energética óptima.

Se rodará el programa hasta 8 veces para cada alternativa. De cada archivo (con diferentes valores de diámetros de tubería de impulsión y curvas características de bombeo que optimicen esos diámetros) se obtendrán 3 puntos de la gráfica, cada uno perteneciente a una función determinada y situados en la misma vertical, como se observa.

Los puntos pertenecientes a la función naranja corresponden al valor de la balsa y de la tubería de impulsión. Este valor se obtiene programando hojas de cálculo en cada caso. Sin embargo, el coste económico del consumo energético es un dato de salida de EPANET, si se introduce la eficiencia del bombeo, así como el precio de la energía y su curva de modulación. El coste económico del bombeo más los costes de instalación de los equipos conforman la función verde. Por último, la función negra representa la suma de las anteriores. El mínimo de dicha función constituye la solución óptima desde el punto de vista económico.

Estas funciones representan la inversión total. Para su obtención se necesita calcular las anualidades de amortización de los costos fijos, es decir, de los equipos de bombeo, la tubería de impulsión y la balsa, así como el gasto anual de mantenimiento. Para simplificar los resultados, los cálculos se realizan por metro lineal de tubería y año, de la siguiente manera:

- se calcula la anualidad de amortización de la tubería mediante la expresión 9.1:

$$A = a \cdot C = \frac{C \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \quad (9.1)$$

donde,

A: anualidad de amortización

a: factor de anualidad

C: coste por metro lineal de tubería, incluyendo puesta en obra

r: tasa de actualización

t: periodo de amortización

- al valor obtenido de A se le añade el 1% del precio del metro lineal de tubería, el cual representa los costes de mantenimiento de la conducción,
- en el cálculo de la anualidad de la balsa se aplica la formula 9.1 de igual forma. A este valor calculado se le sumará un 3% de la inversión total de la balsa, en concepto de gastos anuales de mantenimiento,
- la suma de las anualidades de amortización de la conducción y la balsa, más sus gastos anuales de mantenimiento representan la función naranja,
- en el cálculo de la función verde interviene la anualidad de amortización del coste de los equipos de bombeo, es decir, de la potencia instalada por metro lineal de tubería, así como sus gastos anuales por mantenimiento, y el coste del consumo energético anual.

- para obtener la potencia por metro lineal de tubería que es necesario instalar en la estación de bombeo, se dividirá la potencia media calculada por EPANET entre la longitud total de las tuberías de impulsión,
- el precio del KW instalado tiene un valor de 720€ aproximadamente. Multiplicando este valor por la potencia por metro lineal de tubería obtenida en el apartado anterior, se obtienen los costes fijos de la estación de bombeo,
- para considerar el segundo equipo de bombeo que se instalará tras los primeros 15 años, será necesario actualizar su valor futuro mediante la siguiente formulación:

$$C = \frac{C_F}{(1+i)^n} \quad (9.2.)$$

donde,

C : coste actualizado

C_F : coste en el futuro

i : tasa de actualización

n : número de años

El valor actualizado del segundo equipo de bombeo se suma al primero, obteniendo la anualidad al aplicar la ecuación 9.1 sobre este valor total,

- a esta anualidad se le añadirán dos términos más para determinar la función verde. Por un lado el coste de mantenimiento, que se calculará como un 3% del precio de la potencia instalada por metro lineal de tubería. Por otra parte se sumarán los costes de consumo energético anual por metro lineal de tubería, obtenidos a partir del precio diario de consumo de energía que devuelve EPANET.

Las siguientes tablas contienen datos necesarios y comunes a ambos sectores. La tabla 9.6 contiene el precio del metro lineal de tubería en función del diámetro. Según las presiones a las que el equipo de bombeo inyecte el caudal, se seleccionará aquella tubería cuya presión nominal sea inmediatamente superior a la presión de inyección. Los valores de presión nominal están expresados en atmósferas de presión.

	<i>Diámetro (mm)</i>							
<i>PN (atm)</i>	<i>500</i>	<i>600</i>	<i>700</i>	<i>800</i>	<i>900</i>	<i>1000</i>	<i>1100</i>	<i>1200</i>
2,5	64	92	103	135	171	189	224	254
5	64	92	103	135	171	189	224	254
7,5	80	112	123	157	196	215	255	295
10	100	133	142	187	216	244	287	336
12,5	116	146	156	192	251	308	327	381
15	116	160	174	221	281	348	352	416
17,5	146	184	195	243	191	385	390	464
20	146	209	219	270	212	439	431	517
22,5	180	236	246	301	236	501	473	576
25	206	267	275	334	263	572	527	643

Tabla 9.6. Precio metro lineal de tubería (€/m lineal).

La tabla 9.7 contiene los diámetros correspondientes a los distintos volúmenes necesarios para las balsas, según el número de horas durante las cuales se quiera garantizar el suministro, así como sus costes. Estableciendo la altura de la balsa en 3 m, se obtienen los siguientes valores:

<i>Sector I-A</i>	<i>Altura =3</i>				
<i>garantía (nº horas)</i>	<i>volumen reserva (m³)</i>	<i>área de la base (m²)</i>	<i>diámetro equivalente (m)</i>	<i>Costes €</i>	<i>Costes €/m³· m lineal</i>
8	14961,92	4987,31	79,69	32351,72	6,41
20	37404,80	12468,27	126,00	50679,66	10,03
60	112214,40	37404,80	218,23	226267,21	44,80
<i>Sector I-B</i>	<i>Altura =3</i>				
<i>garantía (nº horas)</i>	<i>volumen reserva(m³)</i>	<i>área de la base (m²)</i>	<i>diámetro equivalente (m)</i>	<i>Costes €</i>	<i>Costes €/m³· m lineal</i>
8	21543,84	7181,28	95,62	36903,46	7,07
20	53859,60	17953,20	151,19	70430,09	13,49
60	161578,80	53859,60	261,87	607288,91	116,30

Tabla 9.7. Volúmenes y costes de las balsas en función de la explotación del sistema.

9.5. GENERACIÓN DE LOS ARCHIVOS DE EPANET

El principal factor que va a influir en la estabilidad de la red a largo plazo es el punto de funcionamiento de la estación de bombeo. Esta estabilidad se alcanzará cuando el depósito se llene y se vacíe completamente dentro de un ciclo de parada y arranque del equipo de bombeo.

Para conseguir este punto de funcionamiento óptimo se ha llevado a cabo el siguiente procedimiento para cada uno de los 7 archivos con los que se obtienen los datos para el análisis económico de las tres alternativas propuestas para ambas redes.

Se ha modificado únicamente la presión de inyección de la bomba, ya que el caudal bombeado que llega al depósito no puede variar, pues depende del consumo de la red. Este valor de caudal del punto de funcionamiento se ha calculado como el producto del caudal demandado por el número de horas que dura la demanda (volumen total demandado) dividido por el número de horas de funcionamiento de la estación de bombeo (caudal a bombear). Como se comprobará más adelante, ha de mantenerse constante durante toda la simulación.

El procedimiento se ha realizado de manera iterativa, por prueba y error, reduciendo y aumentando el valor de la presión según el comportamiento del depósito, lo que puede analizarse gráficamente.

A continuación se detalla el razonamiento y proceso llevado a cabo para un archivo, concretamente el 9.A.6.1000.net, que corresponde a la alternativa óptima seleccionada para el sector I-A. En este caso el volumen demandado en un día es $1870.24 \text{ (m}^3\text{/h)} \cdot 20 \text{ (horas)} = 37404.8 \text{ m}^3$. El número de horas de funcionamiento de la

estación definido para esta alternativa es de 8 horas, por lo que dividiendo el volumen anterior entre 8 para obtener el caudal a bombear (1299 l/s).

Rodando el programa en periodo simple, sustituyendo la estación de bombeo por una bomba ficticia que inyecte 1299 l/s, se obtiene una presión de 90.91m, valor que suele estar próximo al óptimo.

Para valores de presión inferiores al óptimo, por ejemplo 70m, se observa en la figura 9.7 que no se alcanza el nivel máximo en el depósito, por lo que tras 17 horas de simulación se llega al nivel mínimo interrumpiéndose el suministro.

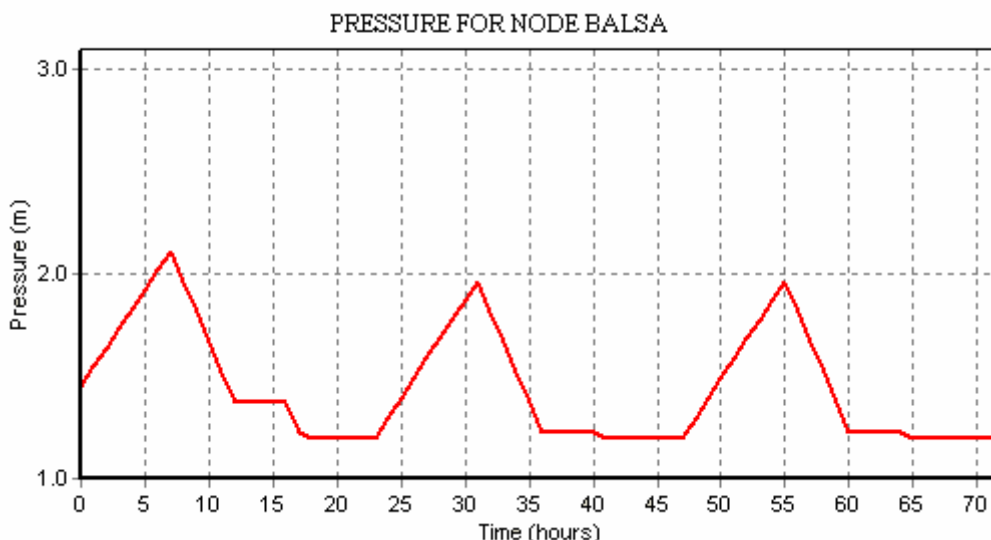


Fig. 9.7. Variación temporal del nivel (H=70m.c.a.)

Lo que ha sucedido es que el punto de funcionamiento real de la impulsión no ha sido (1299 l/s, 70 m.c.a.), sino que debido a que se necesita una presión mayor se ha desplazado el punto de funcionamiento de la curva característica del bombeo hacia la izquierda, lo que conlleva la inyección de un caudal menor.

De modo que para aumentar el caudal es necesario aumentar la presión del punto de funcionamiento, creando una nueva curva característica. Veamos lo que sucede si la estación de bombeo trabaja según la curva característica definida por un punto de funcionamiento con una presión mayor de la necesaria, de 110 m.c.a. En estos casos la red se desestabiliza, y EPANET nos avisa con mensajes de advertencia.

De este modo se va acercando la presión óptima, siendo en este caso de 88 m.c.a. La variación del nivel cuando el punto de funcionamiento de la bomba es (1299 l/s, 88 m.c.a) se representa en la figura 9.8:

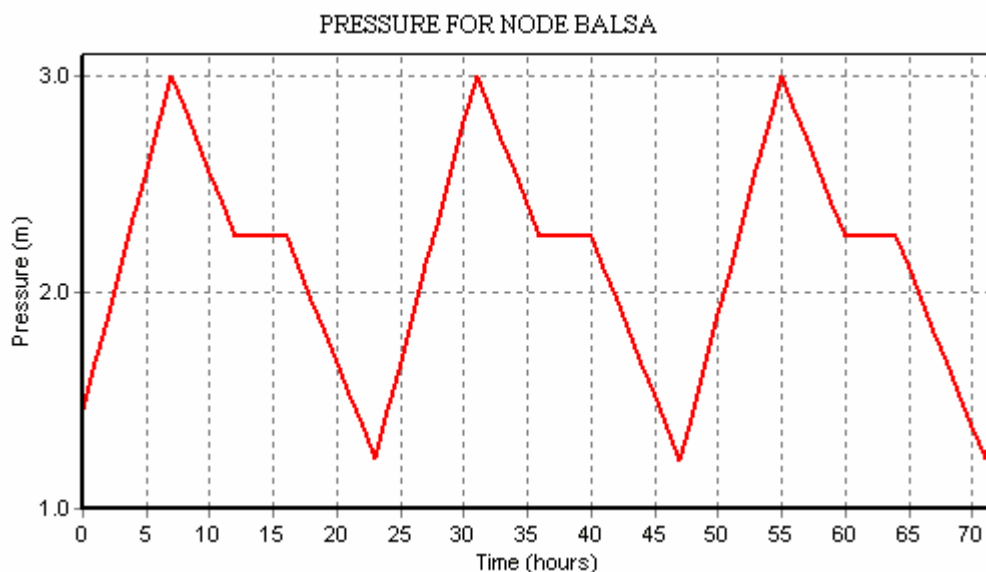


Fig. 9.8. Variación temporal del nivel (H=88m.c.a.)

Como se observa, el depósito se llena completamente, llegando al nivel máximo de tres metros, alcanzando el nivel mínimo de 1.2 m a las 11 p.m., cuando se reinicia el bombeo. Obsérvese que el depósito se llena y se vacía completamente hasta el nivel mínimo en 24 horas, comenzando siempre un nuevo día con el valor inicial de 1.45 m. Por otro lado, también se puede observar que, durante las 4 horas en las que no existe demanda, el nivel del depósito se mantiene constante, ya que ni entra ni sale caudal.

La obtención de esta presión es más rápida si, en vez de fijarnos en la variación del nivel de la balsa, atendemos al caudal que circula por la tubería. Si estos caudales son inferiores al de 1299 l/s, será necesario aumentar la presión del punto de funcionamiento, o viceversa en caso contrario. La figura 9.9 contiene los caudales circulantes por la tubería de impulsión. Como se observa, van disminuyendo suavemente conforme aumenta el nivel del depósito. Debido a este aumento necesario de la presión, el punto de funcionamiento se desplaza hacia la izquierda, lo que conlleva la inyección de caudales cada vez más pequeños. La media de los caudales bombeados durante 8 horas vale 1299 l/s:

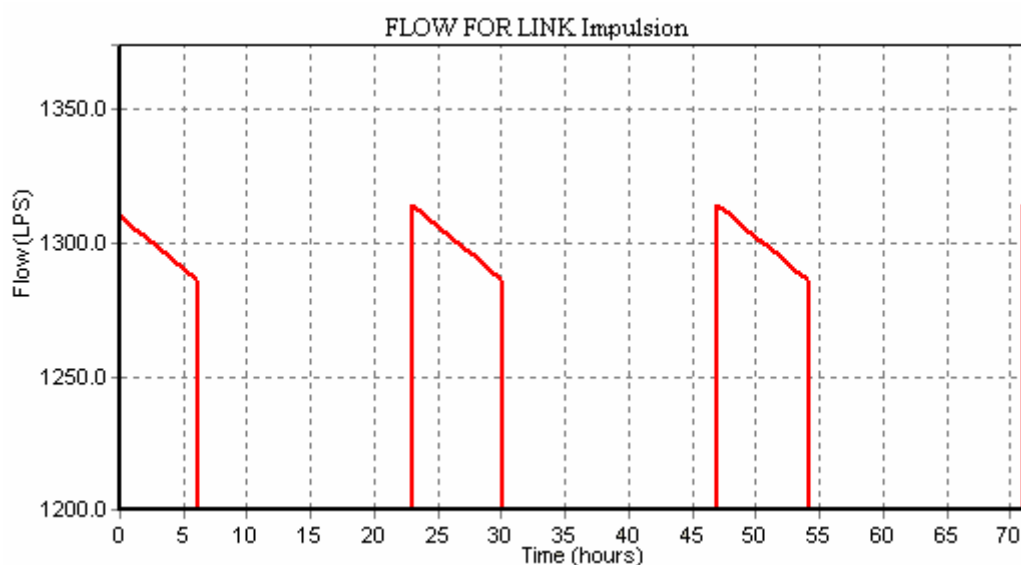


Fig. 9.9. Variación temporal del flujo en la impulsión.

Una vez que se ha encontrado el punto de funcionamiento óptimo pueden extraerse los datos de consumo de energía, necesarios en el estudio económico, así como la velocidad de la tubería de impulsión, necesaria para comprobar la red desde el punto de vista técnico.

9.5.1. Sector I-A.

9.5.1.1 Bombeo en 20 horas para abastecer la demanda de un día

Como base se dispondrá de los archivos 9.A.3.net y 9.A.4.net, los cuales se modificarán sucesivamente hasta hallar la solución idónea. El archivo 9.A.3.net calcula en periodo simple la presión a la que se debe inyectar el caudal de 512.51 l/s a la red (el caudal ha de ser igual al consumo de la red). Este valor se introduce en la curva característica de la bomba del archivo 9.A.4.net, para calcular el coste energético.

Los puntos de funcionamiento de la estación de bombeo, según los distintos diámetros son:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Caudal (l/s)</i>	<i>Altura (m.c.a.)</i>
500	519.51	123.10
600	519.51	98.14
700	519.51	88.97
800	519.51	85.07
900	519.51	83.24
1000	519.51	82.25
1100	519.51	81.75
1200	519.51	81.40

Tabla 9.8. Puntos de funcionamiento de la estación de bombeo.

Analizando los valores de las alturas que debe suministrar el equipo de bombeo se aprecia que conforme va aumentando el diámetro de tubería, las pérdidas son similares, hasta estabilizarse. Según la altura que deba ejercer la bomba se han elegido, de la tabla 9.6, las siguientes tuberías, en función de sus presiones nominales:

<i>Presión Nominal (atm)</i>	<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Precio (€)</i>
12.5/15	500	115.85
10	600	133.06
10	700	141.89
10	800	187.31
10	900	216.5
10	1000	244,3

10	1100	286.48
10	1200	335.58

Tabla 9.9. Precio de tuberías.

Con los datos presentes en la tabla 9.10 ya es posible calcular la función naranja, cuyos puntos corresponden a la suma de la amortización el mantenimiento de la conducción. A modo de ejemplo, se muestra el cálculo de la coordenada Y del primer punto, cuya coordenada X es 500 mm. La anualidad se calcula sobre el valor resultante de aumentar el coste de la tubería un 20%, en representación de la puesta en obra:

$$20\% \text{ de } 115.85 = 139.02 \quad r: 0.04$$

$$A = 139.02 \frac{0.04 (1 + 0.04)^{30}}{(1 + 0.04)^{30} - 1} = 139.02 \cdot 0.05783 = 8.04 \quad t: 30 \text{ años}$$

$$8.04 + 1\% \text{ de } 139.02 = 9.43 \text{ €/m}$$

Los costes de la balsa son invariables, por lo que se sumará al coste de tubería anterior, así como al resto de valores obtenidos con distintos diámetros, el siguiente valor:

$$A = \frac{6.41 \cdot 0.04 (1 + 0.04)^{30}}{(1 + 0.04)^{30} - 1} = 0.37$$

$$0.37 + 3\% \text{ de } 6.41 = 0.56 \text{ €/m} \rightarrow \text{Punto (500mm, 9.99 €/m·año)}$$

En la siguiente tabla se muestran los puntos de la función naranja:

Diámetro (mm)	costes €/m	Amortiz.+Mant. conducción	costes €/m	Amortiz.+Mant balsa	SUMA
500	139.02	9.43	6.41	0.56	9.99
600	159.67	10.83			11.39
700	170.27	11.55			12.11
800	224.77	15.25			15.81
900	259.80	17.62			18.18
1000	293.16	19.89			20.45
1100	343.78	23.32			23.88
1200	402.70	27.31			27.88

Tabla 9.10. Obtención función naranja.

El siguiente paso es calcular la función verde, para lo cual se necesita la información referida al consumo energético, que se muestra resumida en la tabla 9.11:

	Average Kwatts	Cost /day	Potencia (KW/m)
500	966.92	1295.14	0.191
600	770.88	1032.55	0.153
700	698.82	936.04	0.138
800	668.19	895.01	0.132
900	653.89	875.85	0.129
1000	646.05	865.35	0.128

1100	642.21	860.21	0.127
1200	639.37	856.4	0.127

Tabla 9.11. Resumen de los informes energéticos.

A continuación, a partir de los datos de la tabla 9.11, se desarrolla el proceso de cálculo de los puntos que constituyen la función verde.

En primer lugar se obtendrán los precios del equipo de bombeo a instalar. Se conoce la potencia a instalar por metro lineal de tubería, presente en la tabla 9.12, obtenida dividiendo la potencia media consumida (dato de salida de EPANET) por la longitud de la tubería. Multiplicando este valor por el precio del KW instalado, 720 €, se consigue el precio del equipo de bombeo.

Como ejemplo, el procedimiento concreto en para el punto de 500 mm es el siguiente:

$$\text{Potencia Media/m lineal: } \frac{966.78 \text{ (KW)}}{5050.72 \text{ (m conducción)}} = 0.191 \text{ KW / m}$$

$$\text{Coste Potencia Instalada/m lineal: } 0.191 \text{ (KW / m)} \cdot 720 \text{ (€/ KW)} = 137.82 \text{ €/m}$$

Para calcular el segundo equipo de bombeo necesario se actualiza su valor de la siguiente manera:

$$C = \frac{C_F}{(1+i)^n} = \frac{137.82}{(1+0.04)^{15}} = 76.54 \text{ €/m}$$

De manera que se obtienen los siguientes valores para el resto de diámetros:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Potencia (KW/m)</i>	<i>Pot.Instalada 1º (€/m)</i>	<i>Pot.Instalada 2º (€/m)</i>
500	0.191	137.82	76,537
600	0.152	109.86	61,019
700	0.138	99.62	55,315
800	0.132	95.26	52,891
900	0.129	93.17	51,759
1000	0.128	92.10	51,138
1100	0.127	92.10	50,834
1200	0.126	91.15	50,609

Tabla 9.12. Potencia de los equipos de bombeo a instalar.

La anualidad se calcula sobre la suma de los costes del 1º y 2º equipo, para un periodo de amortización de 30 años. Para el punto de diámetro igual a 500 mm se han realizado los siguientes cálculos:

$$A = (137.82 + 76.54) \cdot \frac{0.04 (1+0.04)^{30}}{(1+0.04)^{30} - 1} = 214.38 \cdot 0.05783 = 12.40 \text{ €/m}$$

De modo que se obtiene la tabla 9.13, en la que se complementa la información con el coste de mantenimiento, calculado como el 3% del precio de la potencia instalada, siguiendo el siguiente procedimiento para el punto de diámetro 500 mm:

Mantenimiento anual : 3% de 137.81 (€/m) = 4.134 €/m

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Pot.Instalada (€/m)</i>	<i>a</i>	<i>Amortización (€/m·año)</i>	<i>Mantenimiento (€/m·año)</i>
500	214,375	0.05783	12.396	4.134
600	170,911		9.881	3.296
700	154,935		8.960	2.989
800	148,144		8.568	2.858
900	144,973		8.380	2.795
1000	143,235		8.283	2.763
1100	142,384		8.229	2.745
1200	141,754		8.198	2.734

Tabla 9.13. Precio de los equipos de bombeo a instalar.

Ya se han calculado dos de los términos correspondientes a la función verde: la anualidad de amortización del coste del equipo de bombeo instalado, así como sus costes anuales de mantenimiento.

El último término de la función representa el precio del consumo energético de la estación de bombeo en un año. Gracias a que EPANET calcula el coste de energía consumida en un día (información presente en la tabla 9.12), sólo será necesario multiplicar este valor por el número de días de un año, y dividirlo por la longitud de la tubería, para obtener el precio unitario. Concretamente, para el punto de diámetro de 500 mm:

$$\text{Coste Bombeo: } 1295.14 \text{ (€/ día)} \cdot \frac{365 \text{ (días)}}{5050.72 \text{ (m)}} = 93.596 \text{ €/ m}$$

De este modo se obtienen los resultados presentes en la tabla 9.14:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Coste Bombeo (€/m·año)</i>
500	93.596
600	74.619
700	67.645
800	64.680
900	63.295
1000	62.536
1100	62.165
1200	61.889

Tabla 9.14. Precio de la energía necesaria para el bombeo.

Llegados a este punto ya es posible conseguir la representación gráfica del análisis económico. Los puntos que constituyen la función verde están presentes en la tabla 9.15, obtenidos sumando la anualidad de amortización del equipo de bombeo, el coste de su mantenimiento anual y el coste de la energía consumida en un año:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Amortización (€/m)</i>	<i>Mantenimiento (€/m)</i>	<i>Coste unitario</i>	<i>SUMA (puntos verdes)</i>
500	12.396	4.135	93.596	110.13
600	9.881	3.296	74.619	87.80
700	8.960	2.989	67.645	79.59
800	8.568	2.858	64.680	76.10
900	8.380	2.795	63.295	74.48
1000	8.283	2.763	62.536	73.58
1100	8.229	2.745	62.165	73.15
1200	8.198	2.734	61.889	72.82

Tabla 9.15. Obtención función verde.

Como cuadro resumen se presenta la tabla 9.16, que contiene los puntos a introducir en el gráfico. La última columna de la tabla contiene la suma de las 2 funciones ya calculadas, cuyo mínimo indica la elección óptima desde el punto de vista técnico y económico.

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Función verde</i>	<i>Función naranja</i>	<i>Función negra</i>
500	110.13	9.99	120.12
600	87.80	11.39	99.19
700	79.59	12.11	91.71
800	76.10	15.81	91.91
900	74.48	18.18	92.66
1000	73.58	20.45	94.03
1100	73.15	23.88	97.03
1200	72.82	27.88	100.70

Tabla 9.16. Datos para el análisis gráfico.

Gráficamente:

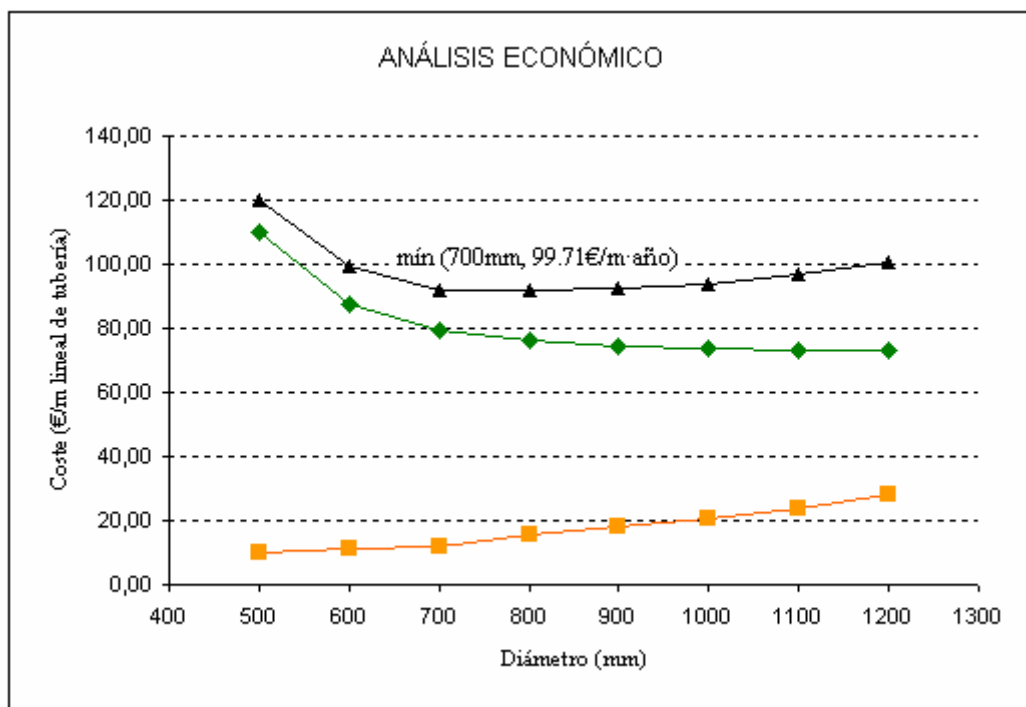


Fig.9.10. Análisis gráfico.

De este modo se opta por la siguiente solución:

<i>Diámetro</i>	700 mm
<i>Punto de funcionamiento</i>	(519.51 l/s, 88.97 m.c.a.)
<i>Volumen de la balsa</i>	14961.92 m ³
<i>Coste total</i>	99.71 €/m = 503607.29 €
<i>Coste por Ha</i>	1078.39 €/Ha al año

El desarrollo de los análisis económicos que se realizan a continuación se encuentran en el archivo de *Excel* llamado “Análisis económico Sector I-A” y “Análisis económico Sector I-B”.

9.5.1.2 Bombeo en 8 horas para abastecer la demanda de un día

Para este caso, el archivo en periodo simple es el 9.A.5.net, en el que la bomba ficticia tiene que introducir en la red un caudal igual a $1870.24 \text{ (m}^3\text{/h)} \cdot 20 \text{ (horas)} / 8 \text{ (horas)} = 1.2987 \text{ m}^3\text{/s} = 1299 \text{ l/s}$.

El depósito tendrá un diámetro de 126 m, que podrá albergar hasta 37404.98 m³ (información contenida en la tabla 9.7). Parte de este volumen (14961.9 m³) quedará almacenado para poder suministrar la demanda durante 8 horas, en caso de que cese accidentalmente el bombeo. El resto se destinará a satisfacer la demanda durante las siguientes 8 horas a la parada automática de la estación de bombeo, vaciándose completamente antes de que entren nuevamente en funcionamiento los equipos.

Modificando en el archivo 9.A.6.net. según los distintos diámetros se obtienen los siguientes puntos de funcionamiento para la estación de bombeo:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Caudal (l/s)</i>	<i>Altura (m.c.a.)</i>
600	1299	177
700	1299	126
800	1299	104
900	1299	94
1000	1299	88
1100	1299	85
1200	1299	83.5

Tabla 9.17. Puntos de funcionamiento de la estación de bombeo.

Siguiendo el mismo proceso que en la alternativa anterior, se obtienen las siguientes funciones, cuyas representaciones gráficas se encuentran en la figura 9.11:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>SUMA (func.naranja)</i>	<i>SUMA (func.verde)</i>	<i>SUMA TOTAL</i>
600	17.89	139.53	157.43
700	16.75	99.08	115.83
800	16.51	81.77	98.28
900	18.46	73.66	92.12
1000	20.74	69.34	90.08

1100	24.20	67.01	91.21
1200	28.20	65.67	93.86

Tabla 9.18. Datos para el análisis gráfico.

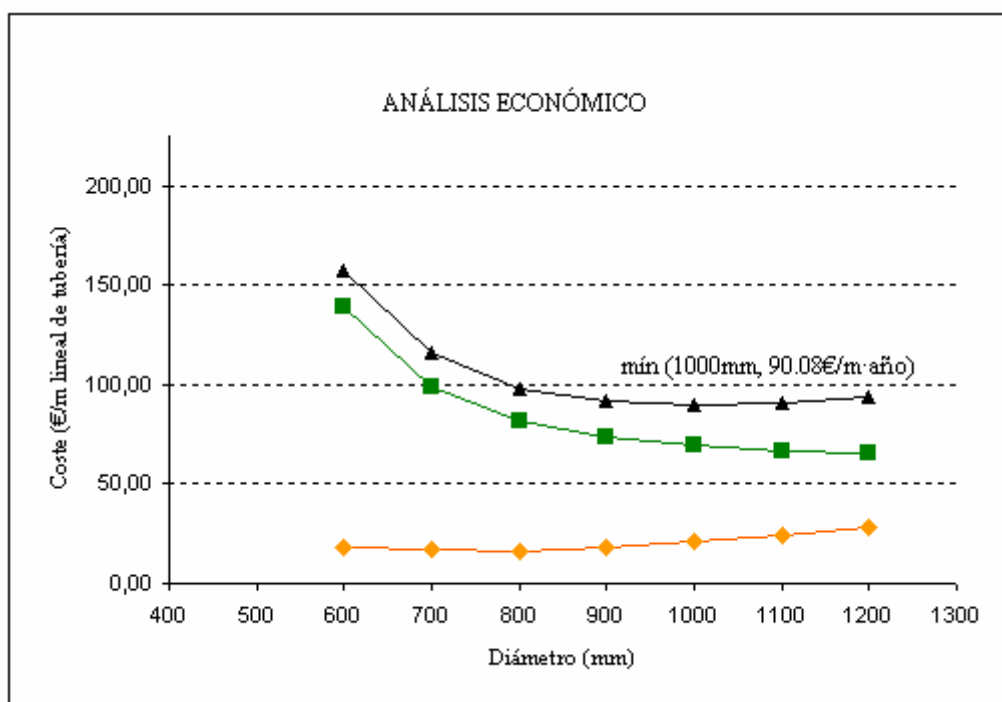


Fig. 9.11. Análisis gráfico.

En vista de estos valores se opta por la siguiente solución:

<i>Diámetro</i>	1000 mm (PN 10)
<i>Punto de funcionamiento</i>	(1299 l/s, 88 m.c.a.)
<i>Volumen de la balsa</i>	37404.80 m ³
<i>Coste total</i>	90.08 €/m = 454968.85 €
<i>Coste por Ha</i>	970.08 €/Ha al año

9.5.1.3 Bombeo en 12 horas para abastecer la demanda de tres días

En este caso la bomba ficticia tiene que introducir en la red un caudal igual a $1870.24 \text{ (m}^3\text{/h)} \cdot 60 \text{ (horas)} / 12 \text{ (horas)} = 9351.2 \text{ m}^3\text{/h} = 2597.55 \text{ l/s}$.

El depósito tendrá un diámetro de 219 m, que podrá albergar hasta 53859.6 m³ (información contenida en la tabla 9.7). Parte de este volumen (22442.88 m³) quedará almacenado para poder suministrar la demanda durante 12 horas, en caso de que cese accidentalmente el bombeo. El resto se destinará a satisfacer la demanda durante los siguientes tres días a la parada automática de la estación de bombeo, vaciándose completamente antes de que entren nuevamente en funcionamiento los equipos.

Modificando en el archivo 9.8.6.net. según los distintos diámetros se obtienen los siguientes puntos de funcionamiento para la estación de bombeo:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Caudal (l/s)</i>	<i>Altura (m.c.a.)</i>
700	2598	250
800	2598	167
900	2598	129
1000	2598	109
1100	2598	98
1200	2598	92
1400	2598	86
1500	2598	84

Tabla 9.19. Puntos de funcionamiento de la estación de bombeo.

Siguiendo el mismo proceso que en la alternativa anterior, se obtienen los siguientes datos:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>SUMA (func.naranja)</i>	<i>SUMA (func.verde)</i>	<i>SUMA TOTAL</i>
700	19.81	348.67	368.48
800	19.56	233.46	253.02
900	21.52	179.88	201.40
1000	23.80	152.14	175.94
1100	27.25	136.92	164.17
1200	31.25	128.06	159.31
1400	35.35	119.15	154.51
1500	37.88	116.96	154.83

Tabla 9.20. Datos para el análisis gráfico.

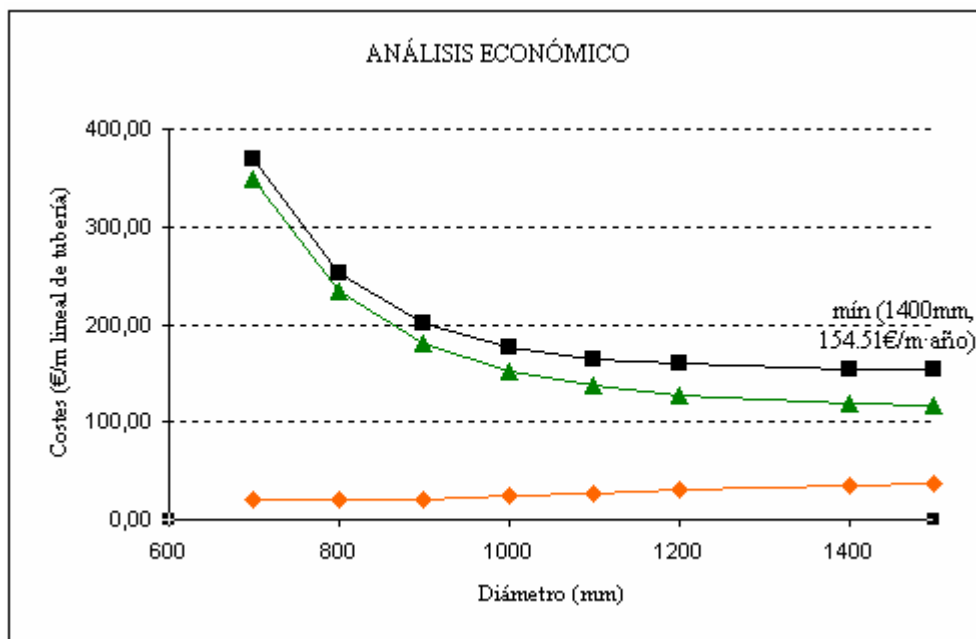


Fig. 9.12. Análisis gráfico.

De este modo se opta por la siguiente solución:

<i>Diámetro</i>	1400 mm (PN 10)
<i>Punto de funcionamiento</i>	(2598 l/s, 86 m.c.a.)

<i>Volumen de la balsa</i>	112214.4 m ³
<i>Coste total</i>	154.51 €/m = 780386.74 €
<i>Coste por Ha</i>	1663.94 €/Ha al año

Comparando los resultados de cada alternativa se opta por la segunda, en la que se bombea hacia la balsa toda la demanda de un día en 8 horas. En la siguiente tabla se muestra el ahorro total que supone esta elección frente a las otras dos:

		20h	<i>Coste/ Ha·año</i>	<i>Coste total</i>	<i>Ahorro/ Ha·año</i>	<i>Ahorro total</i>
<i>Coste/Ha·año</i>	<i>Coste total</i>		1078.39 €	503607.29 €	108.31€	48638.44€
970.08 €	454968.85 €	12h	<i>Coste/ Ha·año</i>	<i>Coste total</i>	<i>Ahorro/ Ha·año</i>	<i>Ahorro total</i>
			1663.94 €	780386.74 €	693.86€	325414.89€

Como se observa al rodar el archivo 9.B.6.1000.net, el cual representa la alternativa seleccionada, la velocidad de la tubería de impulsión se encuentra entre los límites previsto, concretamente con un valor de 1.67m/s. Si no perteneciera al intervalo 0.5-2, 2.5 m/s, sería necesario optar por la solución con diámetro inmediatamente superior a 1000mm (si la velocidad es superior) o a un diámetro inferior (si la velocidad es inferior)

9.5.2. Sector I-B

9.5.2.1 Bombeo en 20 horas para abastecer la demanda de un día

En lo que se refiere a la red que abastece al sector I-B se llevará a cabo el mismo procedimiento que anteriormente, variando los siguientes datos:

- la longitud de la tubería de impulsión es de 5221.8 m,
- el consumo de la red es de 748.05 l/s = 2692.98 m³/h, de manera que diariamente consume un volumen de 53859.6 m³,
- para garantizar la demanda durante 8 horas, se necesita una balsa con un volumen de reserva de 21543.84 m³, lo que supone un diámetro de 95.62 m para el depósito equivalente.

Estos valores se han introducido en el archivo 9.B.2.net, y para diferentes diámetros de tuberías de impulsión se han ajustado los puntos de funcionamiento de la estación de bombeo a los siguientes valores:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Caudal (l/s)</i>	<i>Altura (m.c.a.)</i>
500	748.05	197.9
600	748.05	146.47
700	748.05	127.68
800	748.05	119.7
900	748.05	115.9
1000	748.05	113.94

1100	748.05	112.86
1200	748.05	112.22

Tabla 9.21. Puntos de funcionamiento de la estación de bombeo.

Tras realizar los cálculos pertinentes, presentes en el archivo de *Excel* llamado “*Análisis económico sector I-B*”, los puntos que constituyen las tres funciones de interés son los siguientes:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Función verde</i>	<i>Función naranja</i>	<i>Función negra</i>
500	9.99	314.70	324.69
600	11.39	232.92	244.31
700	12.11	203.03	215.15
800	15.81	190.35	206.15
900	18.18	184.30	202.48
1000	20.45	181.18	201.63
1100	23.88	179.47	203.35
1200	27.88	178.45	206.33

Tabla 9.22. Datos para el análisis.

Estos puntos se han representado en la figura 9.10 para acometer el análisis económico. Como se observa, el mínimo coste corresponde al valor de 1000mm de diámetro.

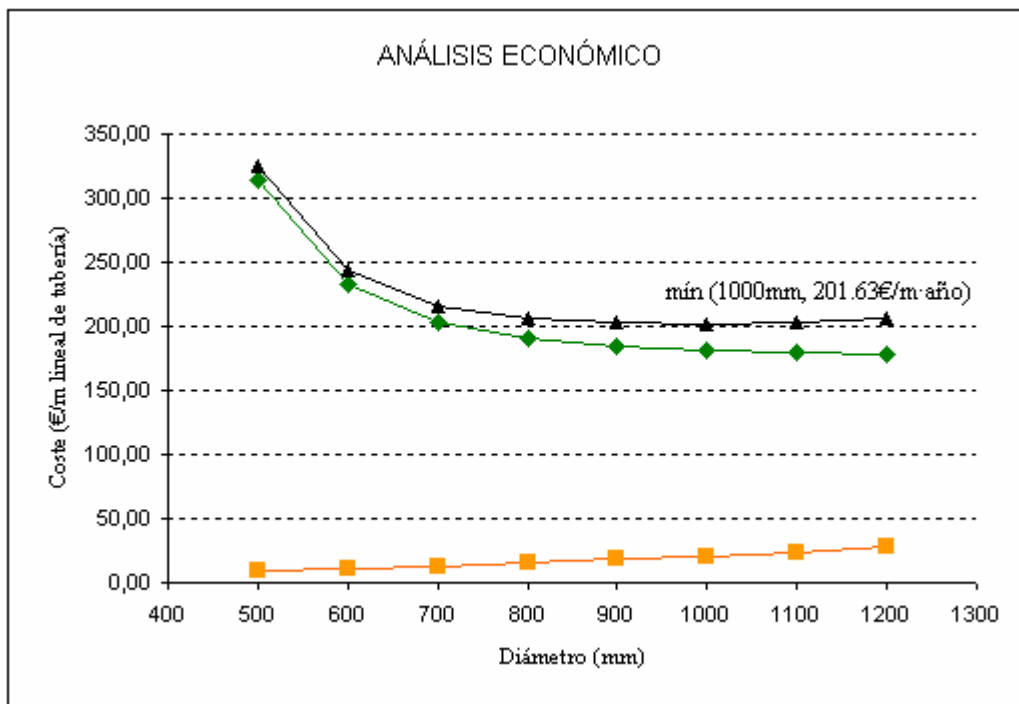


Fig. 9.10. Análisis económico.

Observando la gráfica, se opta por la siguiente solución:

<i>Diámetro</i>	1000 mm (PN 12.5)
<i>Punto de funcionamiento</i>	(748.05 l/s, 113.94 m.c.a.)
<i>Volumen de la balsa</i>	21543.84 m ³
<i>Coste total</i>	201.63 €/m = 1052871.5 €
<i>Coste por Ha</i>	1512.75 €/Ha al año

9.5.2.2 Bombeo en 8 horas para abastecer la demanda de un día

Los puntos de funcionamiento de la estación de bombeo según el diámetro de la tubería de impulsión son los siguientes:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Caudal (l/s)</i>	<i>Altura (m.c.a.)</i>
700	1873.12	205
800	1873.12	160
900	1873.12	137
1000	1873.12	126
1100	1873.12	120
1200	1873.12	117
1400	1873.12	113
1500	1873.12	112.5

Tabla 9.23. Puntos de funcionamiento de la estación de bombeo.

De los cálculos realizados se obtienen los siguientes puntos, los cuales constituyen las tres funciones de interés:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Función verde</i>	<i>Función naranja</i>	<i>Función negra</i>
700	19.01	394.89	413.90
800	20.96	308.22	329.18
900	24.06	264.98	289.03
1000	26.09	243.74	269.83
1100	27.80	232.14	259.94
1200	32.20	225.51	257.71
1400	44.41	218.61	263.01
1500	52.46	216.95	269.41

Tabla 9.24. Datos para el análisis.

Gráficamente:

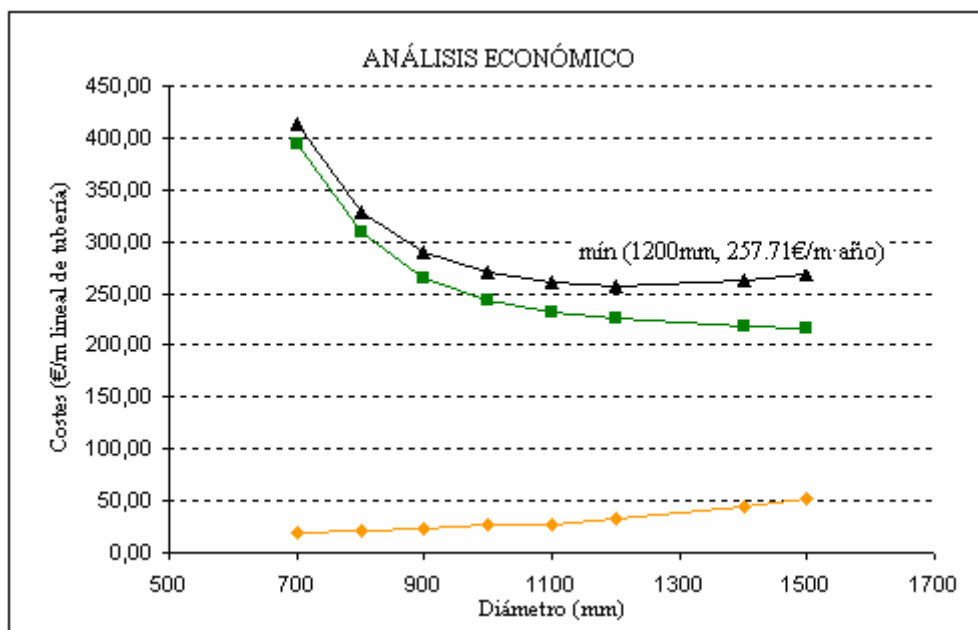


Fig.9.11. Análisis económico.

Los datos finales de esta alternativa son:

<i>Diámetro</i>	1200 mm (PN 12.5)
<i>Punto de funcionamiento</i>	(1873.12 l/s, 117 m.c.a.)
<i>Volumen de la balsa</i>	53859.6 m ³
<i>Coste total</i>	257.71 €/m = 1345710 €
<i>Coste por Ha</i>	1933.5 €/Ha al año

9.5.2.3 Bombeo en 12 horas para abastecer la demanda de tres días

Se requieren los siguientes puntos de funcionamiento de la estación de bombeo:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Caudal (l/s)</i>	<i>Altura (m.c.a.)</i>
700	3740.25	461
800	3740.25	290
900	3740.25	210
1000	3740.25	169.5
1100	3740.25	147
1200	3740.25	134
1400	3740.25	121.5
1500	3740.25	118
1800	3740.25	113.5

Tabla 9.25. Puntos de funcionamiento de la estación de bombeo.

Tras realizar los cálculos oportunos, se obtienen los siguientes datos:

<i>Diámetro (mm)</i>	<i>Función verde</i>	<i>Función naranja</i>	<i>Función negra</i>
700	41.80	1303.35	1345.15
800	43.75	820.41	864.16
900	29.42	594.15	623.57
1000	41.55	479.45	521.00
1100	36.83	415.89	452.72
1200	41.23	379.11	420.34
1400	53.44	342.89	396.32
1500	61.49	333.54	395.04
1800	95.52	319.78	415.30

Tabla 9.26. Datos para el análisis.

Los datos de esta solución son:

<i>Diámetro</i>	1500 mm (PN 12.5)
<i>Punto de funcionamiento</i>	(3740.25 l/s, 118 m.c.a.)
<i>Volumen de la balsa</i>	53859.6 m ³
<i>Coste total</i>	395.04 €/m = 2062819.8 €
<i>Coste por Ha</i>	2963.8 €/Ha al año

Expresados gráficamente:

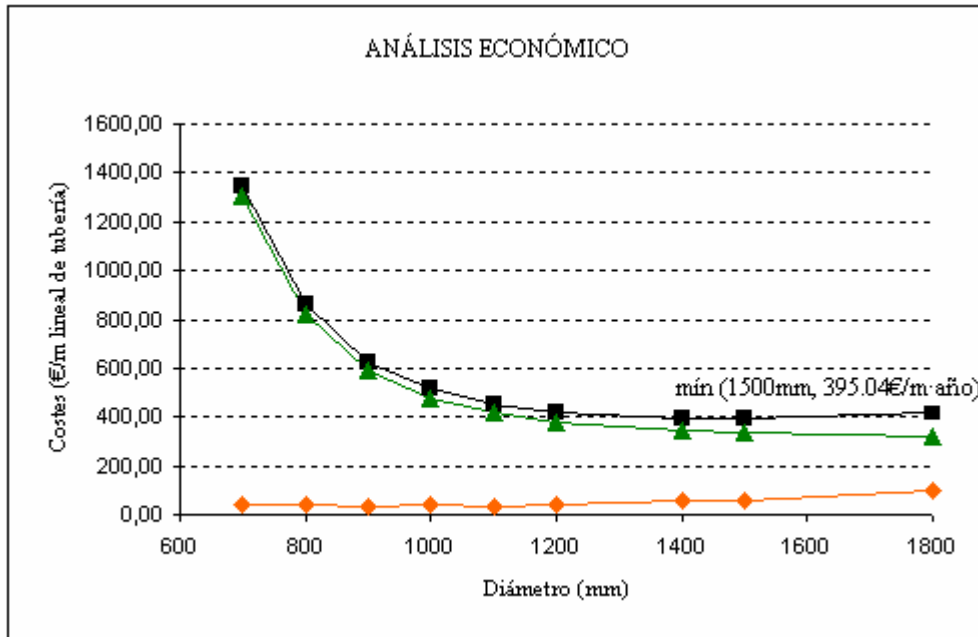


Fig.9.12. Análisis gráfico.

Analizando los mínimos de cada una de las alternativas, se elige la primera, en la que se bombea el mismo caudal demandado durante 20 horas. En la siguiente tabla se muestra el ahorro total que supone esta elección frente a las otras dos:

		8h	<i>Coste/ Ha·año</i>	<i>Coste total</i>	<i>Ahorro/ Ha·año</i>	<i>Ahorro total</i>
<i>Coste/Ha·año</i>	<i>Coste total</i>	12h	1933.5 €	1345710 €	108.31€	292838.5€
1512.75 €	1052871.5 €		<i>Coste/ Ha·año</i>	<i>Coste total</i>	<i>Ahorro/ Ha·año</i>	<i>Ahorro total</i>
			2963.8 €	2062819.8 €	1451.05€	1009948.6 €

La velocidad de la conducción de impulsión de la alternativa seleccionada tiene un valor de 0.95m/s, por lo que es aceptable desde el punto de vista técnico.

Para finalizar el análisis económico se debe mencionar que la aplicación de la fórmula de Bresse no es recomendable en estos casos, ya que el caudal que es necesario bombear es muy elevado, y esta formulación proporciona valores adecuados en pequeñas instalaciones, de caudales menores a 15 l/s, obteniéndose para los caudales de las alternativas seleccionadas los siguientes valores sobredimensionados:

$$D = k\sqrt{Q}$$

donde:

D : diámetro (m)

$k \approx 1.35$

Q : caudal bombeado (m^3/s)

Sector I-A	1000 mm
	$D_B = 1.35 \cdot \sqrt{1.299} = 1.54 \text{ m}$
Sector I-B	1000 mm
	$D_B = 1.35 \cdot \sqrt{0.748} = 1.17 \text{ m}$

9.6. COMPROBACIÓN TÉCNICA

En primer lugar, es necesario constatar que las velocidades de circulación del agua en la tubería de la impulsión se encuentran dentro de los límites establecidos (entre 0.5 y 2.5 m/s) en las alternativas definitivas seleccionadas en cada sector. Como ya se ha comentado anteriormente, las velocidades respectivas son:

	caudal (l/s)	diámetro (mm)	velocidad (m/s)
Sector I-A	748.05	1000	0.95
Sector I-B	1299	1000	1.66

Si las velocidades finales hubieran sido superiores a los límites establecidos, habría sido necesario desechar la alternativa óptima económica, recurriendo a la solución de diámetro inmediatamente inferior. En caso contrario, con velocidades inferiores a 0.5 m/s, se habría optado por la solución de diámetro inmediatamente superior.

A continuación se calculan las sobrepresiones originadas por golpe de ariete en la tubería de impulsión, para lo cual es necesario, en primer lugar, estimar el tiempo de cierre de la válvula de retención por parada de la bomba a través de la fórmula de Mendiluce:

$$\tau = C + \frac{K \cdot L \cdot v_o}{g \cdot H_m} \quad (9.3)$$

donde:

C y K : coeficientes de ajuste, figura 9.13

L : longitud total de la tubería

v_o : velocidad de régimen del fluido

H_m : altura manométrica

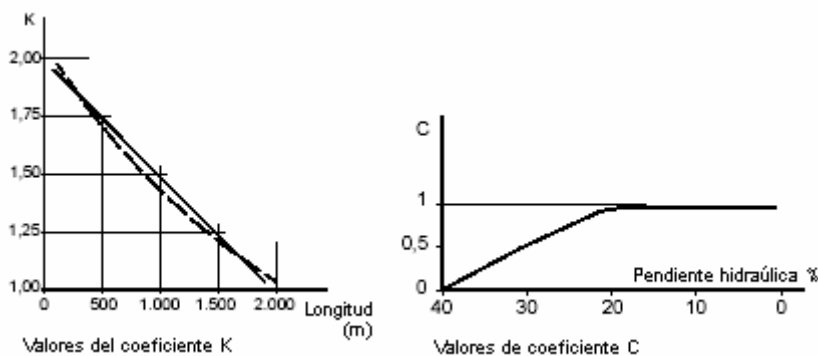


Fig. 9.13. Determinación gráfica de C y K .

Los datos de cada red necesarios para calcular el tiempo por la fórmula de Mendiluce son los siguientes:

	L (m)	v_o (m/s)	H_m (m.c.a.)	pendiente hidráulica (%)
Sector I-A	5050.72	0.95	88	1.5
Sector I-B	5221.8	1.66	114	2.1

Para estos valores, se obtienen los siguientes tiempos:

$$\text{Sector I - A: } \tau = 1 + \frac{1 \cdot 5050.72 \cdot 0.95}{9.81 \cdot 88} = 6.56 \text{ s}$$

$$\text{Sector I - B: } \tau = 1 + \frac{1 \cdot 5221.8 \cdot 1.66}{9.81 \cdot 114} = 8.75 \text{ s}$$

El tiempo característico del fenómeno se calcula como:

$$\tau = \frac{2L}{a} \quad (9.4)$$

donde

L : longitud de la tubería

a : celeridad de la onda de presión

Una expresión práctica de la celeridad de onda de presión a , cuando el líquido circulante es agua es la siguiente:

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + K \frac{D}{e}}} \quad (9.5)$$

donde

D : diámetro interior de la tubería

e : espesor

K es un coeficiente que depende del material. Suponiendo que las tuberías a instalar son de acero, K será igual a 0.5, con un espesor de 32 mm en el caso del sector I-A, y de 36 mm para la conducción del sector I-B.

$$\text{Sector I - A: } a = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + 0.5 \frac{1000}{32}}} = 1255 \text{ m/s}$$

$$\text{Sector I - B: } a = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + 0.5 \frac{1000}{36}}} = 1269 \text{ m/s}$$

De manera que los tiempos característicos de cada sector son:

$$\text{Sector I - A: } \tau = \frac{2 \cdot 5050.72}{1255} = 8.05 \text{ s}$$

$$\text{Sector I - B: } \tau = \frac{2 \cdot 5221.8}{1269} = 8.23 \text{ s}$$

Como se observa, el tiempo de cierre de la válvula de retención calculado por la fórmula de Mendiluce es menor que el tiempo característico del fenómeno en el sector I-A, por lo que se produce un cierre rápido y se aplicará la expresión de Allievi (9.6) para el cálculo de las sobrepresiones, y la longitud afectada por este incremento de

presión será la de la expresión (9.7), asumiendo un decrecimiento lineal hacia la salida de la bomba:

$$\Delta H = \frac{a v_o}{g} = \frac{1255 \cdot 0.95}{9.81} = 121.53 \text{ m.c.a.} \quad (9.6)$$

$$L_m = L - \frac{a \tau}{g} = 5050.72 - \frac{1255 \cdot 6.56}{9.81} = 4211.5 \text{ m} \quad (9.7)$$

Mientras que en el caso del sector I-B, el tiempo necesario para el cierre de la válvula de retención es mayor que el tiempo característico, por lo que tiene lugar un cierre lento, de manera que utilizará la fórmula de Michaud (9.8) para determinar las sobrepresiones. Este valor de sobrepresión disminuirá linealmente desde el inicio de la tubería hacia la balsa.

$$\Delta H = \frac{2 L v_o}{g \tau} = \frac{2 \cdot 5221.8 \cdot 1.66}{9.81 \cdot 8.75} = 202.0 \text{ m.c.a.} \quad (9.8)$$

Según los valores obtenidos, las presiones máximas que pueden darse a la salida de la bomba son las siguientes:

Sector I-A: $88 + 121.53 = 209.53 \text{ m.c.a.}$

Sector I-B: $114 + 202.0 = 316.0 \text{ m.c.a.}$

Como se observa, la sobrepresión que puede tener lugar en el sector I-A en caso de parada brusca de la impulsión tiene un valor superior al doble de la presión nominal elegida, por lo que deberá aumentar ésta hasta un valor de 22.5 atm, excepto en los últimos 840 m, en los que podrá reducirse.

En el sector I-B la sobrepresión puede llegar casi al triple de la presión que es capaz de aguantar la tubería, por lo que es necesario instalar tuberías con presiones nominales mayores. En este caso, por tratarse de un cierre lento, el timbraje puede reducirse linealmente desde el punto de inyección hacia la salida.

CAPÍTULO 10. CONCLUSIONES

A raíz del estudio y análisis de los procedimientos de cálculo en los que se fundamenta la programación de EPANET, parece relevante señalar la importancia que ejerce el dominio de estos conocimientos a la hora de interpretar los resultados calculados por el programa.

Generalmente, el interés por los procesos de cálculo internos de estos programas es prácticamente nulo, ya que su comprensión suele ser lenta y costosa. Sin embargo sirve de gran ayuda a la hora de determinar las limitaciones de la aplicación de los resultados obtenidos.

Del análisis de los algoritmos de programación de EPANET se ha obtenido una visión integral, tanto de la aplicación de métodos numéricos, indispensables en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, como los que nos encontramos en estos problemas de redes, así como de la multitud de procesos de resolución que conllevan estos métodos. Esto implica a un amplio abanico de conceptos matemáticos, enlazados unos a otros.

Concretamente, refiriéndonos a los procesos de cálculo, se hace necesario el dominio de diferentes áreas matemáticas. Por un lado recurrimos al cálculo diferencial al aplicar el método de Newton-Raphson, con el que se redefine el sistema de ecuaciones no lineales a resolver. Así mismo, se requiere del cálculo integral en una fase previa, al recurrir a métodos de optimización, cuya aplicación únicamente asegura la existencia y unicidad de la solución.

Por otro lado, los conceptos del álgebra elemental nos permiten organizar el sistema de ecuaciones a resolver en un sistema matricial, de manera que se reduzca la problemática inicial, principalmente, al proceso de inversión de una matriz. Concretamente, EPANET aplica una variación de la factorización de Choleski. Una alternativa a la aplicación de este método es el conocido método de inversión de Gauss. La elección del primero frente al segundo se debe a que la factorización de Choleski acorta el proceso de resolución de matrices definidas positivas, como las que se obtienen, de manera que se aprovecha determinada característica de la matriz para simplificar el procedimiento de cálculo. El método de Gauss tiene una aplicación más general, es decir, puede aplicarse sobre un espectro más amplio de tipos de matrices, por lo que el proceso metódico de resolución debe ser más amplio, de manera que abarque la amplia casuística que pueda presentarse. Este sería un claro ejemplo en el que el dominio del concepto matemático supone una reducción de recursos, ya sea temporales, como de memoria del ordenador, destinados a un determinado proceso.

En contra de lo que puede pensarse en un primer momento, el sistema de ecuaciones no lineales a resolver no es el que resulta al aplicar las ecuaciones de continuidad y energía sobre la red, sino el que se obtiene al aplicar sobre éste el método de Newton-Raphson.

Por otro lado, el esfuerzo dedicado al cálculo manual de pequeñas redes pone de manifiesto la dependencia de las herramientas informáticas utilizadas. Sin éstas, la obtención de la solución de grandes redes sería extremadamente laboriosa, incluso

inviabile, ya que se trabajaría con matrices cuyos rangos, en pequeñas redes, no suelen ser inferiores a 200x200, desaprovechando las ventajas de tener modelada la red.

Tanto en el estudio de redes de nueva implantación, como en la modelación de aquellas en servicio, la aplicación de programas como EPANET se hace indispensable en el camino hacia el funcionamiento óptimo de la red. Si en el presente proyecto nos hemos limitado a analizar las modificaciones (o consecuencias) de la red que originan diferentes situaciones (o causas), y a cómo actuar sobre la red para minimizar estas alteraciones, es interesante comentar el proceso inverso que puede realizarse sobre redes en servicio, siempre y cuando se disponga de medidas reales de la red.

Cabe destacar la aplicación de EPANET en lo que se refiere a comprobación de presiones mínimas en los puntos críticos de la red bajo situaciones excepcionales como incendios (presiones mínimas establecidas por legislación) o roturas de tuberías. La disminución de la presión en determinados puntos, ya sea por un aumento de la demanda, como se produce en un incendio, o por la obstrucción total o rotura de una tubería, se ha solucionado aumentando el diámetro de al menos una de las tuberías que confluyen en estos puntos críticos.

Con el estudio llevado a cabo sobre la red ficticia, tanto en periodo simple como en periodo extendido, se pone de manifiesto la complejidad de realizar previsiones sobre redes malladas debido a la capacidad de autorregulación de presiones que poseen. De tal modo que el régimen de explotación previsto en base a la curva de consigna calculada en periodo simple no ha podido aplicarse en el posterior estudio en periodo extendido, debido a que la variación del nivel del agua en el depósito (no considerada en el estudio en periodo simple) modificaba el caudal inyectado por las bombas, así como la presión.

Otra consecuencia de esta capacidad de regulación de redes malladas es la ineficacia de medidas puntuales de control de presiones. Suponiendo un nudo con altos valores de presión, en el que confluyen varias tuberías, sería necesario instalar una medida de control en cada tubería, ya que si bloqueamos un único “camino” hacia el nudo, y dejamos el resto “abiertos”, la red se compensará aumentando el flujo por los caminos que quedan abiertos. En estos casos sería recomendable sectorizar la red, discriminando las fuentes de caudal que influyen en cada sector para, con su regulación, aumentar o disminuir las presiones de los nudos de consumo a los que suministra caudal.

Estos problemas no existen en redes ramificadas. En el estudio llevado a cabo sobre redes de regadío ramificadas, las actuaciones puntuales en el control de presiones han conducido a los resultados esperados.

La principal acción llevada a cabo sobre redes ramificadas ha consistido en un estudio económico pormenorizado entre distintas alternativas, aprovechando la posibilidad que ofrece EPANET de calcular la potencia consumida y el coste económico asociado. Para esto ha sido necesario especificar el precio de la energía, y su variación a lo largo del día, con lo que EPANET calcula el costo diario como dato de salida. De este modo, de manera visual, mediante gráficos, se pueden cotejar los valores requeridos de energía y los costes de las distintas soluciones propuestas. Esta es una manera inequívoca de elegir la solución óptima desde el punto de vista económico. Sin

embargo, éste no debe ser el único criterio, siendo siempre necesario comprobar que, bajo las características de la alternativa seleccionada, la velocidad de la tubería proyectada se encuentra entre límites aceptables. En caso contrario, habrá que optar por diámetros superiores o inferiores, según haya que disminuir o aumentar la velocidad respectivamente.

Como contrapunto a las ventajas de EPANET cabe destacar la limitación a la hora de comprobar las sobrepresiones ocasionadas por golpe de ariete, debido a que la red se resuelve suponiendo régimen estacionario. En la comprobación técnica de la solución óptima propuesta se han calculado las sobrepresiones que ocasionaría en la tubería de conducción una parada brusca de los equipos de bombeo, lo que indica la necesidad de duplicar la presión nominal de las tuberías seleccionadas, lo que aumentará su coste considerablemente.

BIBLIOGRAFÍA

CASTILLO-E, L.G. (2002). “Apuntes de Obras y Aprovechamientos Hidráulicos”. UPCT.

COLLINS M. A., COOPER L., HELGASON R., KENNINGTON J. y LE BLANC L. (1978). “Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques”. *Management Science*, 24, 7, pp. 747 - 760.

“Curso de análisis, diseño, operación y mantenimiento de redes hidráulicas a presión: Proyecto AGUA”. (1997). Tomo I. Departamento de Mecánica de Fluidos de la UPV.

“Curso de análisis, diseño, operación y mantenimiento de redes hidráulicas a presión: Proyecto AGUA”. (1997). Tomo II. Departamento de Mecánica de Fluidos de la UPV.

“Curso de ingeniería hidráulica aplicada a los sistemas de distribución de agua”. (1987). Cátedra de Mecánica de Fluidos. UPV.

GERARD, C. F. and WHEATLEY, P. O. (1989). “Applied numerical analysis”. Addison-Wesley, Massachusetts.

INITEC – TÉCNICAS REUNIDAS (2003). “Estudio y redacción del proyecto de modernización de regadíos de las zonas regables de Guadalén, Rumblar y Vegas Altas, Medias y Bajas del Guadalquivir (Jaén)”. Ministerio de Medio Ambiente.

MÉNDEZ, M.V. (1995). “Tuberías a presión en los sistemas de abastecimiento de agua”. Universidad Católica Andrés Bello. Caracas. Venezuela.

TODINI, E. y PILATI, S. (1987). “A gradient method for the analysis of pipe networks”. *International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution*, Leicester Polytechnic, UK, September 8-10.

APÉNDICE A. ALGORITMO DEL GRADIENTE APLICADO AL ANÁLISIS DE REDES DE ABASTECIMIENTO

El presente apéndice contiene la derivación del Algoritmo del Gradiente para ser usado en análisis de flujo en redes de distribución. La técnica de Newton-Raphson es aplicada tanto en términos de altura en los nudos como en caudal en tuberías para hallar la solución simultánea del sistema de ecuaciones de balance de masa y energía, en parte lineal y no-lineal. El problema es analíticamente resuelto mediante la solución iterativa de un sistema de ecuaciones lineales, de tamaño igual al número de alturas piezométricas en nudos desconocidas. La solución es entonces eficientemente obtenida usando el algoritmo de la Factorización Incompleta de Choleski / Gradiente Conjugado Modificado (ICF/MCG, Incomplete Choleski Factorization / Modified Conjugate Gradient algorithm).

A.1. INTRODUCCIÓN

El diseño de sistemas de redes de distribución de agua, definido en términos de líneas (tuberías, bombas, válvulas) y nudos, una vez que la topología de la red está definida, generalmente consiste en dos diferentes etapas:

- definición y optimización de la red
- análisis del flujo en la red

La primera etapa, partiendo de la topología de la red, de las propiedades y restricciones físicas, de la demanda en los nudos y de las pérdidas de cada línea, consiste en la determinación del tamaño de cada elemento de la red que minimice una cierta función objetivo, sujeta a un número de restricciones.

En caso de redes malladas la función objetivo debería tener en cuenta las pérdidas así como una medida de la confiabilidad hidráulica (Pilati y Todini, 1984).

Las restricciones son generalmente introducidas en términos de:

- diámetros de tuberías
- presiones mínimas en nudos
- velocidad máxima en tuberías
- etc.

El uso de planteamientos de optimización más complejos donde la topología de la red es también desconocida, aunque interesante desde el punto de vista científico, puede difícilmente ser justificada en la práctica, donde el esquema de la red es generalmente una restricción inicial del problema. hidráulica

La segunda etapa de análisis del flujo en la red, es utilizada para estimar la consistencia del diseño de la red bajo las condiciones y requerimientos de servicio a los que estará sometida, o bien analizar los efectos de particularizaciones del sistema. El

problema consiste en determinar tanto los flujos en cada elemento lineal de la red, así como la altura piezométrica en cada nudo del sistema, asumiendo que se han alcanzado las condiciones de flujo permanente.

La solución de los problemas de análisis de flujo ha llegado a desarrollar un número de métodos alternativos que pueden clasificarse como sigue:

- Gradiente Local
- Newton-Raphson
- Linearización
- Minimización numérica

Las tres primeras clases incluyen métodos usados para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, mientras que el cuarto consiste en la búsqueda del mínimo de una función convexa no-lineal restringida por igualdades y desigualdades.

La primera clase incluye métodos que siguen la línea de los desarrollados por Hardy-Cross, 1936, quien primero sistematizó el problema de análisis de redes. Estos métodos resuelven el sistema original de ecuaciones en términos de gradiente local, bien en el subespacio de mallas independientes presentes en la red, o en el subespacio de nudos. Cao, 1963, verifica que según la elección del subespacio de mallas independientes (el cual no es único) el método puede diverger. Si se trabaja con el subespacio nodal, el método presenta una lenta convergencia, pudiendo no converger ocasionalmente.

El método de Newton-Raphson, también llevado a cabo tanto en términos de mallas (Warga, 1954, Martin y Peters, 1963) como en términos de nudos (Shamir y Howard, 1968), puede ser considerado como una extensión de la técnica de Hardy-Cross de correcciones locales mediante un algoritmo de corrección multidimensional. Estos métodos, aunque más convergentes que las originales técnicas del gradiente local, aún mantienen algunas deficiencias dependiendo de la complejidad de la red así como de la elección de la solución inicial externamente propuesta.

Los métodos basados en la teoría lineal (Word y Charles, 1972) pueden también ser considerados como una aplicación de la técnica de Newton-Raphson basada en mallas, pero requiere la solución de un largo sistema de ecuaciones (de tamaño igual al número de mallas más el número de nudos) aunque reduciendo el riesgo de fallo.

Los métodos de optimización (Collins et al., 1978, Contro y Franzetti, 1982), minimizan una función objetivo convexa no-lineal restringida por igualdades lineales y desigualdades usando técnicas de optimización matemática. La ventaja es obvia porque la convexidad de la función objetivo combinada con las restricciones lineales garantiza la existencia y unicidad de la solución. Desafortunadamente, la solución numérica del problema requiere eficientes algoritmos de programación no-lineal, lo que reduce la utilización en la práctica de estos métodos, especialmente cuando se trata de redes muy complejas.

El método propuesto (desarrollado originalmente por Todini y Pilati, 1979) puede ser considerado como la unión de técnicas basadas en la optimización y técnicas basadas en el método de Newton-Raphson. Se parte minimizando el Content Model

ligeramente modificado (Collins et al., 1978) con el objetivo de comprobar la existencia y unicidad de la solución del sistema lineal y no-lineal para ser simultáneamente resuelto en términos de alturas piezométricas en nudos y flujos en tuberías. Es entonces cuando se aplican las técnicas de Newton-Raphson sobre estos valores de alturas y flujos, donde la prueba de existencia y unicidad de la solución se mantiene, lo cual es clave para que se produzca la convergencia incondicional del método propuesto. Finalmente, el sistema es resuelto algebraicamente mediante la solución iterativa del sistema lineal de tamaño igual al número de nudos con alturas desconocidas más la proyección matricial de los resultados de los flujos desconocidos en tuberías. La estructura especial del sistema matricial que se obtiene, una matriz Stieltjes dispersa⁽¹⁾, simétrica, definida positiva con elementos no nulos, puede ser almacenada como número de nudos + número de localizaciones de tuberías, permitiendo obtener una solución eficiente usando el algoritmo de la factorización incompleta de Choleski / gradiente conjugado modificado (Kershaw, 1978).

A continuación se presenta el desarrollo de las ecuaciones básicas para una red simple de abastecimiento. La ampliación a sistemas que contengan bombas y válvulas se encuentra en Salgado et al. 1987.

A.2. LA DERIVACIÓN DEL ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON PROPUESTO

Dada una red de abastecimiento definida por su topología, características de las tuberías y restricciones del sistema (demandas de agua q en nudos, alturas Ho de embalses y leyes de pérdidas de energía de cada tubería $f_i(Q_i)$) el problema consiste en determinar los flujos Q de cada tubería, así como las alturas piezométricas H en los nudos asumiendo condiciones de flujo permanente.

En forma matricial el problema puede ser formulado como sigue:

$$\begin{aligned} A_{12}H + F(Q) &= -A_{10}Ho \\ A_{21}Q &= q \end{aligned} \quad (A.1)$$

donde,

$A_{12} = A_{21}^T$	(np, nn)	matriz de incidencia de los nudos de altura desconocida
$A_{10} = A_{01}^T$	(np, no)	matriz de incidencia de los nudos de altura conocida
$Q^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{np}]$	$(1, np)$	flujos en cada tubería
$q^T = [q_1, q_2, \dots, q_{nn}]$	$(1, nn)$	demandas en nudos
$H^T = [H_1, H_2, \dots, H_{nn}]$	$(1, nn)$	carga desconocida en nudos
$Ho^T = [Ho_1, Ho_2, \dots, Ho_{no}]$	$(1, no)$	carga fija en embalses
$F^T(Q) = [f_1, f_2, \dots, f_{np}]$	$(1, np)$	leyes de pérdida de energía $f_i = f_i(Q_i)$

(1) Matriz dispersa es aquella que posee relativamente pocos elementos no nulos. Por ejemplo, una matriz identidad (100, 100) tendrá 10⁴ elementos, pero sólo 100, los pertenecientes a la diagonal, serán no nulos, conteniendo sólo un 1% de elementos no nulos.

con

nn : número de nudos con altura de carga desconocida
 no : número de nudos con altura fija (embalses)
 np : número de tuberías con flujo desconocido

$$A12(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si el flujo de la tubería } i \text{ ingresa en el nudo } j \\ 0 & \text{si la tubería } i \text{ y el nudo } j \text{ no están conectados} \\ -1 & \text{si el flujo de la tubería } i \text{ sale del nudo } j \end{cases}$$

quedando $A10$ definida de manera análoga a $A12$ para nudos de altura fija.

El sistema representado por la ecuación (A.1) puede tener más de una solución dependiendo de la forma de $f_i(Q_i)$. Si $f_i(Q_i)$ es siempre una función monótonamente creciente, puede probarse que la solución del sistema (1) existe y es única (Todini y Pilati, 1984). Una aproximación más general a la prueba de la existencia y unicidad de la solución puede obtenerse mediante el Content Model (Collins et al., 1978). Utilizando la ecuación de Hazen-Williams para calcular las pérdidas de energía, se puede escribir para cada tubería:

$$f_i(Q_i) = R_i |Q_i|^{n_i+1} Q_i \quad (A.2)$$

siendo R_i el coeficiente de resistencia y n_i el exponente de caudal. Tras integrar f_i desde 0 hasta Q_i el Content model se transforma en:

$$\begin{aligned} \min.C(Q) &= \frac{\sum_{i=1}^{np} R_i |Q_i|^{n_i+1}}{n_i + 1} + \sum_{j=1}^{no} Ho_j \sum_{i=1}^{np} A01(j, i) Q_i \\ s.a. \quad &\sum_{i=1}^{np} A21(j, i) Q_i - q_i = 0 \quad j = 1, nn \end{aligned} \quad (A.3)$$

Se puede observar que debido a la definición de $f_i(Q_i)$ no hay necesidad de restricciones adicionales tales como $Q_i \geq 0$, que ya fue introducido en la formulación del Content Model. Esto permite transformar la minimización restringida a una no restringida mediante los multiplicadores de Lagrange, por ejemplo:

$$\min.L(Q, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{np} R_i |Q_i|^{n_i+1}}{n_i + 1} + \sum_{j=1}^{no} Ho_j \sum_{i=1}^{np} A01(j, i) Q_i + \sum_{j=1}^{nn} \lambda_j \sum_{i=1}^{np} A21(j, i) Q_i - q_i \quad (A.4)$$

Como R_i será positivo cuando $n_i > 0$, el lagrangiano L es una función convexa y la solución para este problema existe y es única. Esto coincide con la condición necesaria para un mínimo.

La solución puede encontrarse imponiendo las condiciones necesarias para un extremo:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial Q_i &= 0 & i &= 1, np \\ \partial L / \partial \lambda_i &= 0 & j &= 1, nn \end{aligned} \quad (A.5)$$

para conseguir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A10 & Ho \\ q \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

donde

$$A11 = \begin{pmatrix} R_1 |Q_1|^{n_1-1} & & & \\ & R_2 |Q_2|^{n_2-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{np} |Q_{np}|^{n_{np}-1} \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

es una matriz diagonal (np, np) .

Por comparación con la ecuación (A.1) podemos asignar un significado físico al multiplicador de Lagrange, λ , los cuales representan las alturas de carga de los nudos en los que se desconocía. Finalmente, sustituyendo se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A10 & Ho \\ q \end{pmatrix} \quad (A.8)$$

La ecuación (A.8) iguala a la ecuación (A.1) cuando las pérdidas de carga en tuberías se calculan mediante la ecuación (A.2).

Es esencial señalar que esto prueba que la solución para el sistema de ecuaciones no lineales, así como la solución para el Content Model, existe y es única bajo los supuestos asumidos sólo en el espacio de todos los Q y H desconocidos. Como se demostrará más adelante, en un espacio de dimensión reducida, como es el espacio de todas las tuberías o el espacio de todas las mallas, la solución no es única pero puede reconducirse hacia la unicidad añadiendo información adicional.

Con el objetivo de solucionar el sistema de ecuaciones no lineales (A.8), pueden utilizarse las técnicas de Newton-Raphson a condición de que la matriz $A11$ no se convierta en singular, lo cual sucede cuando las alturas de carga en los extremos de una tubería son idénticas y consecuentemente el flujo en la tubería es nulo. Este problema puede evitarse definiendo una frontera menor para los elementos de esta matriz.

Así, el esquema del método de Newton-Raphson puede obtenerse diferenciando ambos lados de la ecuación (A.8) respecto a Q y a H para conseguir:

$$\begin{pmatrix} N & A11 & A12 \\ & A21 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dQ \\ dH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dE \\ dq \end{pmatrix} \quad (A.9)$$

con

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & & & \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_{np} \end{pmatrix}$$

(como se puede observar, esta matriz N es producto de derivar $A11$, que ya se definió restando una unidad al exponente. Contiene los exponentes que pasan a multiplicar a la expresión de pérdidas de energía tras derivarla.)

donde N es una matriz diagonal (np, np)

y donde

$$\begin{aligned} dE &= A11Q^K + A12H^K + A10Ho \\ dq &= A21Q^K - q \end{aligned} \quad (A.10)$$

son los residuos de ser iterativamente reducido a cero y Q^K y H^K son las alturas de carga y flujos en la iteración k .

Asumiendo:

$$N A11 = D^{-1} \quad (A.11)$$

(y por consiguiente $D A11 = N^{-1}$, siendo N , $A11$ y D^{-1} matrices diagonales), la inversa del sistema matricial puede ser obtenida analíticamente por partición (Ayres, 1962) como sigue:

$$\begin{pmatrix} D^{-1} & A12 \\ A21 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{pmatrix} \quad (A.12)$$

con

$$\begin{aligned} B11 &= D - D A11 (A21 D A12)^{-1} A21 D \\ B12 &= D A12 (A21 D A12)^{-1} \\ B21 &= (A21 D A12)^{-1} A21 D \\ B22 &= -(A21 D A12)^{-1} \end{aligned} \quad (A.13)$$

La solución de la ecuación (A.9) puede encontrarse teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} dQ &= B11 dE + B12 dq \\ dH &= B21 dE + B22 dq \end{aligned} \quad (A.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.10) y (A.13) en la ecuación (A.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} dH &= (A21 D A12)^{-1} A21 D (A11 Q^K + A12 H^K + A10 Ho) - \\ &\quad (A21 D A12)^{-1} (A21 Q^K - q) = \\ &= H^K + (A21 D A12)^{-1} [A21 D (A11 Q^K + A10 Ho) + (q - A21 Q^K)] \end{aligned} \quad (A.15)$$

$$\begin{aligned}
dQ = & \left[D - D A12 (A21 D A12)^{-1} A21 D \right] (A11 Q^K + A12 H^K + A10 Ho) + \\
& + D A12 (A21 D A12)^{-1} (A21 Q^K - q) = D (A11 Q^K + A10 Ho) - \\
& D A12 (A21 D A12)^{-1} \left[A21 D (A11 Q^K + A10 Ho) + (q - A21 Q^K) \right]
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Si llevamos la ecuación (A.15) a la (A.16), teniendo en cuenta la definición de D , y que:

$$\begin{aligned}
dQ &= Q^K - Q^{K+1} \\
dH &= H^K - H^{K+1}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

se obtiene finalmente el algoritmo iterativo de Newton-Raphson:

$$H^{K+1} = - \left(A21 N^{-1} A11^{-1} A12 \right)^{-1} \left[A21 N^{-1} (Q^K + A11^{-1} A10 Ho) + (q - A21 Q^K) \right] \tag{A.18}$$

$$Q^{K+1} = (I - N^{-1}) Q^K - N^{-1} A11^{-1} (A12 H^K + A10 Ho) \tag{A.19}$$

donde $A11$ se calcula a partir de Q^K .

En resumen, se ha mostrado que la minimización del Content Model restringido por igualdades puede reconducirse a una solución iterativa de un sistema de ecuaciones lineales de tamaño igual al número de nudos (nn) más la proyección escalar y una combinación lineal de los resultados, de tamaño igual al número de tuberías (np). Este algoritmo puede considerarse como la correcta formulación del llamado algoritmo de Newton-Raphson basado en nudos.

A continuación se derivan desde la ecuación (A.9) los métodos de la teoría lineal y el de Newton-Raphson basado en mallas, comúnmente utilizados para el análisis de redes.

A.3. VISIÓN GENERAL DE LOS PROCESOS DE GRADIENTE BASADOS EN MALLAS

Si se define

$$M13 = M31^T \quad (np, nl) \text{ matriz de incidencia de mallas}$$

como:

$$M13(i, k) = \begin{cases} 1 & \text{si el flujo de la tubería } i \text{ coincide con el signo arbitrario de la malla } k \\ 0 & \text{si la tubería } i \text{ no pertenece a la malla } k \\ -1 & \text{si el flujo de la tubería } i \text{ es contrario al signo arbitrario de la malla } k \end{cases}$$

siendo nl el número de mallas

donde $nl = np - nn$ es el número de mallas independientes, lo cual siempre es posible a condición de que se añadan $no-1$ tuberías ficticias cuando $no > 1$ (donde no es el número de nudos de altura conocida). Así es fácil verificar las siguientes propiedades topológicas de la red:

$$\begin{array}{ll} M31 & A12 = 0 \\ M31 & A10 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} A21 & M13 = 0 \\ A01 & M13 = 0 \end{array} \quad (A.20)$$

Estas propiedades permiten modificar el proceso original de Newton-Raphson. De hecho si se premultiplica la ecuación (A.9) por la siguiente matriz $(np, np+nn)$:

$$\begin{pmatrix} M31 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donde I es una matriz identidad (nn, nn) , se obtiene:

$$\begin{pmatrix} M31 & A11 \\ & A21 \end{pmatrix} [dQ] = \begin{pmatrix} dF \\ dq \end{pmatrix} \quad (A.21)$$

con

$$\begin{aligned} dF &= M31 dE = M31 (A11 Q^K + A12 H^K + A10 Ho) = M31 A11 Q^K \\ dq &= A21 Q^K - q \end{aligned}$$

lo que con lleva al siguiente algoritmo iterativo:

$$Q^{K+1} = Q^K - \begin{pmatrix} M31 & A11 \\ & A21 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M31 & A11 & Q^K \\ A21 & Q^K & -q \end{pmatrix} \quad (A.22)$$

Esto no es más que el método de la teoría lineal, donde la matriz que debe ser invertida en cada paso es de tamaño (np, np) y las variables desconocidas se han calculado desde la matriz original (np, nn) .

La solución a este problema en términos de flujo es única, no siéndolo la que procede del problema original

Siguiendo la misma lógica se puede continuar con la obtención de una solución cambiando las variables desconocidas. Si se define dQ_l , la corrección de descarga para la malla será:

$$dQ = M13 dQ_l \quad (A.23)$$

y el sistema representado por la ecuación (A.22) puede reducirse a:

$$(M31 \ A11 \ M13) \ dQ_l = M31 \ A11 \ Q^K \quad (A.24)$$

donde la matriz $M31 \ A11 \ M13$ es simétrica y positiva de tamaño igual a (nl, nl) . Esta formulación nos lleva al siguiente algoritmo iterativo:

$$Q^{K+1} = Q^K - M13 (M31 \ A11 \ M13)^{-1} M31 \ A11 \ Q^K \quad (A.25)$$

el cual es conocido como método de Newton-Raphson basado en mallas. La solución a este problema, aunque única, no da una única solución en términos de Q para el problema original. Como se puede ver, adicionales nn ecuaciones pueden eliminarse, junto con toda la información de los caudales de demanda q . Esto puede evitarse si la solución inicial Q_0 se define como:

$$A21 \ Q_0 = q \quad (A.26)$$

ya que debido a la propiedad $A21 \ M13 = 0$ cualquier otra solución Q^K también satisface la misma condición. Además, al igual que para la teoría lineal, se tiene también que introducir información acerca de las alturas conocidas de embalses, con el objetivo de encontrar la solución única del problema original.

Resumiendo, se ha mostrado la aplicación básica del proceso de Newton-Raphson sobre el espacio de todas las tuberías y todos los nudos independientes, obteniendo, mediante manipulaciones algebraicas, los tres algoritmos básicos. Cada algoritmo requiere la solución iterativa de un sistema de ecuaciones lineales de distinto tamaño (nm, np, nl) , pero todos ellos equivalen en términos de propiedades de convergencia, por ejemplo la ganancia en cada iteración del gradiente es la misma. A continuación se presenta una comparación de los tres algoritmos con el objetivo de identificar la formulación más conveniente para la solución de grandes redes de abastecimiento.

A.4. PROS Y CONTRAS DE LAS DIFERENTES FORMULACIONES

Como se mencionó anteriormente, las tres formulaciones del algoritmo de Newton-Raphson, aunque equivalentes en términos de convergencia, se encaminan hacia la solución de un sistema de ecuaciones lineales de diferente tamaño.

Con el objetivo de estimar los relativos méritos de cada formulación para resolver problemas de análisis de redes de abastecimiento, la comparación se llevará a cabo en términos de:

- simplicidad de datos de entrada
- solución inicial
- tamaño del sistema de ecuaciones lineales
- eficiencia de la solución del sistema de ecuaciones

Debido a los problemas de la resolución, se debería minimizar la cantidad de información, evitando duplicación. Los datos de entrada típicos para el gradiente basado en nudos consisten en una tabla que contenga los nudos inicial y final de cada tubería, la

longitud, el diámetro, así como otras características. Además debe añadirse una tabla que contenga toda la información relativa a los nudos. Los algoritmos basados en mallas requieren la definición de la matriz de incidencia de las mallas, la cual debe ser añadida, bien formando parte de los datos de entrada, o bien calcularse a partir de la matriz de incidencia nodal $A12$ por partición en dos fragmentos, $A1$ de tamaño (nn, nn) y $A2$ de tamaño (nl, nn)

$$A12 = \begin{pmatrix} A1 \\ \dots \\ A2 \end{pmatrix} \quad (A.27)$$

de modo que imponiendo $M31 A12 = 0$ se obtiene:

$$M31 = \begin{pmatrix} -A2 & A1^{-1} & : & I \end{pmatrix} \quad (A.28)$$

siendo I una matriz identidad de tamaño (nl, nl) .

Por consiguiente, desde el punto de vista de requerimiento para los datos de entrada, se puede concluir que la formulación nodal es la más simple, considerando también que no hay necesidad de añadir tuberías ficticias a la topología de la red cada vez que se introduce un nuevo nudo de altura conocida.

En términos de la solución inicial, tanto la formulación nodal como la teoría lineal no requieren una solución inicial específica, mientras que el método de Newton-Raphson basado en mallas necesita una solución inicial Qo que satisfaga la ecuación (A.26). Esta puede ser obtenida por partición de Q en dos porciones $Q1$ de tamaño nn , y $Q2$ de tamaño nl , de modo que resolviendo para $Q1$:

$$A21 Qo = q \quad (A.26)$$

$$\begin{aligned} A1 Q1 &= q - A2 Q2 \\ Q1 &= A1^{-1} (q - A2 Q2) \end{aligned} \quad (A.29)$$

una vez que se haya asignado un valor inicial a $Q2$.

Desde el punto de vista de la solución inicial, el método del gradiente nodal de Newton-Raphson así como la teoría lineal son preferibles frente al método del gradiente basado en mallas.

Analizando el tamaño de las matrices, cada método tiene los siguientes requerimientos:

gradiente basado en nudos	(nn, nn) simétrica
teoría lineal	(np, np) no simétrica
gradiente basado en mallas	(nl, nl) simétrica

Estos requerimientos dan idea del tamaño del problema que debe resolverse, pero no cuenta con la rareza de la matriz, por la que se necesitan pequeñas capacidades de almacenamiento.

En la práctica, gracias a la simetría, el número de elementos no nulos del método del gradiente nodal es equivalente al número de tuberías más el número de nudos, mientras que en el método del gradiente basado en mallas la cantidad de elementos no nulos es igual al número de mallas más el número de tuberías compartidas por diferentes mallas. La teoría lineal es duramente penalizada en lo referente al almacenamiento de datos. Su matriz no simétrica contendrá un número de elementos no nulos igual a tres veces el número de tuberías más una vez el número de tuberías compartidas por diferentes tuberías.

Esto permite seleccionar el método del gradiente basado en mallas como el proceso con menor requerimiento de almacenamiento de datos, seguido por el gradiente nodal, siendo la necesidad de almacenamiento de la teoría lineal mucho mayor.

Aunque ya se han dado algunas indicaciones para elegir el procedimiento adecuado, la última, la eficiencia a la hora de resolver el sistema lineal, es definitivamente la más importante. La solución del sistema debe calcularse más de una vez (en general de 5 a 10 veces), de modo que el método que permita llegar a la solución de manera más eficiente será el más apropiado.

Así como por motivos de requerimiento de espacio a la hora de almacenar datos, la teoría lineal se encontraba muy por debajo de las capacidades de los otros dos métodos en lo que se refiere a la eficiencia a la hora de calcular la solución del sistema, ya que su matriz no simétrica debe invertirse usando métodos directos de eliminación, que en caso de matrices no simétricas dispersas, requerirá un número de operaciones que se incrementará con el cuadrado del número de tuberías.

Los otros dos métodos tienen matrices similares, y a primera vista se podría concluir que el más adecuado es aquél cuya matriz sea de menor tamaño. Esto no es siempre cierto. Asumamos primero que la solución se hallará mediante un proceso iterativo: el número de operaciones para una iteración depende casi linealmente del tamaño de la matriz, pero el número de iteraciones depende del radio espectral de la matriz. Si por otro lado se usa un método directo, lo que es posible gracias a la simetría de la matriz (como una factorización o el método de Gauss), el número de operaciones depende no sólo del tamaño, si no también de la densidad. De hecho, los resultados obtenidos por muchos autores (Hamah y Brameller, 1971, Carpentier, Cohen y Hamah, 1987, Salgado, Todini y O'Connell, 1987), aunque no concluyentes, indican que para la solución del problema mediante el gradiente nodal se necesita menos tiempo que utilizando el método del gradiente basado en mallas.

Todas estas consideraciones están resumidas en la siguiente tabla:

	Gradiente Nodal	Teoría Lineal	Grad. basado en Mallas
<i>simplicidad datos entrada</i>	1	2	2
<i>solución inicial</i>	1	1	2
<i>tamaño del sistema de ecc.</i>	2	3	1
<i>eficiencia de la solución</i>	1	3	2

Esto nos lleva a la conclusión de que la versión nodal propuesta del método de Newton-Raphson, la cual incluye el método híbrido propuesto por Hamah y Brameller como caso particular cuando todos los exponentes n son constantes e iguales a 2, y que

no requiere la definición de mallas, es el proceso más adecuado para solucionar redes de gran tamaño, especialmente usando microcomputadoras o PC's.

A.5. EL ALGORITMO DE FACTORIZACIÓN INCOMPLETA DE CHOLESKI / GRADIENTE CONJUGADO MODIFICADO APLICADO A LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

A continuación se desarrolla un método para resolver el sistema de ecuaciones lineales (A.18-A.19), el cual parece conveniente para la solución de sistemas matriciales usando microcomputadoras o PC's.

Teniendo en cuenta la estructura del sistema matricial A (nn , nn):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (A.30)$$

La naturaleza especial de las matrices A_{12} y A_{21} produce una matriz A con las siguientes características:

- simétrica
- definida positiva
- tipo Stieltjes

cuyos elementos se definen como:

$A(j, j)$	= la suma de $D(i, i)$ en relación a todas las tuberías i conectadas al nudo j = 0 si el nudo j no está conectado al nudo jj
$A(j, jj) = A(jj, j)$	= $-D(i, i)$ si la tubería i conecta el nudo j con el nudo de altura desconocida jj = 0 si la tubería i conecta al nudo j con el nudo de altura conocida jj

Debido a la simetría del sistema, el número de elementos no nulos que se conserva en la matriz es igual, como mucho, al número de nudos (los nn elementos de la diagonal) más el número de tuberías (los np elementos que no pertenecen a la diagonal).

La baja densidad y rareza de la matriz indica que es preferible un proceso iterativo de cálculo antes que procedimientos de cálculo directo. Desafortunadamente, sólo unos pocos elementos de la diagonal principal, aquellos que representan nudos conectados a algunos nudos de altura conocida, son estrictamente dominantes. De hecho, su suma es más grande que la suma de los valores absolutos de los elementos que no pertenecen a la diagonal principal. Esto sólo define un criterio de débil convergencia (Store y Burlish, 1975), y el uso de procedimientos iterativos como el de Jacobi o el de Gauss-Seidel dan lugar a costosos cálculos. Puede obtenerse una mayor convergencia con métodos de sobre-relajación, aunque incrementando el esfuerzo de cálculo necesario para encontrar los parámetros óptimos.

Un método alternativo, que en teoría converge a la solución exacta en un número limitado de pasos, siendo insensible al criterio de débil convergencia, es el método del Gradiente Conjugado (Hestenes y Stiefel, 1952).

Si se reescriben las ecuaciones (A.18-A.19) como sigue:

$$A x = b \quad (A.31)$$

con

$$x = H^{K+1}$$

$$b = -[A2I N^{-1} (Q^K + A1I^{-1} A10 Ho) + (q - A2I Q^K)]$$

siendo la matriz A simétrica y definida positiva, la solución de (A.31) es reconducida a la minimización de la siguiente función cuadrática convexa:

$$J(x) = 1/2 x^T A x - b^T x \quad (A.32)$$

la cual puede ser resuelta usando la formulación iterativa del gradiente conjugado:

$$\begin{aligned} r_o &= Ax_o - b & K &= 0 \\ P_o &= r_o \\ \alpha_K &= \frac{-r_K^T p_K}{p_K^T A p_K} \\ x_{K+1} &= x_K + \alpha_K p_K & K &> 0 \\ r_{K+1} &= r_K + \alpha_K A p_K \\ \beta_{K+1} &= \frac{-r_{K+1}^T A p_K}{p_K^T A p_K} \\ p_{K+1} &= r_{K+1} + \beta_{K+1} p_K \end{aligned} \quad (A.33)$$

En álgebra exacta esta formulación converge como mucho en nn pasos, siendo nn el rango de la matriz A , pero debido a errores el número de pasos puede ser mucho mayor (de 2 a 2,5 veces nn). Aunque el número de operaciones necesario en cada paso es pequeño, debido a la baja densidad de A , esta formulación puede no ser adecuada para problemas de nn próximo a 1000.

Kershaw, 1978, y más recientemente Ajiz y Jennings, 1984, han propuesto versiones modificadas del gradiente conjugado, que adecuan el métodos a grandes problemas. Como se ha mencionado anteriormente, debido a la rareza de A , cuando se trata con grandes redes, los métodos directos no son apropiados para resolver estos problemas, ya que aumentan la ocupación de memoria así como el esfuerzo de cálculo. Gracias a la simetría de la matriz A y a que ésta es definida positiva, es posible realizar una factorización de Choleski para obtener:

$$A = L L^T \quad (A.34)$$

y el sistema (A.31) puede entonces resolverse en dos pasos:

$$\begin{aligned} y &= L^{-1}b \\ x &= (L^T)^{-1}y \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Desafortunadamente, si se lleva a cabo la factorización completa de Choleski el número de elementos no nulos en la matriz original se modifica de manera más o menos impredecible, lo que impide de nuevo su utilización para grandes sistemas. Kershaw propuso el uso de la llamada factorización incompleta de Choleski con el objetivo de obtener una aproximación de la inversa de A para ser usada como factor condicionante en el algoritmo del gradiente conjugado. La factorización de Choleski se lleva a cabo sólo en los elementos no nulos de la matriz A : esto es siempre posible, si A es una matriz tipo Stieltjes. La matriz A se descompone entonces como:

$$A \cong M M^T \quad (\text{A.36})$$

donde M es una matriz triangular inferior cuyos elementos no nulos corresponden a los elementos no nulos de la matriz A (como mucho $nn + np$). Usando M , la formulación del gradiente conjugado modificado se convierte en:

$$\begin{aligned} r_o &= Ax_o - b & K &= 0 \\ P_o &= r_o \\ \alpha_K &= \frac{-r_K^T p_K}{p_K^T A p_K} \\ x_{K+1} &= x_K + \alpha_K p_K & K &> 0 \\ r_{K+1} &= r_K + \alpha_K A p_K \\ s_{K+1} &= (M^T)^{-1} M^{-1} r_{K+1} \\ \beta_{K+1} &= \frac{-r_{K+1}^T A p_K}{p_K^T A p_K} \\ p_{K+1} &= r_{K+1} + \beta_{K+1} p_K \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Las propiedades de convergencia de ésta y otras formulaciones similares (generalmente se llega a la convergencia en 30-50 iteraciones, incluso para sistemas extremadamente grandes) discutidas por Kershaw, 1978, y por Ajiz y Jennings, 1984, combinadas con un número limitado de operaciones (linealmente proporcionales a nn) y con la cantidad necesaria de memoria informática (512 kb para $nn=1000$ y $np=2000$) convierten a esta formulación particularmente útil para la solución de grandes y complejas redes mediante pequeñas máquinas, como son los ordenadores personales disponibles.

A.6. CONCLUSIONES

Como se ha mostrado, con el objetivo de encontrar la solución del sistema de ecuaciones en parte lineales y en parte no lineales que describen el problema de análisis de flujos, la aplicación del método de Newton-Raphson, si se prueba la existencia y unicidad de la solución, nos lleva a una formulación convergente. Tras el análisis

comparativo de la formulación propuesta frente a la de la teoría lineal y al método del gradiente basado en mallas, se considera como la mejor vía hacia la obtención de la solución de nuestro problema. Sus aplicaciones prácticas, con las cuales se han manipulado redes ramificadas y malladas, dan más valor a sus propiedades de convergencia (Salgado et al., 1987), que no se ven afectadas ni por la elección de la solución inicial ni por la complejidad de la red. Además, las características especiales del sistema de ecuaciones lineales que se obtiene, el cual puede resolverse en cada paso mediante el algoritmo de la factorización incompleta de Choleski / Gradiente Conjugado Modificado, permite su uso en ordenadores personales incluso en casos extremos de grandes y complejas redes.

A.7. REFERENCIAS

AJIZ M. A. y JENNINGS A.: (1984), A robust incomplete Choleski conjugate gradient algorithm, International Journal for numerical methods in engineering, Vol. 20, pp. 949-966.

AYRES, F.: (1962), "Theory and problems of matrices", Mc.Graw-Hill Co., New York.

CAO C. : (1963), Sulla convergenza del metodo di Cross, Atti VIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Pisa.

CARPENTIER P., COHEN G. y HAMAM Y.M.: (1987), Water network equilibrium variational formulation and comparison of numerical algorithms.

COLLINS M.A., COOPER L., HELGASON R., KENNINGTON J. y LE BLANC L.: (1978), Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques, Management Science, 24, 7, pp. 747-760.

CONTRO R. y FRANZETTI S.: (1982), A new objective function for analyzing hydraulic pipe networks in the presence of different states of flow, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Istituto di Idraulica del Politecnico di Milano.

CROSS H.: (1936), Analysis of flow in networks of conduits or conductors, Bulletin N° 286, University of Illinois, Engineering Experimental Station, Urbana, Illinois.

HAMAM Y.M. y BRAMELLER A.: (1971), Hybrid method for the solution of piping networks, Proc. IEE, Vol. 118, N.11, pp. 1607-1612.

HESTENES M.R. y STIEFEL E.: (1952), Methods of conjugate gradients for solving linear systems, National Bureau of Standards J. Res., 49, pp. 409-436.

KERSHAW D.: (1978), The incomplete Choleski-Conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations, Journal of Computational Physics, 26, pp.43-65.

MARTIN D.W. y PETERS G.: (1963), The application of Newton's method to network analysis by digital computer, Journal IWES, p.115.

PILATI S. y TODINI E.: (1984), La verifica delle reti idrauliche in pressione, Istituto di Costruzioni Idrauliche, Facoltà di Ingegneria dell' Università di Bologna.

SALGADO R., TODINI E. y O'CONNELL P.E.: (1987), Comparison of the gradient method with some traditional methods for the analysis of water supply distribution networks, Int. Conf. on Computer Applications for Water Supply and Distribution, Leicester, U.K.

SHAMIR U. y HOWARD C.D.D.: (1968), Water distribution systems analysis, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 94, N° HY1.

STOER J. y BURLISH R.: (1975), "Introduzione all'analisi numerica", Zanachelli, Bologna.

TODINI E.: (1979), Un metodo del gradiente per la verifica delle reti idrauliche, Bollettino degli Ingegneri della Toscana, N°11, pp. 11-14.

WARGA J.: (1954), Determination of steady-state flows and currents in a network, Instrument Society of America, Vol.9, Pt. 5, Paper 54-43-4.

WOOD D.J. y CHARLES C.O.A.: (1972), Hydraulic network analysis using linear theory, Journal of the Hydraulics division, ASCE, Vol.98, N° HY7, pp. 1157-1170.

APÉNDICE B. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN NODAL EN REDES MALLADAS

En la gran mayoría de los casos prácticos el problema hidráulico relacionado con las redes de distribución se aplica en abastecimiento de agua a poblaciones y puede formularse de la siguiente manera: determinado el caudal de ingreso en la red, el cual es equivalente a la totalidad del consumo, se distribuyen las demandas asociándolas a los nudos de la malla. A continuación se estima un conjunto preliminar de valores de diámetros y se calculan las pérdidas en cada tramo. Se verifica, entonces, que las presiones en los nudos y las velocidades en las líneas se encuentren entre los valores límites recomendados para ambas magnitudes. Si no es así, se rectifican los diámetros originalmente supuestos, reiniciándose el cálculo.

La problemática hidráulica de las redes también puede abordarse desde un punto de vista más general, según el cual sólo se supone conocida la distribución espacial del consumo. En este caso se trata de definir la configuración espacial de la red, así como las características de las tuberías de manera que la inversión económica sea mínima y se respeten las restricciones de cada situación particular. Este segundo problema está fuera del alcance de este proyecto, estudiando aquí únicamente el primero de los casos citados.

Consideremos la red mallada de la figura B.1.:

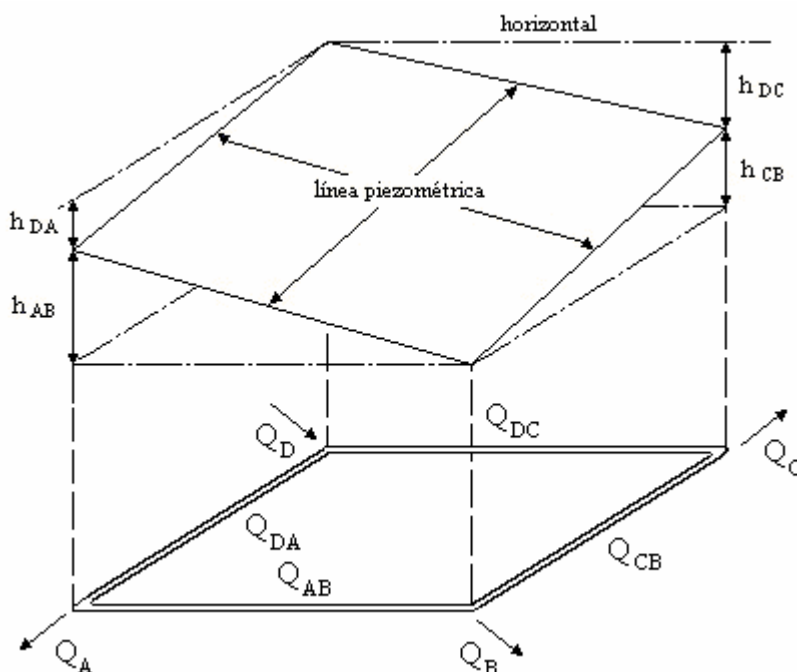


Fig. B.1. Esquema de línea de presión en malla típica.

Se suponen conocidos el caudal que ingresa en la red en el nudo D (Q_D), su altura piezométrica, las demandas en cada nudo (Q_A , Q_B , Q_C) y las características de las tuberías. Las incógnitas en este problema son los caudales circulantes por las tuberías.

Aplicando la condición de continuidad en cada nudo, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} Q_A &= Q_{DA} - Q_{AB} & Q_B &= Q_{CB} + Q_{AB} \\ Q_C &= Q_{DC} - Q_{CB} & Q_D &= Q_{DA} + Q_{DC} \end{aligned}$$

Sin embargo, puede observarse que cualquiera de estas ecuaciones puede obtenerse por combinación lineal de las restantes, de manera que si existen N nudos en la red se podrán plantear $N-1$ ecuaciones fundamentales de continuidad. La ecuación adicional requerida para definir el sistema de 4 incógnitas procede del principio de energía. En efecto, las pérdidas por fricción se podrán expresar con relaciones del tipo:

$$h_f = A Q^B \quad (\text{B.1})$$

En los cálculos de la gran mayoría de los casos, A se puede tratar como una constante definida por el diámetro, rugosidad y longitud de las tuberías. El exponente B dependerá de la ecuación utilizada para evaluar las pérdidas de energía. Si se utiliza la ecuación de Hazen-Williams, $B = 1.852$ y A :

$$A = \frac{10.674 L}{D^{4.871}} \left(\frac{1}{C} \right)^{1.852} \quad (\text{B.2})$$

mientras que según la ecuación de Darcy-Weisbach, $B = 2$ y A :

$$A = 8f \frac{L}{\pi^2 g D^5} \quad (\text{B.3})$$

En el cálculo hidráulico de redes es usual tomar en cuenta las pérdidas localizadas de energía con el concepto de longitud equivalente. Entonces, observando la figura B.1 se puede considerar que las pérdidas de energía deben resultar las mismas según la trayectoria DAB y la DCB , de donde obtenemos la siguiente expresión, complementaria a las de continuidad:

$$(AQ^B)_{DA} + (AQ^B)_{AB} = (AQ^B)_{DC} + (AQ^B)_{CB} \quad (\text{B.4})$$

Una ecuación como la B.4 podrá formularse para cada una de las L mallas de la red, de tal manera que se dispondrá de $(N-1) + L$ ecuaciones, que es, además, el número de tramos o el número de caudales desconocidos, con lo cual resulta determinado el sistema de ecuaciones. Debe notarse que tal sistema es no lineal, y que su resolución se obtiene generalmente por procesos iterativos.

B.1. EJEMPLO PRÁCTICO 1

La red mostrada en la figura B.2 está contenida en un plano horizontal. Se pide determinar los caudales en las líneas y las presiones en los nudos *B* y *C*. Las pérdidas de energía están definidas por las siguientes expresiones:

$$(h_f)_{AC} = 500 Q_1^2$$

$$(h_f)_{AB} = 200 Q_3^2$$

$$(h_f)_{BC} = 200 Q_2^2$$

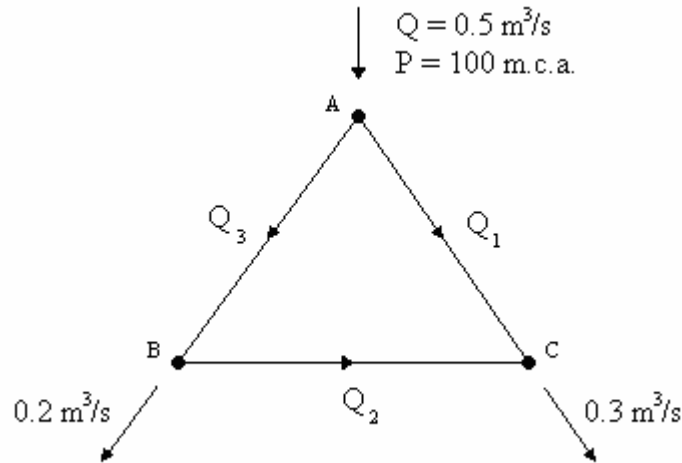


Fig. B.2. Esquema red ejemplo 1º.

donde se expresa h_f en metros y Q en m^3/s .

B.1.1. Solución algebraica

Primeramente se supone que el sentido del caudal Q_2 es de *B* a *C*, lo que se comprueba posteriormente si realizados los cálculos, la energía en *B* resulta mayor que en *C*. En este caso se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

- Continuidad:

$$Q_1 + Q_3 = 0.5 \quad (\text{B.5})$$

$$Q_1 + Q_2 = 0.3 \quad (\text{B.6})$$

- Energía:

$$500 \cdot Q_1^2 = 200 \cdot Q_3^2 + 200 \cdot Q_2^2 \quad (\text{B.7})$$

$$5 \cdot Q_1^2 = 2 \cdot Q_3^2 + 2 \cdot Q_2^2$$

De las ecuaciones (B.5) y (B.6) se obtienen las siguientes:

$$Q_3^2 = (0.5 - Q_1)^2 \quad (\text{B.8})$$

$$Q_2^2 = (0.3 - Q_1)^2 \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo (B.8) y (B.9) en (B.7):

$$Q_1^2 + 3.20 \cdot Q_1 - 0.68 = 0 \quad (\text{B.10})$$

Las raíces de la ecuación 10 son $Q_1 = -3.4 \text{ m}^3/\text{s}$ y $Q'_1 = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$. Elegimos la raíz positiva que nos indica que el sentido asignado a Q_1 , de A hacia C, es correcto.

Con el valor de Q_1 y las ecuaciones (B.8) y (B.9), se obtienen los caudales Q_2 y Q_3 :

$$\begin{aligned} Q_2 &= 0.1 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_3 &= 0.3 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Por otra parte, siempre que la red esté contenida en un plano horizontal, las alturas piezométricas serán equivalentes a la altura de presión en cada nudo:

$$H_C = P_C = H_A - (h_f)_{AC}$$

de modo que:

$$P_C = 100 - 500 \cdot 0.2^2 = 80 \text{ m.c.a.}$$

Igualmente para P_B :

$$P_B = 100 - 200 \cdot 0.3^2 = 82 \text{ m.c.a.}$$

Como se observa, la hipótesis original en cuanto a la dirección de Q_2 se verifica ya que $P_B > P_C$.

La solución matemática del problema anterior es cada vez menos factible cuanto mayor es el número de mallas que forman la red. Por eso, en la práctica, el cálculo hidráulico se lleva a cabo con métodos numéricos, siendo los más extendidos los de Newton-Raphson y Hardy-Cross.

En los métodos señalados, se seleccionan valores iniciales arbitrarios, ya sea las alturas piezométricas en los nudos, o los caudales en los tramos; aplicando luego correcciones iterativas, haciéndolas intervenir en los cálculos de forma tal que tiendan a verificar las ecuaciones de continuidad y de energía, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

- Con referencia a las mallas de la figura B.3, concentradas las demandas q_j en los nudos, se asignan a los caudales circulantes por las líneas unos valores iniciales Q_i , que respeten la ecuación de continuidad en los nudos.

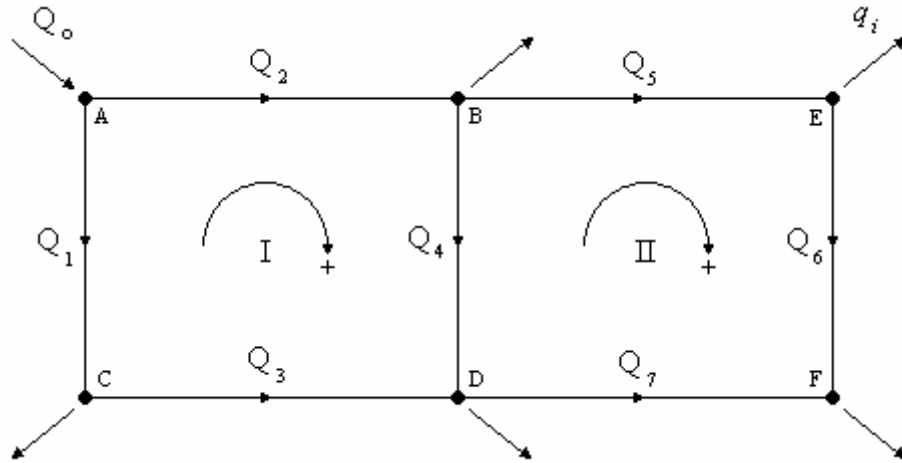


Fig. B.3. Red mallada.

Por ejemplo, para la malla II:

$$q_i = Q_5 - Q_6$$

- Para conservar el balance energético, es necesario asignar un signo a los caudales circulantes, por ejemplo, positivos si circulan según las agujas del reloj y negativos si lo hacen en sentido contrario. Así, referidos a los nudos *D* y *F* de la figura B.3, resultan las siguientes ecuaciones de energía:

$$A_2 Q_2 |Q_2|^{B-1} + A_4 Q_4 |Q_4|^{B-1} - A_1 Q_1 |Q_1|^{B-1} - A_3 Q_3 |Q_3|^{B-1} = 0$$

(balance energético entre *A* y *D*)

$$A_5 Q_5 |Q_5|^{B-1} + A_6 Q_6 |Q_6|^{B-1} - A_4 Q_4 |Q_4|^{B-1} - A_7 Q_7 |Q_7|^{B-1} = 0$$

(balance energético entre *B* y *F*)

- Para mantener la continuidad en los nudos, las correcciones ΔQ_i calculadas por cualquier método, serán únicas para cada malla y se sumarán algebraicamente a los caudales supuestos inicialmente en la etapa anterior.

B.1.2. Solución numérica por el método de Newton-Raphson

Como ya se ha comentado, en la resolución de redes hidráulicas resultan ecuaciones no lineales para cuya resolución el cálculo numérico ofrece diversas alternativas. Entre ellas, el procedimiento de Newton-Raphson ha sido amplia y eficazmente utilizado.

A continuación se resuelve nuevamente, mediante la formulación del método de Newton-Raphson, cuyo desarrollo se puede consultar en el apéndice A, el problema anterior, uno de cuyos caudales se determinó mediante la ecuación (B.10), obteniéndose el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} f(Q_1) &= Q_1^2 + 3.20 \cdot Q_1 - 0.68 = 0 \\ Q_1 &= 0.2 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

El método de Newton-Raphson consiste en la determinación de una raíz aislada del problema mediante aproximaciones sucesivas aplicando la siguiente expresión de recurrencia, indicada en el apéndice C:

$$Q_{1,n+1} = Q_{1,n} - \frac{f(Q_{1,n})}{f'(Q_{1,n})} \quad (\text{B.11})$$

Para aplicar la ecuación (B.11), se debe obtener la derivada de la expresión (B.10):

$$\frac{df(Q_1)}{dQ_1} = 2 \cdot Q_1 + 3.2 \quad (\text{B.12})$$

Seleccionando el valor inicial:

$$Q_{1,o} = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (B.10) y (B.12):

$$\begin{aligned} f(Q_{1,o}) &= (0.3)^2 + 3.20 \cdot (0.3) - 0.68 = 0.37 \\ f'(Q_{1,o}) &= 2 \cdot (0.3) + 3.2 = 3.8 \end{aligned}$$

Llegados a este punto tenemos todos los términos de la ecuación (B.11), siendo posible la obtención del valor mejorado de $Q_{1,o}$:

$$Q_{1,1} = 0.3 - \frac{0.37}{3.8} = 0.2026 \text{ m}^3/\text{s}$$

Con $Q_{1,1}$ se calculan de nuevo las ecuaciones (B.11) y (B.12):

$$\begin{aligned} f(Q_{1,1}) &= (0.2026)^2 + 3.20 \cdot (0.2026) - 0.68 = 0.00938 \\ f'(Q_{1,1}) &= 2 \cdot (0.2026) + 3.2 = 3.6052 \end{aligned}$$

resultando un nuevo valor, $Q_{1,2}$, casi idéntico al calculado anteriormente, $Q_1 = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$:

$$Q_{1,2} = 0.2026 - \frac{0.00938}{3.6052} = 0.19999 \text{ m}^3/\text{s}$$

B.2. EJEMPLO PRÁCTICO 2

A continuación se resuelve, por el método de Newton-Raphson, la red mostrada en la figura B.4. Los valores entre paréntesis que contiene corresponden a la solución analítica exacta. Las pérdidas por fricción se han estimado con la ecuación de Darcy-Weisbach, considerando constante el factor de fricción. Así resultan las siguientes expresiones:

$$(h_f)_{AB} = 50 \cdot Q_1^2$$

$$(h_f)_{BD} = 100 \cdot Q_2^2$$

$$(h_f)_{AC} = 100 \cdot Q_3^2$$

$$(h_f)_{DC} = 800 \cdot Q_4^2$$

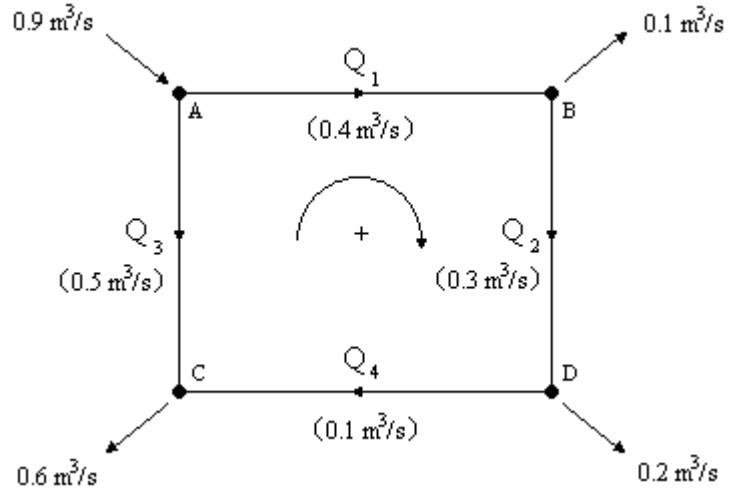


Fig. B.4. Esquema red ejemplo 2°.

donde se expresa h_f en metros y Q en m^3/s .

La ecuación de recurrencia B.11 se generaliza para el sistema de ecuaciones B.13 de n ecuaciones simultáneas con n incógnitas mediante las expresiones B.14:

$$\begin{aligned} f_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ f_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Las correcciones que mejoran una solución aproximada $(Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o})$ están determinadas por las n ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}) + \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} \delta Q_{1,o} + \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} \delta Q_{2,o} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial Q_n} \delta Q_{n,o} &= 0 \\ f_2(Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}) + \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} \delta Q_{1,o} + \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} \delta Q_{2,o} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial Q_n} \delta Q_{n,o} &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}) + \frac{\partial f_n}{\partial Q_1} \delta Q_{1,o} + \frac{\partial f_n}{\partial Q_2} \delta Q_{2,o} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial Q_n} \delta Q_{n,o} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Como solamente existe una malla en la red, únicamente se definirá una función $f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ a introducir en la expresión B.14. Esta función corresponde a la ecuación de balance energético en dicha malla:

$$f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 50 Q_1 |Q_1| + 100 Q_2 |Q_2| + 800 Q_4 |Q_4| + 100 Q_3 |Q_3| \quad (\text{B.15})$$

o bien, teniendo en cuenta el sentido de los caudales:

$$f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = 50 Q_1^2 + 100 Q_2^2 + 800 Q_4^2 - 100 Q_3^2 \quad (\text{B.16})$$

quedando las expresiones (B.14) reducidas a:

$$\begin{aligned} & (50 Q_{1,o}^2 + 100 Q_{2,o}^2 + 800 Q_{4,o}^2 - 100 Q_{3,o}^2) + \\ & + 2 \cdot 50 \cdot |Q_{1,o}| \cdot \delta Q + 2 \cdot 100 \cdot |Q_{2,o}| \cdot \delta Q + \\ & + 2 \cdot 800 \cdot |Q_{4,o}| \cdot \delta Q + 2 \cdot 100 \cdot |Q_{3,o}| \cdot \delta Q = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

es decir:

$$\delta Q = - \frac{(50 Q_{1,o}^2 + 100 Q_{2,o}^2 + 800 Q_{4,o}^2 - 100 Q_{3,o}^2)}{2 \cdot 50 \cdot |Q_{1,o}| + 2 \cdot 100 \cdot |Q_{2,o}| + 2 \cdot 800 \cdot |Q_{4,o}| + 2 \cdot 100 \cdot |Q_{3,o}|} \quad (\text{B.18})$$

Llegados a este punto se asignan los valores y sentidos iniciales a $Q_{1,o}$, $Q_{2,o}$, $Q_{3,o}$ y $Q_{4,o}$, con la condición de que cumplan la ecuación de continuidad en nudos, como los siguientes:

$$\begin{aligned} Q_{1,o} &= 0.5 \text{ m}^3/\text{s} & Q_{2,o} &= 0.4 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_{3,o} &= 0.4 \text{ m}^3/\text{s} & Q_{4,o} &= 0.2 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (B.18) se obtiene el primer factor de corrección:

$$\delta Q = - 0.0839 \text{ m}^3/\text{s}$$

este valor se le resta a $Q_{1,o}$, $Q_{2,o}$ y $Q_{4,o}$ (orientados según las agujas del reloj) y se le suma a $Q_{3,o}$ (orientado en sentido contrario). Así se obtiene el segundo conjunto mejorado de caudales:

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= 0.416 \text{ m}^3/\text{s} & Q_{2,1} &= 0.316 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_{3,1} &= 0.484 \text{ m}^3/\text{s} & Q_{4,1} &= 0.116 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

los cuales se introducen de nuevo en la ecuación (B.18), obteniendo el factor de corrección para la segunda iteración:

$$\delta Q = - 0.01544 \text{ m}^3/\text{s}$$

Con este valor calculamos de nuevo los caudales circulantes, finalizando aquí el proceso ya que se consideran suficientemente aproximados:

$$\begin{aligned} Q_{1,2} &= 0.4006 \text{ m}^3/\text{s} & Q_{2,2} &= 0.3006 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_{3,2} &= 0.4994 \text{ m}^3/\text{s} & Q_{4,2} &= 0.1006 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Obsérvese que la resolución del sistema de ecuaciones (B.14) no ofrece el valor final de las incógnitas, los caudales circulante en este caso, sino un caudal corrector con el que ir aproximándonos sucesivamente a la solución.

APÉNDICE C. CONCEPTOS MATEMÁTICOS

C.1. MODELOS DE OPTIMIZACIÓN: CONTENT MODEL

En este apartado se presenta un modelo de optimización no lineal con cuya solución óptima se obtienen flujos en estado permanente en redes de abastecimiento, siendo el flujo la variable de decisión. Sin embargo, como es común en la práctica, se utilizan alturas hidráulicas en lugar de presiones.

Se adopta una topología de la red definida por el conjunto de nudos N y por el conjunto de líneas E . Para simplificar la representación asumimos que por las líneas de la red circulan flujos no nulos. Por el mismo motivo admitimos que se conocen las direcciones de los flujos en cada línea. Estas simplificaciones no añaden dificultades matemáticas, sino que facilitan la notación.

Se define Q_{ij} para cada $(i, j) \in E$ como el flujo desde el nudo i hacia el nudo j , y H_n para cada $n \in N$ como la altura en el nudo n . Como la altura en los embalses es fija (por definición los embalses son nudos con altura fija) definimos $R \subset N$ como el conjunto de nudos correspondientes a embalses y H_n^* para todo $n \in R$ como la altura en los embalses correspondientes. A su vez, r_n para todo $n \in N$ denota las demandas en el nudo n . Las demandas positivas implican entradas de caudal en la red, mientras que las demandas negativas suponen salidas. A continuación se representa en la figura 1 una típica red de abastecimiento.

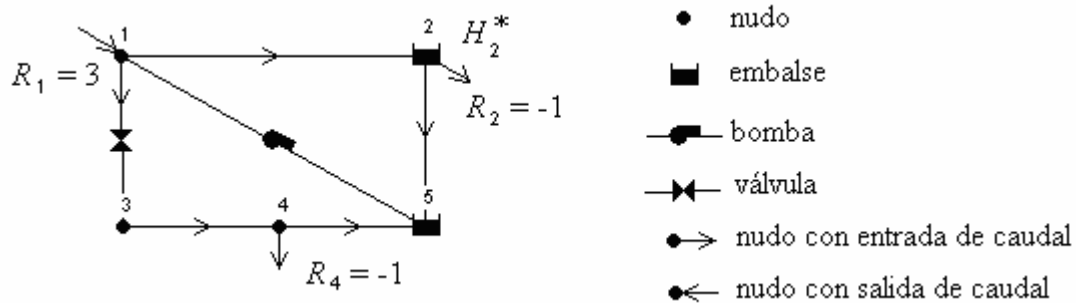


Fig. C.1. Ejemplo de red de abastecimiento.

C.1.1. Content Model (Collins et al.)

Para contabilizar el flujo que entra o sale del sistema desde o hacia fuentes externas, se añade un nudo ficticio g . Este nudo ficticio se conecta a cada embalse por dos tuberías con direcciones de flujo opuestas. Estas nuevas líneas vienen dadas por la siguiente expresión $E_l = \{ (n, g), (g, n) : n \in R \}$. La demanda en el nudo ficticio es el conjunto de $-\sum_{n \in N} r_n$. En la figura C.2 se muestra una red ampliada con un nudo ficticio.

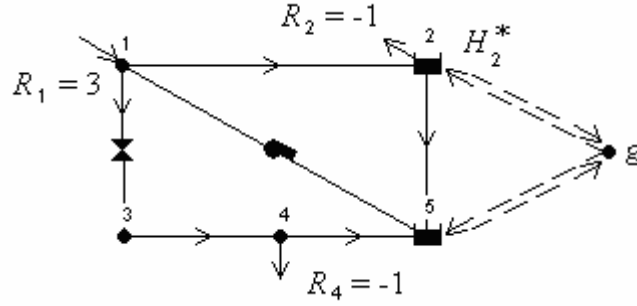


Fig. C.2. Ejemplo de red de abastecimiento con nudo ficticio.

Las condiciones puntuales que deben cumplirse para que se dé flujo permanente son las siguientes:

(i) Conservación de flujo:

$$\sum_{(n,j) \in E \cup E_1} Q_{nj} - \sum_{(i,n) \in E \cup E_1} Q_{in} = r_n \quad \text{para todo } n \in N \cup \{g\} \quad (C.1)$$

(ii) Comportamiento de la altura de descarga:

$$H_i - H_j = \Phi_{ij}(Q_{ij}) \quad \text{para todo } (i,j) \in E \quad (C.2)$$

(iii) Condiciones de altura en los embalses:

$$H_n = H_n^* \quad \text{para todo } n \in R \quad (C.3)$$

Considerando el siguiente problema no lineal:

$$\text{minimizar } \left\{ \sum_{(i,j) \in E} \left\{ \int_0^{Q_{ij}} \Phi(t) dt \right\} - \sum_{(g,n) \in E_1} \left\{ \int_0^{Q_{gn}} H_n^* dt \right\} + \sum_{(n,g) \in E_1} \left\{ \int_0^{Q_{ng}} H_n^* dt \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a : } & \sum_{(n,j) \in E \cup E_1} Q_{nj} - \sum_{(i,n) \in E \cup E_1} Q_{in} = r_n \quad \text{para todo } n \in N \cup \{g\} \\ & Q_{ij} \geq 0 \quad \text{para todo } (i,j) \in E \cup E_1 \end{aligned}$$

En la terminología de Cherry y Millar, el problema reside en encontrar el conjunto de valores de flujo que satisfaga la ley de conservación de flujo minimizando el sistema anterior, conocido como Content Model.

Asumiendo que:

- (i) $\Phi_{ij}(Q_{ij})$ es continua para todo $Q_{ij} \geq 0$
- (ii) $\Phi_{ij}(Q_{ij})$ es monótona creciente

entonces el primer supuesto (i) garantiza que la función es diferenciable mientras que gracias al segundo supuesto (ii) podemos asegurar que es convexa. A continuación se muestra como un óptimo del Content Model cumple con las ecuaciones (C.1), (C.2) y (C.3).

PROPUESTA: Si $Q_{ij}^* \neq 0$ para todo $(i, j) \in E$ denota un óptimo del Content Model, entonces esos flujos satisfacen (C.1), (C.2) y (C.3).

PRUEBA: Como el conjunto de Q_{ij}^* es solución para el Content Model, la ley de conservación de flujo (C.1) se satisface automáticamente. Por el teorema de Kuhn-Tucker existe un conjunto de u_n tales que

$$\Phi_{ij}(Q_{ij}^*) = u_i - u_j \quad \text{para todo} \quad (i, j) \in E \quad (\text{C.4})$$

y

$$H_n^* = u_n - u_g \quad \text{para todo} \quad n \in R \quad (\text{C.5})$$

Pero (C.4) es (C.2) con el conjunto de u_n en el papel de las alturas de presión en los nudos. Como el sistema de ecuaciones (C.4) no es un conjunto independiente, podemos asignar un valor arbitrario a un u_n (es decir, una altura de referencia). Así, si $u_g = 0$, entonces (C.5) se reduce a $H_n^* = u_n$ para todo $n \in R$. Por esto (C.5) es equivalente a (C.3).

C.2. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

El método de Newton, también llamado método de Newton-Raphson, es un algoritmo de búsqueda de raíces, que utiliza los primeros términos de la serie de Taylor de la función $f(x)$ en la proximidad de una posible raíz.

Si $f(x)$ es un polinomio, el método de Newton es esencialmente el mismo que el método de Horner.

La serie de Taylor para $f(x)$ en el punto $x = x_o + \varepsilon$ es la siguiente:

$$f(x_o + \varepsilon) = f(x_o) + f'(x_o) \varepsilon + \frac{1}{2} f''(x_o) \varepsilon^2 + \dots \quad (\text{C.6})$$

quedándonos sólo con los términos de primer orden:

$$f(x_o + \varepsilon) \approx f(x_o) + f'(x_o) \varepsilon \quad (\text{C.7})$$

Esta expresión puede usarse para estimar el valor de ε necesario para acercarnos a la raíz, empezando desde una solución inicial $x = x_o$. Si $f(x_o + \varepsilon) = 0$ y resolviendo para $\varepsilon = \varepsilon_o$ se obtiene:

$$\varepsilon_o = -\frac{f(x_o)}{f'(x_o)} \quad (\text{C.8})$$

que es la primera aproximación hacia la posición de la raíz. Gráficamente:

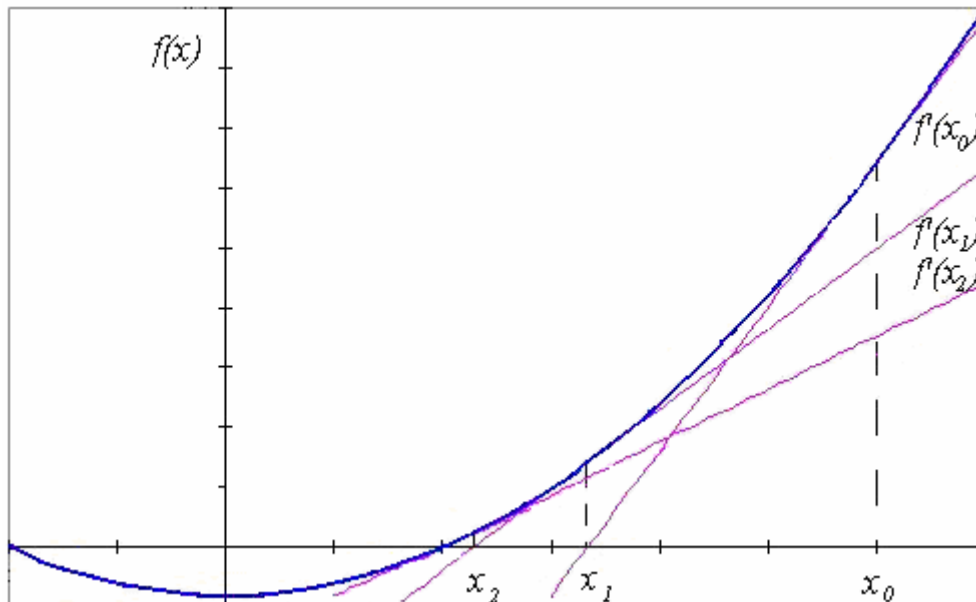


Fig. C.3. Representación gráfico del método de Newton.

De modo que a partir de $x_1 = x_o + \varepsilon_o$, podemos calcular un nuevo ε_1 , repitiendo este procedimiento hasta que el método converja, mediante la siguiente expresión:

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{C.9})$$

Desafortunadamente este procedimiento puede ser inestable cerca de asíntotas horizontales o en las proximidades de extremos relativos. Sin embargo, con una buena elección de la posición de x_o , el algoritmo puede aplicarse iterativamente obteniendo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{C.10})$$

Analizando la convergencia, observamos que el método de Newton-Raphson converge cuadráticamente, es decir, el error de la siguiente iteración se puede expresar como función del cuadrado del error de la iteración anterior, según la expresión (C.16):

El error ε_{n+1} que se obtiene tras la $n+1$ iteración es:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + (x_{n+1} - x_n) \quad (\text{C.11})$$

$$= \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{C.12})$$

pero

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(x_{n-1})\varepsilon_n^2 + \dots \\ &= f'(x_{n-1})\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(x_{n-1})\varepsilon_n^2 + \dots \\ f'(x_n) &= f'(x_{n-1}) + f''(x)\varepsilon_n + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.13}), (\text{C.14})$$

así que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(x_{n-1})\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(x_{n-1})\varepsilon_n^2 + \dots}{f'(x_{n-1}) + f''(x_{n-1})\varepsilon_n + \dots} \\ &\approx \frac{f'(x_{n-1})\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(x_{n-1})\varepsilon_n^2}{f'(x_{n-1})} \\ &= \varepsilon_n + \frac{f''(x_{n-1})}{2f'(x_{n-1})}\varepsilon_n^2 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

lo que se convierte en:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n - \left[\varepsilon_n \frac{f''(x_{n-1})}{2f'(x_{n-1})}\varepsilon_n^2 \right] \\ &= -\frac{f''(x_{n-1})}{2f'(x_{n-1})}\varepsilon_n^2 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

La fórmula de recurrencia (C.10) es generalizable a n ecuaciones simultáneas con n incógnitas:

$$\begin{aligned} f_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ f_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \end{aligned} \quad (C.17)$$

Las correcciones que mejoran una solución aproximada ($Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}$) están determinadas por las n ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}) + \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} \delta Q_{1,o} + \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} \delta Q_{2,o} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial Q_n} \delta Q_{n,o} &= 0 \\ f_2(Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}) + \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} \delta Q_{1,o} + \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} \delta Q_{2,o} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial Q_n} \delta Q_{n,o} &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}) + \frac{\partial f_n}{\partial Q_1} \delta Q_{1,o} + \frac{\partial f_n}{\partial Q_2} \delta Q_{2,o} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial Q_n} \delta Q_{n,o} &= 0 \end{aligned} \quad (C.18.a)$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial Q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial Q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial Q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial Q_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta Q_{1,o} \\ \delta Q_{2,o} \\ \dots \\ \delta Q_{n,o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_n \end{pmatrix} \quad (C.18.b)$$

donde se entiende que las funciones y sus derivadas se evalúan con la solución inicialmente supuesta ($Q_{1,o}, Q_{2,o}, \dots, Q_{n,o}$). Nótese que el primer término es la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones. La resolución del sistema permite obtener las correcciones δQ_n que mejoran el conjunto inicial de soluciones propuesto.

En ecuaciones anteriores, aplicadas a redes de tuberías, las funciones f corresponden a los balances energéticos (uno por cada malla o circuito) y las correcciones de caudales δQ deben tomarse únicas por cada malla, para preservar la continuidad en los nudos.

Por ejemplo, para la malla I de la figura C.1, la ecuación f será la siguiente:

$$f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = A_2 Q_2 |Q_2|^{B-1} + A_4 Q_4 |Q_4|^{B-1} - A_1 Q_1 |Q_1|^{B-1} - A_3 Q_3 |Q_3|^{B-1} = 0 \quad (C.19)$$

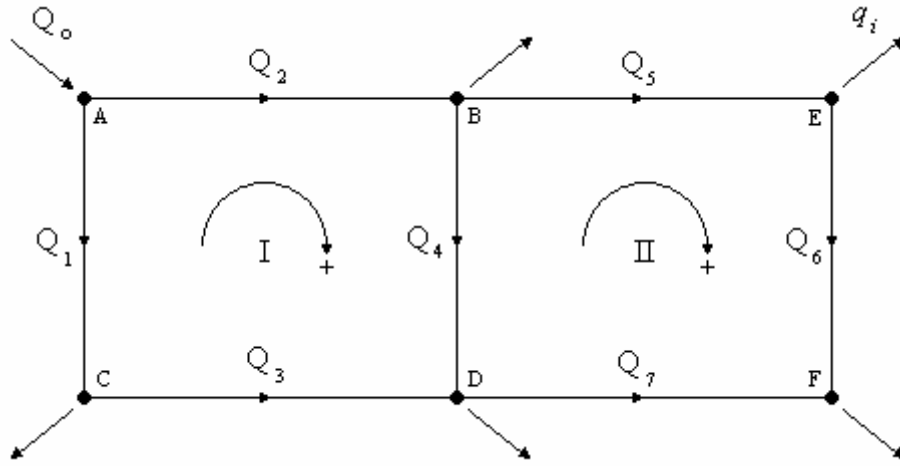


Fig. C.1. Red mallada.

y, en general para una malla de N líneas:

$$f = \sum_1^N A_i |Q_i|^{B-1} \quad (\text{C.20})$$

en las que se ha introducido el valor absoluto para tener en cuenta el sentido de los caudales.

Por otra parte, la derivada parcial de f con respecto a un caudal genérico Q_i será:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = A_i |Q_i|^{B-1} + A_i (B-1) Q_i |Q_i|^{B-2} \frac{\partial |Q_i|}{\partial Q_i} \quad (\text{C.21})$$

Si Q_i es positivo:

$$\begin{aligned} Q_i &= |Q_i| \\ \frac{\partial |Q_i|}{\partial Q_i} &= +1 \end{aligned}$$

y la ecuación (C.21) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = A_i |Q_i|^{B-1} + A_i (B-1) |Q_i|^{B-2} |Q_i|$$

o bien:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = B A_i |Q_i|^{B-1} \quad (\text{C.22})$$

Si Q_i es negativo:

$$\begin{aligned} -Q_i &= |Q_i| \\ \frac{\partial |Q_i|}{\partial Q_i} &= -1 \end{aligned}$$

y la ecuación (C.21) se puede expresar como:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = A_i |Q_i|^{B-1} + A_i (B-1) |Q_i|^{B-2} (-1) Q_i (-1)$$

o bien:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = BA_i |Q_i|^{B-1} \quad (C.23)$$

idéntica a la ecuación (C.22). En consecuencia la ecuación (C.18) puede expresarse de la siguiente manera:

$$f_n(Q_{1,1}, Q_{2,1}, \dots, Q_{n,1}) + BA_1 |Q_{1,1}|^{B-1} \delta Q + BA_2 |Q_{2,1}|^{B-1} \delta Q + \dots + BA_n |Q_{n,1}|^{B-1} \delta Q = 0 \quad (C.24)$$

de la cual puede obtenerse la corrección δQ y los caudales corregidos $Q_{i,2} = Q_{i,1} + \delta Q$. El conjunto de valores $(Q_{1,1}, Q_{2,1}, \dots, Q_{n,1})$ corresponden a los caudales circulantes de la iteración anterior. Nótese que el caudal en un tramo común a dos mallas estará sujeto a las dos correcciones que resulten de cada iteración.

Si el método de Newton-Raphson se aplica a redes de varias mallas, las n ecuaciones f se resuelven simultáneamente, obteniéndose las correcciones $(\delta Q_1, \delta Q_2, \dots, \delta Q_n)$ a aplicar en los caudales de los tramos en cada malla. La razón por lo cual son necesarias, en general, más de una iteración para obtener los caudales, es porque en la expresión (C.18) los diferenciales $dQ_{i,n}$ han sido sustituidos por diferencias finitas $\delta Q_{i,n}$.

C.3. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR PARTICIÓN (Frank Ayres 1962, Brown 1976, Granshaw 1980)

El método propuesto para calcular la inversa del sistema matricial (C.18.b) es el siguiente:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

donde:

$$\begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} K^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} \\ B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} K^{-1} \\ B_{21} = B_{12}^T \\ B_{22} = K^{-1} \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

con

$$K = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

Como A_{11} es una matriz diagonal, su inversa puede obtenerse calculando la inversa de las pequeñas matrices que contiene, con lo que se ahorra tiempo y memoria. La matriz K generalmente no posee elementos nulos, y suele ser de gran tamaño. Por consiguiente se convierte en el principal problema.

Una alternativa para obtener la inversa de N es calcular las matrices B de la siguiente manera:

$$\begin{cases} B_{11} = K^{-1} \\ B_{12} = -K^{-1} \\ B_{21} = B_{12}^T \\ B_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} K^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

con

$$K = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

Esta vez la inversa de A_{22} se puede obtener fácilmente calculando la inversa de matrices un poco mayores que las anteriores.

C.4. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Los multiplicadores de lagrange se utilizan para resolver problemas de ecuaciones no lineales en los cuales las restricciones son igualdades. Consideremos los del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} \max (\text{o min}) z &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.a. } g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_m \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Para resolver este sistema, asociamos un multiplicador λ_i con la i -ésima restricción y formamos el lagrangiano:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (\text{C.29})$$

donde $\lambda_i = (i = 1, 2, \dots, m)$ son constantes desconocidas denominadas *multiplicadores de Lagrange*. Después se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= 0 & (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

TEOREMA: Si existe una solución que satisfaga las ecuaciones del sistema (C.28), ésta se encuentra contenida entre las soluciones del sistema (C.30), siempre y cuando $f = f(X)$ y $g = g(X)$ tengan todas primeras derivadas parciales continuas y la matriz jacobiana (m, n)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

tenga rango m en $X = X^*$.

El método de los multiplicadores de Lagrange es equivalente a emplear las ecuaciones de restricción para eliminar algunas de las variables x de la función objetivo y resolver después el problema de maximización sin restricciones para las restantes variables x .

C.5. FACTORIZACIÓN DE CHOLESKI

En sistemas de ecuaciones tales como $A x = b$, donde la matriz A es definida positiva y simétrica podemos calcular la inversa de A mediante la factorización de Choleski. Se podría usar el método de eliminación gaussiana, pero no se explotaría la propiedad de definida positiva.

Si la matriz A es simétrica y definida positiva, en lugar de factorizarse como LU , puede ser factorizada como $A = H H^T$, donde H es una matriz triangular inferior, conociéndose ésta como la factorización de Choleski.

La existencia de la factorización de Choleski puede obtenerse a partir de la factorización LU del siguiente modo:
si

$$A = LU \quad (C.31)$$

la matriz triangular superior U puede ser escrita como:

$$U = D U_I \quad (C.32)$$

donde $D = \text{diag} (u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$ y U_I es una matriz triangular superior con unos en su diagonal. De modo que:

$$A = L D U_I \quad (C.33)$$

y como $A = A^T$ se tiene que:

$$L D U_I = U_I^T D L^T \quad (C.34)$$

de donde

$$D = (U_I^T)^{-1} L D U_I (L^T)^{-1} \quad (C.35)$$

La matriz $(U_I^T)^{-1} L$ es una matriz triangular inferior unitaria y la matriz $U_I (L^T)^{-1}$ es una matriz triangular superior unitaria. Por lo tanto:

$$(U_I^T)^{-1} L = U_I (L^T)^{-1} = I \quad (C.36)$$

En consecuencia, $U_I = L^T$ y A puede ser escrita como $A = L D L^T$ donde L es una matriz triangular inferior unitaria. Cuando A es definida positiva los elementos de la diagonal de D son positivos y se puede escribir:

$$D = D^{1/2} D^{1/2} \quad (C.37)$$

donde $D^{1/2} = \text{diag} [(u_{11})^{1/2}, (u_{22})^{1/2}, \dots, (u_{nn})^{1/2}]$

Así que

$$A = L D L^T = L D^{1/2} L^T = H H^T \quad (C.38)$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \cdots & h_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{C.39})$$

en donde

$$h_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad h_{i1} = \frac{a_{i1}}{h_{11}} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^i h_{ik}^2 = a_{ii} \qquad a_{ij} = \sum_{k=1}^j h_{ik} h_{jk} \qquad j < i$$