

Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Estructuras y Construcción

**DISEÑO ÓPTIMO ROBUSTO DE TOPOLOGÍA  
DE ESTRUCTURAS CONTINUAS CON  
ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS**

TESIS DOCTORAL

Alberto Cordero Martínez

2017





Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Estructuras y Construcción

**DISEÑO ÓPTIMO ROBUSTO DE TOPOLOGÍA  
DE ESTRUCTURAS CONTINUAS CON  
ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS**

TESIS DOCTORAL

Realizada por: Alberto Cordero Martínez

Dirigida por: Mariano Victoria Nicolás  
Concepción Díaz Gómez

Cartagena, 18 de enero de 2017



# Resumen

La optimización estructural ha experimentado un importante crecimiento en las últimas décadas debido a aplicaciones numéricas que permiten automatizar el proceso de diseño. La optimización estructural se puede dividir en tres categorías: tamaño, forma y topología. La optimización de topología es la que mejor resultados aporta, ya que proporciona una mayor libertad a la hora de obtener nuevos diseños conceptuales, y tiene como objetivo encontrar la mejor distribución de material a partir de la forma y la localización de las cavidades para un dominio de diseño dado.

Tradicionalmente, el problema de optimización de topología se ha abordado desde un punto de vista determinista, donde los diseños son obtenidos sin considerar de forma explícita la influencia de las diversas fuentes de incertidumbre (o variabilidad) presentes en la realidad, tales como variaciones en las cargas, en las propiedades de material, en la geometría, en las condiciones de contorno, etc. Así pues, una formulación determinista puede dar lugar a estructuras óptimas conservadoras o ineficientes debido a las fluctuaciones en el rendimiento de la estructura.

Con objeto de obtener topologías menos sensibles, más racionales y con un mayor rendimiento ante condiciones reales, en los últimos años ha tomado un gran interés el desarrollo de formulaciones capaces de representar, caracterizar y propagar las incertidumbres en el proceso de optimización. De forma general, se pueden distinguir dos formulaciones, el diseño óptimo de topología basado en fiabilidad y el diseño óptimo robusto de topología. Esta última formulación se ha vuelto cada vez más popular y esta se centra en buscar soluciones que sean poco sensibles a las incertidumbres.

El objetivo de esta tesis es proponer una nueva metodología para el diseño óptimo robusto de topología de estructuras continuas bidimensionales. Para ello, primeramente se han propuesto dos metodologías deterministas para el diseño óptimo de topología, la primera basada en el uso de un algoritmo genético y el análisis de la estructura mediante una malla fija de elementos finitos y la segunda mediante el uso de programación matemática y el análisis de la estructura en una malla fija de elementos finitos. Ambas metodologías han sido probadas a través de varios ejemplos demostrándose el mejor funcionamiento de la primera.

A partir de esta metodología determinista, se ha propuesto una nueva metodología para el diseño óptimo robusto de topología considerando la existencia de incertidumbre en la carga mediante el uso de algoritmos genéticos y el análisis de la estructura mediante una malla fija de elementos finitos. La incertidumbre en la carga puede presentarse en la magnitud y/o dirección de la misma, pudiendo ser descrita por cualquier tipo de función de distribución de probabilidad. La evaluación de la función objetivo se realiza utilizando el método de reducción univariable (UDR) combinado con muestreo de cuadratura de tipo Gauss. El objetivo es poder estimar la suma ponderada del valor medio y la desviación estándar de la compliance de forma

eficiente y precisa, transformando el problema multidimensional en otro equivalente determinístico de varios estados de carga. La validez de la técnica ha sido probada a través de la resolución de varios ejemplos.

# Abstract

Structural optimization has gained an increasing importance during last decades due to the growing trend on the use of numerical applications in order to automate the design process. Structural optimization are, in general, divided in three levels: sizing, shape and topology. Topology optimization is the one that provides the best results because this provides a great freedom to obtain new and efficient conceptual designs. The aim of topology optimization is to obtain the best material distribution at a given structural domain.

Traditionally, the problem of topology optimization is dealt in a deterministic manner, where the design is obtained without explicitly taking into account the different sources of uncertainty, as: loading, material, geometric and boundary uncertainty, etc. This deterministic formulation may provide, in many cases, conservative and inefficient designs due to the fluctuations in the structure performance.

Recent years, to obtain less sensitive, more rational and with greater performance topologies under real conditions, have taken growing interests in formulations capable of represent, characterize and propagate uncertainties in the topology optimization process. Nowadays, there are two main methodologies that consider uncertainties in the topology optimization. The first is named reliability-based topology optimization and the second is known as robust topology optimization. This last has become more and more popular in the last years and it focuses on making the structural design non-sensitive to uncertainty.

The aim of this thesis is to propose a new methodology for the robust topology optimization of two-dimensional continuum structures. For this purpose, in first place, two deterministic methodologies have been proposed. The first methodology uses a genetic algorithm and fixed grid analysis. The second methodology uses mathematical programming and fixed grid analysis. Both methodologies have been tested by several examples. In all examples, the first methodology has provided better designs.

From the deterministic methodology, a new method has been proposed for the robust topology optimization under loading uncertainty using a genetic algorithm and fixed grid analysis. The uncertainty may occur in the magnitude or applied direction of the load and it can be described by any probability density function. The univariate reduction method combined with Gauss-type quadrature sampling is then employed for evaluating the objective function which estimates the weighted sum of the mean and standard deviation of the compliance. This fact transforms the robust formulation into one deterministic multiple load case problem. The validity of this technique is demonstrated on several examples, using different pdf, mean and standard deviations.



# Agradecimientos

En primer lugar quiero empezar a agradecer a mis directores de tesis el Dr. Mariano Victoria Nicolás y la Dra. Concepción Díaz Gómez todo el tiempo que me han dado, por sus sugerencias, asesoramiento, e ideas que me han prestado para la consecución de esta tesis doctoral.

También agradecer al Dr. Pascual Martí Montrull la oportunidad de realizar esta tesis doctoral e iniciarme en la optimización estructural.

Agradecer al Dr. Osvaldo M. Querin por su acogida y apoyo recibido durante la estancia en Leeds.

Agradecer a todos los compañeros del Departamento de Estructuras y Construcción por su colaboración.

Finalmente, deseo también expresar todo mi agradecimiento a mi familia, por su apoyo incondicional a lo largo de este periodo, a pesar de la distancia.



# Índice

<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de tablas .....</b>	<b>XVII</b>
<b>Abreviaturas .....</b>	<b>XIX</b>
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción .....	1
1.2. Formulación del problema de optimización.....	2
1.2.1. Variables de diseño .....	3
1.2.2. Función objetivo .....	4
1.2.3. Restricciones de diseño.....	4
1.3. Tipos de optimización estructural .....	5
1.3.1. Optimización de tamaño .....	5
1.3.2. Optimización de forma .....	5
1.3.3. Optimización de topología.....	5
1.4. Métodos de optimización de estructuras continuas.....	6
1.4.1. Programación matemática.....	6
1.4.2. Criterio de optimalidad .....	6
1.4.3. Método de homogeneización .....	7
1.4.4. Método de distribución de material sin homogeneización .....	7
1.4.5. Métodos Hard-Kill .....	9
1.4.5.1. Optimización estructural evolucionaria.....	9
1.4.5.2. Optimización estructural evolucionaria aditiva.....	9
1.4.5.3. Optimización estructural evolucionaria bidireccional.....	9
1.4.5.4. Optimización estructural evolucionaria morfológica .....	10
1.4.5.5. Optimización estructural evolucionaria en grupo.....	10
1.4.5.6. Optimización estructural evolucionaria con algoritmos genéticos.....	10

1.4.5.7.	Creación inteligente de cavidades .....	10
1.4.6.	Adaptatividad inversa .....	10
1.4.7.	Translación de material evolucionaria .....	11
1.4.8.	Métodos basados en crecimiento biológico .....	11
1.4.9.	Método de la burbuja .....	11
1.4.10.	Optimización con isolíneas .....	12
1.4.11.	Optimización de topología basada en forma .....	12
1.4.11.1.	Representación paramétrica.....	12
1.4.11.2.	Representación implícita, .....	13
1.4.12.	Recocido simulado .....	14
1.4.13.	Optimización por enjambre de partículas.....	15
1.4.14.	Optimización por colonia de hormigas .....	15
1.4.15.	Algoritmos evolutivos .....	15
1.4.15.1.	Programación evolutiva.....	16
1.4.15.2.	Estrategias evolutivas .....	16
1.4.15.3.	Algoritmo genético .....	16
1.4.15.4.	Programación genética .....	16
1.4.16.	Método basado en división celular.....	17
1.4.17.	Discusión de los métodos de optimización .....	17
1.5.	Optimización bajo incertidumbre.....	18
1.5.1.	Diseño óptimo basado en fiabilidad.....	19
1.5.2.	Diseño óptimo robusto.....	19
1.5.3.	Diferencias entre el diseño robusto y el diseño fiable .....	20
1.6.	Revisión del estado del arte del diseño óptimo robusto de topología .....	23
1.7.	Objetivos .....	24
1.8.	Organización de la tesis.....	25
<b>CAPÍTULO 2: ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS POR ELEMENTOS FINITOS CON MALLA FIJA .....</b>		<b>27</b>
2.1.	Introducción .....	27
2.2.	Teoría de elasticidad bidimensional.....	29
2.2.1.	Desplazamientos .....	29
2.2.2.	Deformaciones .....	30

---

2.2.3.	Tensiones .....	30
2.3.	El método de los elementos finitos .....	31
2.3.1.	Aproximación de la geometría.....	32
2.3.2.	Funciones de aproximación de las variables.....	33
2.3.3.	Integración numérica en dos dimensiones .....	34
2.4.	Formulación de la malla fija.....	35
2.4.1.	Matriz de rigidez para elementos interiores, exteriores y de borde .....	36
2.4.2.	Análisis de las tensiones en los nodos de la malla fija .....	37
2.5.	Optimización de estructuras con malla fija .....	39
<b>CAPÍTULO 3: DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS CON ALGORITMO GENÉTICO .....</b>		<b>43</b>
3.1.	Introducción .....	43
3.2.	Origen de los Algoritmos Genéticos .....	45
3.3.	Aspectos biológicos.....	46
3.4.	Estructura de un algoritmo genético simple.....	47
3.5.	Representación de individuos.....	48
3.5.1.	Representación binaria.....	49
3.5.2.	Representación entera .....	50
3.5.3.	Representación real o punto flotante.....	50
3.5.4.	Representación con permutaciones.....	50
3.5.5.	Representación híbrida.....	51
3.5.6.	Representación natural .....	51
3.5.7.	Discusión de las técnicas de representación .....	51
3.5.8.	Representaciones utilizadas en optimización de topología y forma .....	52
3.6.	Población inicial .....	53
3.7.	Operadores genéticos .....	53
3.7.1.	Selección .....	54
3.7.1.1.	Selección por ruleta .....	55
3.7.1.2.	Selección por rango .....	55
3.7.1.3.	Selección por torneo .....	56
3.7.2.	Recombinación .....	56
3.7.2.1.	Operadores de recombinación para representación binaria.....	56

3.7.2.2.	Operadores de recombinación para representación real .....	58
3.7.3.	Mutación .....	62
3.7.3.1.	Operadores de mutación para representación binaria.....	63
3.7.3.2.	Operadores de mutación para representación real .....	64
3.7.4.	Operadores de reemplazo.....	64
3.7.5.	Otros operadores. ....	65
3.8.	Ajuste y control de un algoritmo genético .....	66
3.8.1.	Ajuste .....	66
3.8.2.	Control .....	66
3.8.2.1.	Tamaño de la población.....	67
3.8.2.2.	Probabilidad de cruce .....	68
3.8.2.3.	Probabilidad de mutación .....	68
3.9.	Función de Aptitud.....	68
3.9.1.	Función de penalización .....	69
3.9.1.1.	Penalización estática.....	69
3.9.1.2.	Penalización dinámica .....	70
3.9.1.3.	Penalización adaptativa .....	71
3.10.	Criterios de parada.....	72
<b>CAPÍTULO 4: OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS .....</b>		<b>73</b>
4.1.	Introducción .....	73
4.2.	Codificación para la optimización.....	74
4.3.	Extracción de la topología.....	77
4.3.1.	Isolíneas de referencia.....	77
4.3.1.1.	Criterio de referencia para la extracción de las isolíneas .....	77
4.3.1.2.	Tipos de isolíneas de referencia.....	79
4.3.2.	Recorte .....	80
4.4.	Análisis con malla fija.....	81
4.5.	Función de aptitud.....	82
4.5.1.	Función de aptitud basada en la compliance estructural.....	82
4.5.2.	Función de aptitud basada en la tensión .....	82
4.6.	Características del algoritmo genético implementado .....	82

---

4.7.	Proceso de estabilización. ....	83
4.8.	Metodología para la optimización de topología con malla fija y algoritmos genéticos	84
4.9.	Influencia de la codificación .....	86
4.9.1.	Voladizo corto de Michell con carga centrada en el borde libre .....	87
4.9.2.	Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en el borde inferior ..	92
4.9.3.	Viga MBB con carga vertical centrada en borde superior .....	96
4.9.4.	Análisis de los resultados atendiendo al tipo de codificación.....	99
4.10.	Representación del contorno virtual mediante B-Spline .....	100
4.10.1.	Curvas B-spline .....	100
4.10.2.	Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en borde inferior.	104
4.11.	Influencia de la función de aptitud .....	108
4.12.	Influencia de los parámetros del GA .....	110
4.12.1.	Influencia de la probabilidad de cruce .....	110
4.12.2.	Influencia del tipo de operador de selección .....	111
4.12.3.	Influencia del tipo de operador de cruce .....	112
4.12.4.	Influencia de la convergencia del $\mu$ -GA.....	113
4.12.5.	Análisis de los resultados del estudio paramétrico.....	113
<b>CAPÍTULO 5: OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA .....</b>		<b>115</b>
5.1.	Programación matemática .....	116
5.1.1.	Condiciones de Karush-Kunh-Tucker .....	116
5.1.2.	Análisis de sensibilidad.....	117
5.1.2.1.	Diferencias finitas.....	118
5.1.3.	Algoritmos para la optimización con restricciones.....	119
5.1.3.1.	Programación Cuadrática Secuencial .....	120
5.2.	Primera etapa: Optimización de forma.....	122
5.2.1.	Metodología para la optimización de forma con malla fija y programación matemática .....	122
5.2.2.	Voladizo corto de Michell con carga centrada en el borde libre. ....	123
5.2.3.	Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en el borde inferior	126
5.2.4.	Conclusiones .....	128
5.3.	Segunda etapa: Optimización de topología. ....	128
5.3.1.	Función objetivo .....	129

5.3.2.	Isolíneas de referencia.....	129
5.3.3.	Extracción de cavidades.....	129
5.3.4.	Proceso de reducción de volumen.....	130
5.3.5.	Metodología para la optimización de topología con malla fija y programación matemática .....	131
5.3.6.	Voladizo corto de Michell con carga centrada en el borde libre. ....	131
5.3.7.	Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en el borde inferior	136
5.4.	Conclusiones .....	139
<b>CAPÍTULO 6: DISEÑO ÓPTIMO ROBUSTO DE TOPOLOGÍA: MÉTODOS.....</b>		<b>141</b>
6.1.	Fundamentos estadísticos .....	142
6.1.1.	Variable aleatoria .....	142
6.1.2.	Vector aleatorio.....	144
6.2.	Proceso estocástico y campo estocástico .....	145
6.3.	Formulación del problema estocástico .....	145
6.3.1.	Criterios de robustez con toma de decisiones bajo incertidumbre.....	148
6.3.1.1.	Criterio minimax.....	148
6.3.1.2.	Criterio de arrepentimiento minimax .....	148
6.3.1.3.	Método de Laplace .....	149
6.3.2.	Criterios de robustez con toma de decisiones bajo riesgo .....	149
6.3.2.1.	Criterios basados en los cuartiles.....	149
6.3.2.2.	Criterio basado en el principio de Bayes .....	149
6.3.2.3.	Criterio basado en los dos primeros momentos estadísticos .....	149
6.4.	Cuantificación de las variables de entrada .....	151
6.4.1.	Método de expansión de Karhunen-Loève .....	152
6.5.	Propagación de incertidumbres .....	153
6.5.1.	Método de simulación de Monte Carlo.....	154
6.5.1.1.	Muestreo estratificado .....	156
6.5.1.2.	Muestreo mediante Hipercubo Latino .....	157
6.5.2.	Método de colocación estocástico .....	158
<b>CAPÍTULO 7: DISEÑO ÓPTIMO ROBUSTO DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS .....</b>		<b>163</b>
7.1.	Introducción .....	163

---

7.2.	Formulación .....	164
7.3.	Incertidumbre en carga.....	165
7.4.	Propagación de las incertidumbres.....	165
7.5.	Optimización robusta de topología con algoritmos genéticos .....	166
7.5.1.	Codificación.....	166
7.5.2.	Extracción de la topología .....	166
7.5.3.	Función de aptitud.....	167
7.6.	Metodología para la optimización robusta de topología con malla fija y algoritmos genéticos.....	168
7.7.	Ejemplos numéricos .....	171
7.7.1.	Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada en el borde inferior	172
7.7.1.1.	Incertidumbre en la magnitud de la carga .....	172
7.7.1.2.	Incertidumbre en la dirección de la carga.....	174
7.7.2.	Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior	177
7.7.3.	Viga de Michell con tres carga verticales inciertas sobre el borde inferior.....	181
7.7.4.	T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales. ....	183
7.8.	Conclusiones .....	185
<b>CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS .....</b>		<b>187</b>
8.1.	Trabajos realizados.....	187
8.2.	Conclusiones .....	188
8.3.	Trabajos futuros.....	190
<b>Bibliografía: .....</b>		<b>191</b>



# Lista de Figuras

<b>Figura 1.1:</b> Proceso de diseño. (a) Tradicional. (b) Automatizado.....	2
<b>Figura 1.2:</b> Comparación de métodos de material sin homogeneización. a) SIMP: $\eta(\rho) = \rho^p$ ; (b) RAMP: $\eta(\rho) = \frac{\rho}{1+q(1-\rho)}$ ; y (c) SINH: $\eta_1(\rho) = 1 - \frac{\sinh(p(1-\rho))}{\sinh(\rho)}$ , $\eta_2(\rho) = \rho$ .....	8
<b>Figura 1.3:</b> Curvas de nivel (Luo et al.; 2012). (a) Topología 2D. (b) correspondiente función de curva de nivel.....	14
<b>Figura 1.4:</b> Funciones de campo de fase (Takezawa et al., 2010). (a) 2-D. (b) 1-D.....	14
<b>Figura 1.5:</b> Concepto de robustez y fiabilidad para una pdf normal de la respuesta. El intervalo definido $\sigma_f$ es una medida de la robustez y representa el promedio de diferencia que hay entre los datos y la media. La probabilidad de fallo (área azul) es una medida de fiabilidad y representa la probabilidad de exceder P.....	21
<b>Figura 1.6:</b> Estrategia RBDO: movimiento de la media. Gráfico con línea sólida más fiable al contar con una P mayor para una misma probabilidad de fallo.....	22
<b>Figura 1.7:</b> Estrategia RDO: disminuir dispersión. Línea solida es más robusta, al ser menor su desviación estándar.....	22
<b>Figura 1.8:</b> Escenarios posibles (Zang et al. 2002).....	23
<b>Figura 2.1:</b> Transformación de la geometría, desplazamientos nodales, sistema de coordenadas global y local, y numeración de los nodos (Victoria, 2006).....	33
<b>Figura 2.2:</b> Componentes de las funciones de aproximación en elementos rectangulares Lagrangiano.....	33
<b>Figura 2.3:</b> Funciones de forma para un elemento rectangular lineal.....	34
<b>Figura 2.4:</b> Dominio ficticio $\Omega_{fg}$ y dominio de diseño $\Omega$ .....	35
<b>Figura 2.5:</b> Aproximación de la geometría con una malla fija. Clasificación de los elementos finitos con respecto del contorno de la estructura.....	36
<b>Figura 2.6:</b> Diagrama de flujo. (a) FEM y (b) FG-FEM.....	40
<b>Figura 3.1:</b> Las tres leyes de Mendel. (a) primera ley. (b) segunda ley. (c) tercera ley. En el gráfico P son las variables puras, G1 variables de primera generación, y G2 variables de segunda generación.....	44
<b>Figura 3.2:</b> Diagrama de flujo de un algoritmo genético simple.....	48
<b>Figura 3.3:</b> Individuo genético binario.....	50

<b>Figura 3.4:</b> Cruce por un punto. Corte por genotipo ( $r = 7$ ).....	57
<b>Figura 3.5:</b> Cruce por un punto. Corte por fenotipo ( $r = 2$ ).....	57
<b>Figura 3.6:</b> Cruce por dos puntos. Corte por genotipo ( $r = 3$ y $7$ ).....	57
<b>Figura 3.7:</b> Cruce por dos puntos. Corte por fenotipo ( $r = 1$ y $2$ ).....	57
<b>Figura 3.8:</b> Cruce uniforme. Corte por genotipo.....	58
<b>Figura 3.9:</b> Cruce uniforme. Corte por fenotipo.....	58
<b>Figura 3.10:</b> Recombinación aritmética simple. $k = 6$ y $\alpha = 0,5$ .....	58
<b>Figura 3.11:</b> Recombinación aritmética singular. $k = 7$ y $\alpha = 0,5$ .....	59
<b>Figura 3.12:</b> Recombinación aritmética completa. $\alpha = 0,5$ .....	59
<b>Figura 3.13:</b> Recombinación aritmética completa. $\alpha = 0,3$ .....	59
<b>Figura 3.14:</b> Cruce lineal.....	60
<b>Figura 3.15:</b> Recombinación geométrica.....	60
<b>Figura 3.16:</b> Cruce por BLX - $0,5$ .....	61
<b>Figura 3.17:</b> Cruce lineal extendido ( $\alpha = 0,3$ ).....	61
<b>Figura 3.18:</b> Cruce intermedio extendido.....	61
<b>Figura 3.20:</b> Mutación de bit ( $k = 3$ ).....	62
<b>Figura 3.19:</b> Cruce binario simulado ( $r = 0,4$ ; $\eta = 1$ ; $\beta = 1,27$ ).....	63
<b>Figura 3.21:</b> Mutación de multi-bit ( $k = 3$ y $8$ ).....	63
<b>Figura 3.22:</b> Mutación por gen.....	63
<b>Figura 3.23:</b> Mutación de intercambio ( $k = 3$ y $8$ ).....	63
<b>Figura 3.24:</b> Mutación aleatoria uniforme. ( $k = 3$ ; $U_3 = 0,2$ ; $L_3 = 0,8$ ).....	64
<b>Figura 4.1:</b> Proceso para la extracción y/o distribución de material. (a) Definición del contorno virtual. (b) Isolínea para el valor de referencia usada para construir un nuevo contorno estructural.....	75
<b>Figura 4.2:</b> Representación de un cromosoma usando la codificación 1.....	75
<b>Figura 4.3:</b> Representación de un cromosoma usando la codificación 2.....	76
<b>Figura 4.4:</b> Representación de un cromosoma usando la codificación 3.....	76
<b>Figura 4.5:</b> Representación de un cromosoma usando la codificación 4.....	76
<b>Figura 4.6:</b> Filtrado de valores del criterio. (a) Dominio y posición PC. (b) Valores anteriores a la aplicación del filtro. (c) Valores filtrados.....	79
<b>Figura 4.7:</b> Estados topológicos de recorte posibles.....	80
<b>Figura 4.8:</b> Área interior encerrada por la isolínea de referencia en el caso de un elemento de borde.....	81

<b>Figura 4.9:</b> Alteración de la distribución de tensiones de von Mises. (a) Dominio inicial. (b) Dominio recortado para un valor de tensión de 15MPa.....	84
<b>Figura 4.10:</b> Diagrama de flujo para la optimización de topología con isolíneas, malla fija y algoritmos genéticos.....	85
<b>Figura 4.11:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Dominio de diseño.....	88
<b>Figura 4.12:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Codificación 1. (b) Codificación 2. (c) Codificación 3. (d) Codificación 4.....	89
<b>Figura 4.13:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-i. (Victoria, 2006). (c) Diseño óptimo para 6 nudos mediante TTO (Castejón, 2003).....	90
<b>Figura 4.14:</b> Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la aptitud. (c) Evolución de la fracción de volumen. (d) Evolución del desplazamiento máximo. (e) Evolución de la tensión de von Mises media. (f) Evolución del coste computacional.....	91
<b>Figura 4.15:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Dominio de diseño.....	92
<b>Figura 4.16:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Codificación 1. (b) Codificación 2. (c) Codificación 3. (d) Codificación 4.....	93
<b>Figura 4.17:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Diseño óptimo para 6 nudos (Castejon, 2003).....	94
<b>Figura 4.18:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la aptitud. (c) Evolución del desplazamiento máximo. (d) Evolución de la tensión de von Mises media. (e) Evolución de la fracción de volumen. (f) Evolución del coste computacional.....	95
<b>Figura 4.19:</b> Viga de MBB con apoyos fijo y móvil y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde superior. Dominio de diseño.....	96
<b>Figura 4.20:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Codificación 1. (b) Codificación 2. (c) Codificación 3. (d) Codificación 4.....	97
<b>Figura 4.21:</b> Viga de MBB con apoyos fijo y móvil y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo superior. (a) Evolución compliance. (b) Evolución aptitud. (c) Evolución fracción de volumen. (d) Evolución deformación máxima. (e)	99

Evolución tensiones de von Mises medias. f) Evolución del coste computacional.....	
<b>Figura 4.22:</b> Funciones bases no uniforme para $p = 2$ y $n = 5$ .....	102
<b>Figura 4.23:</b> Curva B-spline inicial.....	103
<b>Figura 4.24:</b> Movimiento del punto $P_2$ a $P'_2$ .....	103
<b>Figura 4.25:</b> Curvas B-spline de diferentes grados usando el mismo polígono de control (Piegl y Tiller, 1997).....	103
<b>Figura 4.26:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones utilizando un contorno virtual descrito mediante una curva B-spline de orden 2.....	104
<b>Figura 4.27:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución de la: (a) Compliance. (b) Fracción de volumen.....	105
<b>Figura 4.28:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el extremo inferior. (a) Topología óptima obtenida usando una poligonal. (b) Topología óptima usando una curva B-spline para definir el $C_v$ .....	105
<b>Figura 4.29:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. (c) Relación entre la compliance y la fracción de volumen. (c) Detalle para las últimas generaciones.....	106
<b>Figura 4.30:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas para un tamaño de población de: (a) 18, (b) 16, (c) 14, (d) 12, (e) 10, (f) 8, (g) 6 y (h) 4.....	107
<b>Figura 4.31:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. (a) PC = 10. (b) PC = 7. (c) PC = 6. (d) PC = 5. (e) PC = 4. (f) PC = 3.....	108
<b>Figura 4.32:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones. (a) Función de aptitud basada en compliance. (b) Función de aptitud basada en tensión.....	109
<b>Figura 4.33:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución compliance y fracción de volumen. (a) Función de aptitud basada en compliance. (b) Función de aptitud basada en tensión.....	109
<b>Figura 4.34:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia de la probabilidad de cruce. (a) $p_c = 0,95$ . (b) $p_c = 0,9$ . (c) $p_c = 0,85$ . (d) $p_c = 0,8$ . (e) $p_c = 0,75$ . (f) $p_c = 0,7$ . (g) $p_c = 0,65$ . (e) $p_c = 10,7$ .....	110
<b>Figura 4.35:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia del tipo de operador de selección. (a) Selección por	111

torneo. (b) Selección estocástica universal. (c) Selección por ruleta.....	
<b>Figura 4.36:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo inferior. Influencia del tipo de operador de selección. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la fracción de volumen.....	112
<b>Figura 4.37:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia del tipo de operador de cruce. (a) Cruce aritmético completo. (b) Cruce aritmético simple. (c) Cruce lineal extendido (d) Cruce lineal intermedio. (e) Cruce binario simulado ( $\eta=1$ ).....	112
<b>Figura 4.38:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo inferior. Influencia del tipo de operador de cruce. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la fracción de volumen.....	113
<b>Figura 4.39:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia de la convergencia del $\mu$ -GA. (a) 80%. (b) 85%. (c) 90%. (d) 95%. (e) 100%.....	114
<b>Figura 5.1:</b> Esquema de diferencias finitas.....	118
<b>Figura 5.2:</b> Diagrama de flujo para la optimización de forma con malla fija y programación matemática .....	123
<b>Figura 5.3:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Disposición y dirección de movimiento de los puntos de control usando una poligonal. Optimización de forma.....	124
<b>Figura 5.4:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Formas óptimas. (a) Curva poligonal. (b) Curva B-spline.....	125
<b>Figura 5.5:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Evolución de la aptitud y de la fracción de volumen. (a) Curva poligonal. (b) Curva B-spline.....	125
<b>Figura 5.6:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Evolución del tiempo computacional.....	125
<b>Figura 5.7:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Disposición y dirección de movimiento de los puntos de control usando una poligonal. Optimización de forma.....	126
<b>Figura 5.8:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Formas óptimas. a) Curva poligonal. B) Curva B-spline.....	127
<b>Figura 5.9:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución de la aptitud y de la fracción de volumen. (a) Curva Poligonal. (b) Curva B-Spline.....	127
<b>Figura 5.10:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Comparación de la evolución del tiempo computacional usando una curva poligonal y una curva B-spline.....	128

<b>Figura 5.11:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. (a) Dominio. (b) Definición de regiones a partir de las isolíneas para un valor de referencia.....	129
<b>Figura 5.12:</b> Proceso de recorte excesivo. (a) Posición de los PC en la primera iteración. (b) Extracción de cavidades.....	130
<b>Figura 5.13:</b> Diagrama de flujo para la optimización de topología con isolíneas, malla fija y programación matemática.....	132
<b>Figura 5.14:</b> Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Poligonal. (b) B-spline.....	133
<b>Figura 5.15:</b> Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Inconvenientes asociados con el movimiento en una única dirección....	135
<b>Figura 5.16:</b> Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. (a) Evolución de la compliance y fracción de volumen. (b) Evolución del tiempo computacional.....	135
<b>Figura 5.17:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Evolución del tiempo computacional.....	136
<b>Figura 5.18:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Poligonal. (b) B-spline.....	137
<b>Figura 5.19:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución de la compliance y de la fracción de volumen. (a) Curva poligonal. (b) Curva B-spline.....	138
<b>Figura 5.20:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución del tiempo computacional.....	139
<b>Figura 6.1:</b> Función de distribución de probabilidad $p_X(x)$ para una variable aleatoria $X$ . (a) Discreta. (b) Continua.....	142
<b>Figura 6.2:</b> Función de densidad de probabilidad de una variable normal estándar: $N(0,1)$ .....	144
<b>Figura 6.3:</b> Realización de: (a) variable aleatoria, (b) campo aleatorio con correlación débil y (c) campo aleatorio con correlación fuerte. (Chen et al., 2010).....	145
<b>Figura 6.4:</b> Esquema típico de un sistema que considera el efecto de las incertidumbres..	146
<b>Figura 6.5:</b> Influencia de la variable aleatoria $Z$ con función de densidad de probabilidad $p_Z(Z)$ en la función de densidad de probabilidad $p_Y(y)$ de la respuesta $Y$ . (Jurecka, 2007).....	146
<b>Figura 6.6:</b> Robustez vs. no robustez para un problema con una variable de diseño aleatoria $X$ .....	147
<b>Figura 6.7:</b> Fuentes de incertidumbre en función del ciclo de vida de la estructura.....	151

<b>Figura 6.8:</b> Muestreo por estratos para un espacio aleatorio bidimensional con 8 estratos y 1 punto de muestreo por estrato. Las variables $z_1$ y $z_2$ son descritas por una distribución normal y una uniforme, respectivamente (Jurecka, 2007).....	157
<b>Figura 6.9:</b> Muestreo por hipercubo latino para un espacio aleatorio bidimensional con una muestra de 8 puntos. Las variables $z_1$ y $z_2$ son descritas por una distribución normal y una uniforme, respectivamente (Jurecka, 2007).....	158
<b>Figura 6.10:</b> Comparación del producto tensorial en la construcción de fórmulas de cuadratura de nivel $l=4$ , para una integración numérica $n = 2$ . Resultados de una regla de cuadratura anidada Fejèr. (a) Completa. (b) Dispersa. (Maitre y Knio, 2010).....	160
<b>Figura 6.11:</b> Evaluación de los puntos de cuadratura para reducción unidimensional (UDR) y producto tensorial completo (FFNI) con una fórmula de cuadratura de 3 nodos. (Lee y Chen, 2009).....	162
<b>Figura 7.1:</b> Diagrama de flujo para la optimización robusta de topología con isolíneas, malla fija y algoritmos genéticos.....	170
<b>Figura 7.2:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Dominio de diseño.....	172
<b>Figura 7.3:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas: (a) determinista; (b) robusta escenario 1; (c) robusta escenario 2; y (d) robusta escenario 3.....	173
<b>Figura 7.4:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional. (Det. = determinista).....	174
<b>Figura 7.5:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de incierta centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas robustas considerando incertidumbre en la dirección de la carga: (a) E.1; (b) E.2; (c) E.3; (d) E.4; (e) E.5; y (f) E.6.....	176
<b>Figura 7.6:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional. (Det. = determinista).....	178
<b>Figura 7.7:</b> Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Dominio de diseño. (a) Optimización robusta. (b) Optimización determinista.....	178
<b>Figura 7.8:</b> Funciones de distribución de probabilidad. (a) Distribución Normal. (b) Distribución Uniforme. (c) Distribución de Gumbel.....	179
<b>Figura 7.9:</b> Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Topologías óptimas: (a) determinista; (b) robusta escenario 1; (c) robusta escenario 2; y (d) robusta escenario 3.....	180

<b>Figura 7.10:</b> Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Topologías óptimas. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional. (Det. = determinista).....	181
<b>Figura 7.11:</b> Viga de Michell con tres cargas inciertas sobre el borde inferior. Dominio de diseño.....	182
<b>Figura 7.12:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas: (a) determinista; (b) robusta escenario 1; (c) robusta escenario 2; y (d) robusta escenario 3.....	182
<b>Figura 7.13:</b> Viga de Michell con tres cargas inciertas sobre el borde inferior. (a) Evolución de la función objetivo combinada. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional.....	184
<b>Figura 7.14:</b> T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales. Dominio de diseño.....	184
<b>Figura 7.15:</b> T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales: (a) Diseño determinista; (b) Diseño robusto.....	185
<b>Figura 7.16:</b> T-invertida. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional...	186

# Lista de tablas

<b>Tabla 1.1:</b> Principales métodos de propagación de incertidumbre.....	21
<b>Tabla 1.2:</b> Comparación entre RDO y RBDO.....	23
<b>Tabla 2.1:</b> Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería.....	28
<b>Tabla 2.2:</b> Valor de las constantes elásticas para los estados de tensión y deformación plana, siendo $E$ el módulo de elasticidad y $\nu$ el coeficiente de Poisson.....	31
<b>Tabla 2.3:</b> Relación entre el módulo de elasticidad real y virtual.....	37
<b>Tabla 3.1:</b> Paralelismo entre términos biológicos y los algoritmos genéticos.....	47
<b>Tabla 3.2:</b> Codificación usando tres bits mediante una cadena binaria, Gray y E-code...	50
<b>Tabla 3.3:</b> Valores asignados por diferentes autores para el ajuste de los parámetros de un algoritmo genético (Victoria, 2006).....	67
<b>Tabla 3.4:</b> Funciones de aptitud empleadas en algoritmos genéticos para la optimización de forma y topología de estructuras continuas (Victoria, 2006).....	69
<b>Tabla 4.1:</b> Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, y el análisis de elementos finitos con malla fija.....	87
<b>Tabla 4.2:</b> Parámetros del algoritmo genético.....	87
<b>Tabla 4.3:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Resultados para diferentes generaciones y codificaciones.....	90
<b>Tabla 4.4:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Resultados para diferentes codificaciones y generaciones.....	94
<b>Tabla 4.5:</b> Viga de MBB con apoyos fijo y móvil y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo superior. Resultados para diferentes codificaciones y generaciones.....	98
<b>Tabla 4.6:</b> Continuidad $C$ para diferentes grados $p$ y multiplicidad $k$ .....	102
<b>Tabla 4.7:</b> Resultados para diferentes tamaños de población.....	107
<b>Tabla 5.1:</b> Métodos de análisis de sensibilidad (Celorrio, 2013).....	118
<b>Tabla 5.2:</b> Parámetros que controlan la programación matemática.....	124
<b>Tabla 5.3:</b> Parámetros que controlan la optimización de forma.....	133

<b>Tabla 5.4:</b> Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Resultados para diferentes iteraciones para un contorno definido mediante una poligonal y una curva B-spline.....	135
<b>Tabla 5.3:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Resultados para diferentes iteraciones para un contorno definido mediante una curva poligonal y una B-spline.....	138
<b>Tabla 7.1:</b> Parámetros del algoritmo genético.....	171
<b>Tabla 7.2:</b> Parámetros que controlan el proceso de optimización.....	171
<b>Tabla 7.3:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Valor medio y desviación estándar para la magnitud.....	172
<b>Tabla 7.4:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Estados de carga para los 7 escenarios.....	173
<b>Tabla 7.5:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Incertidumbre en dirección. Valor medio y desviación estándar....	175
<b>Tabla 7.6:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Estados de carga para los 7 escenarios .....	175
<b>Tabla 7.7:</b> Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de incierta centrada sobre el borde inferior. Comparación entre los diseño robusto y determinista.....	177
<b>Tabla 7.8:</b> Columna simple carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Tipos de funciones de distribución de probabilidad utilizadas para caracterizar la incertidumbre en la dirección.....	179
<b>Tabla 7.9:</b> Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Estados de carga para los 3 escenarios.....	179
<b>Tabla 7.10:</b> Viga de Michell con tres cargas inciertas sobre el borde inferior. Comparación entre las soluciones robustas y la determinista.....	183
<b>Tabla 7.11:</b> T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales .....	185

# Abreviaturas

ADN	ácido desoxirribonucleico
ACO	optimización por colonia de hormigas (Ant Colony Optimization)
AESO	Optimización estructural evolucionaria aditiva (Additive Evolutionary Structural Optimization)
B	contorno (Boundary)
BDR	método de reducción bivariable (Bivariate Reduction Method)
BLX- $\alpha$	cruce por mezcla alfa
BESO	optimización estructural evolucionaria bidireccional (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization)
CAO	optimización asistida por ordenador (Computer Aided Optimization)
CBS	Cruce Binario Simulado
cdf	función de distribución acumulada (cumulative distribution function)
CIE	Cruce Intermedio Extendido
CFS	Constant-weight Fully Stressed
CLE	Cruce Lineal Extendido
C <sub>v</sub>	Contorno virtual
DEMM	método de modelado determinístico equivalente (Deterministic Equivalent Modelling Method)
DRM	método de reducción dimensional (Dimension Reduction Method)
DS	muestreo direccional (Directional Sampling)
EMT	translación de material evolucionaria (Evolutionary Material Translation)
EOLE	Expansion Optimal Linear Estimator
EP	programación evolutiva (Evolutionary Programming)
ES	estrategias evolutivas (Evolutionary Strategies)
ESO	optimización estructural evolucionaria (Evolutionary Structural Optimization)
FEM	método de los elementos finitos (Finite Element Method)
FG-FEM	método de los elementos finitos en malla fija (Fixed Grid-Finite Element Method)
FORM	método de fiabilidad de primer orden (First Order Reliability Method)

FSD	diseño totalmente tensionado (Fully Stressed Design)
GA	algoritmo genético (Genetic Algorithm)
GDR	método de reducción generalizado (Generalized Reduction Method)
GESO	optimización estructural evolucionaria con algoritmos genéticos (Genetic Evolutionary Structural Optimization)
GP	programación genética (Genetic Programming)
H-K	Hard-Kill
I	Interior (I)
ICC	creación inteligente de cavidades (Intelligent Cavity Creation)
IR	Isolínea de Referencia
IS	muestreo por importancia (Importance Sampling)
ITD	Diseño óptimo de topología con isolíneas (Isolines Topology Optimization)
jdf	función de densidad conjunta (join density function)
KKT	condiciones de optimalidad o de Karush-Kunh-Tucker
K-L	expansión de Karhunen-Loeve
KM	modelos Kriging (Kriging Models)
LHS	muestreo por hipercubo latino (Latin-Hypercube Sampling)
LSM	método de curvas de nivel (Level Set Method)
MBB	Messerchmidt-Bölkow-Bolohm
MC	Monte Carlo
MCMC	Monte Carlo usando cadenas de Markov (Markov Chain Monte Carlo)
MCS	simulación de Monte Carlo (Monte Carlo Simulation)
MSC	Mac-Neal Schewendler Corporation
MP	programación matemática (Mathematical Programming)
MSEE	Método de Solución Estadística Equivalente
MT	Marching Triangles
NEM	método de expansión de Neumann (Neumann Expansion Method)
NM	no menciona
NMG	número máximo de generaciones
NN	redes neuronales (Neural Networks)
NURBS	B-spline racional no uniforme (Non-Uniform Rational B-Spline)
O	exterior (Out)
OC	criterio de optimalidad (Optimality Criteria)
OUU	optimización bajo incertidumbre (Optimization Under Uncertainty)
PBO	optimización basada en el rendimiento (Performance Based Optimization)

---

PBOC	criterio de optimización basada en el rendimiento (Performance Based Optimization Criteria)
PCE	expansión en caos polinomial (Polynomial Chaos Expansion)
PC	Puntos de Control
PCX	cruce parento céntrico (Parent-Centric Crossover)
pdf	función de densidad de probabilidad (Probability Density Function)
PFM	método de campo de fase (Phase-Field Method)
PM	método de perturbación (Perturbation Method)
PSO	optimización por enjambre de partículas (Particle Swarm Optimization)
RA	adaptatividad inversa (Reverse Adaptability)
RAC	Recombinación Aritmética Completa
RAMP	Rational Approximation of Material Properties
RAS	Recombinación Aritmética Simple
RBDO	diseño óptimo basado en fiabilidad (Reliability-Based Design Optimization)
RBF	funciones de base radial (Radial Basis Function)
RBTO	diseño óptimo fiable de topología (Reliability-Based Topology Optimization)
RDO	diseño óptimo robusto (Robust Design Optimization)
RTO	diseño óptimo robusto de topología (Robust Topology Optimization)
SA	recocido simulado (Simulated Annealing)
SBX- $\beta$	cruce binario simulado
SCM	método de colocación estocástica (Stochastic Collocation Method)
SED	densidad de energía de deformación (Strain Energy Density)
SEU	Selección Estocástica Universal
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
SORM	método de fiabilidad de segundo orden (Second Order Reliability Method)
SR	Selección por Ruleta
SRM	método de la superficie de respuesta (Surface Response Method)
SRSM	método de la superficie de respuesta estocástica (Stochastic Response Surface Methods)
SSEM	método de expansión estocástica espectral (Stochastic Spectral Expansion Method)
SSM	método estocástico espectral (Spectral Stochastic Method)
ST	Selección por Torneo
TTO	Truss Topology Optimization
UNDX- $m$	cruce unimodal de distribución normal

UDR	método de reducción univariable (Univariate Reduction Method)
VCFS	Variable element dimension Constant-weight Fully Stressed
XESO	eXtended Evolutionary Structural Optimization
X-FEM	método de los elementos finitos extendido (eXtended-Finite Element Method)
$\mu$ -GA	micro-algoritmo genético

---

# CAPÍTULO 1:

## INTRODUCCIÓN

---

En este capítulo se presenta una revisión del estado del arte del diseño óptimo de topología de estructuras continuas prestando una especial atención al diseño óptimo robusto. El diseño óptimo robusto de topología (Robust Topology Optimization, RTO), básicamente es una metodología donde se combina los métodos de optimización de topología y de tratamiento de la incertidumbre.

En primer lugar se muestra la formulación y los métodos de optimización estructural desde un punto de vista determinista. A continuación, se describen con mayor precisión el concepto de diseño óptimo robusto junto con otras metodologías no deterministas ya existentes para tratar el problema de optimización bajo incertidumbre.

### 1.1. Introducción

El propósito básico de un diseñador es encontrar nuevos diseños que cumpliendo con las especificaciones requeridas resulten más eficientes.

Tradicionalmente, la metodología de diseño ha consistido en un proceso manual basado en el método de “prueba y error”. Básicamente, el diseñador propone un diseño inicial, analiza su comportamiento y en función de los resultados obtenidos realiza una serie de modificaciones cumpliendo con las restricciones (p. ej.: seguridad y de diseño) según los criterios fijados para

el problema tratado. Sin embargo, en la mayoría de los casos, aunque el diseño obtenido es mejor, no es óptimo ya que depende de una serie de decisiones subjetivas motivadas por el conocimiento y experiencia del diseñador tanto en el diseño inicial, como en las modificaciones realizadas. Por ello, la etapa de diseño se entiende más como un “arte” que como una técnica.

El aumento en la capacidad computacional de los ordenadores y el desarrollo de nuevos métodos numéricos han permitido automatizar el proceso de diseño. Para ello, el proceso de diseño se plantea como un problema de optimización matemática. La optimización matemática engloba un conjunto de métodos numéricos enfocados a encontrar la mejor solución entre una variedad de diseños, sin la necesidad de evaluar explícitamente todos ellos. Estos métodos, al igual que el tratamiento tradicional, pueden estar sujetos a consideraciones subjetivas por parte del diseñador (p. ej.: la definición del dominio inicial) o sencillamente por la capacidad de cálculo del ordenador. A diferencia de los métodos tradicionales, los cambios realizados sobre el diseño inicial están basados en aspectos matemáticos sin necesidad de que el diseñador requiera un cierto grado de experiencia o conocimiento. En la figura 1.1a se muestra un esquema del proceso de diseño tradicional. En este se observa como tanto la definición del diseño inicial como los cambios realizados sobre este son realizados en base a la experiencia del diseñador. En la figura 1.1b se muestra el diagrama de flujo del proceso de diseño automatizado. En este se observa como los cambios se llevan a cabo mediante un ordenador en base a un criterio matemático.

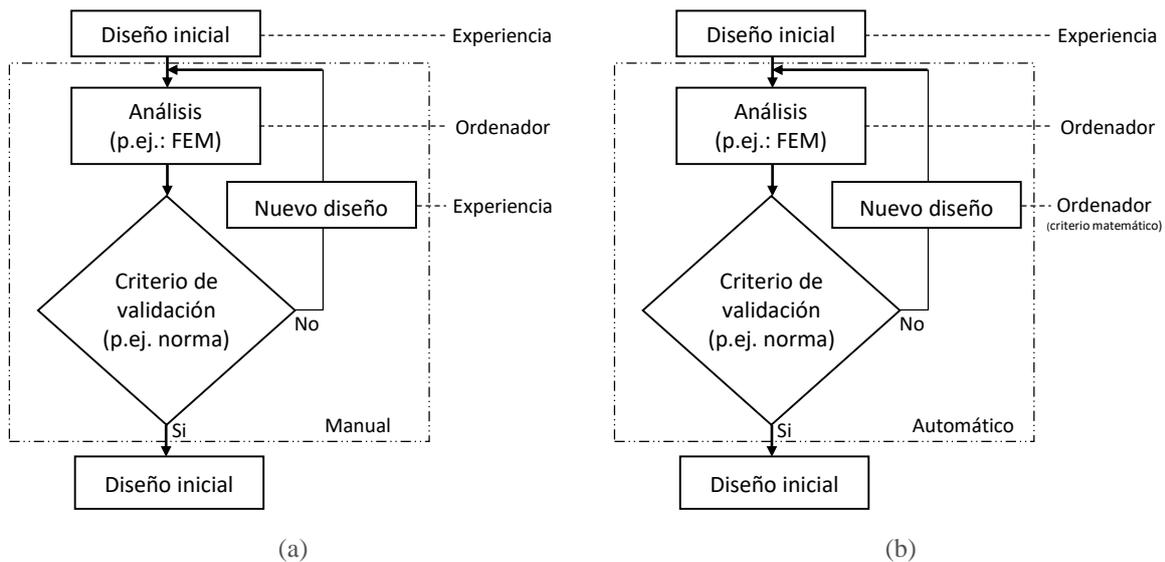


Figura 1.1: Proceso de diseño. (a) Tradicional. (b) Automatizado.

## 1.2. Formulación del problema de optimización

El problema de diseño óptimo se entiende como aquél que busca determinar el valor de una serie de variables de modo que minimice (o maximice) el valor de una función objetivo, satisfaciendo una serie de restricciones. Matemáticamente el problema puede ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\
 &\text{sujeto a:} && h_j(\mathbf{x}) = 0 && j = 1, \dots, n_i \\
 &&& g_k(\mathbf{x}) \geq 0 && k = 1, \dots, n_d \\
 &&& x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup} && i = 1, \dots, n_x
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde,

$\mathbf{x}$	vector de variables de diseño $n_x$ -dimensional
$f(\mathbf{x})$	función objetivo
$h_j(\mathbf{x})$	restricción de diseño de igualdad $j$
$g_k(\mathbf{x})$	restricción de diseño de desigualdad $k$
$n_i$	número de restricciones de igualdad
$n_d$	número de restricciones de desigualdad
$x_i$	variable de diseño $i$
$x_i^{inf}$	límite inferior de la variable de diseño $i$
$x_i^{sup}$	límite superior de la variable de diseño $i$
$n_x$	número de variables de diseño

Al espacio  $n$ -dimensional definido por el vector de variables de diseño  $\mathbf{x}$  se denomina espacio de diseño. En general, el espacio de diseño está dividido en dos: el dominio factible y el dominio no-factible. El *dominio factible* está constituido por el conjunto de soluciones que satisfacen todas las restricciones y el *dominio no-factible* por el conjunto de soluciones donde se viola alguna de las restricciones.

En un problema de optimización se deben de considerar tres aspectos clave: las variables de diseño, la función objetivo y las restricciones de diseño. A continuación, se describen con mayor detalle cada uno de ellos.

### 1.2.1. Variables de diseño

En un problema de diseño, el valor de las variables puede ser fijo o variable. Los *parámetros o variables fijas* del problema tienen la característica de representar magnitudes cuyo valor es constante durante todo el diseño y son consecuencia, en general, de una serie de condiciones impuestas externamente al problema. Por el contrario, *las variables* del problema representan magnitudes cuyos valores pueden cambiar al evolucionar el diseño. En el caso más general se pueden distinguir cuatro tipos de variables:

1. Propiedades de la sección de la pieza: área, momentos de inercia y de torsiones, etc.
2. Geometría de la estructura: altura, longitud, etc.
3. Topología de la estructura: densidad de material, perímetro total, etc.
4. Propiedades de la estructura: módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, etc.

Actualmente, no existen todavía técnicas de optimización que consideren eficientemente los cuatro tipos de variables. Por ello, es habitual establecer como parámetros las características del material e incluso la topología de la estructura.

Por otro lado, las variables de diseño también se pueden clasificar en continuas y discretas. Las variables *continuas* pueden tomar cualquier valor dentro de un rango. Por el contrario, las variables *discretas* solo pueden tomar valores concretos dentro de dicho rango. Apuntar que la mayoría de los métodos de optimización trabajan con variables continuas.

La correcta elección de las variables de diseño es crucial para el proceso de optimización, ya que de esta elección depende que: las variables sean consistentes con el modelo de análisis, las soluciones sean prácticas, y sus valores estén adecuadamente condicionados.

### 1.2.2. Función objetivo

La *función objetivo* es aquella que proporciona un valor que permite evaluar los diferentes diseños y determinar el mejor de entre todos ellos. Por lo tanto, la función objetivo es una función escalar que depende de las variables de diseño, la cual adopta un valor mínimo (o máximo) para el diseño óptimo.

En el diseño estructural, es habitual que la función objetivo consista en minimizar el peso de la estructura, ya que las primeras optimizaciones estructurales se realizaron en el campo de la aeronáutica. Esta función objetivo, ha sido utilizada en otros campos, puesto que la cantidad de material en una pieza está directamente relacionada con el coste de la misma. Sin embargo, en otros campos, el peso de la estructura juega un papel secundario, teniendo una mayor relevancia la rigidez estructural, las frecuencias naturales de vibración, o las cargas críticas frente a pandeo, etc.

En la mayoría de las optimizaciones se suele considerar un único criterio para definir el problema de optimización (1.1). Sin embargo, existen muchas aplicaciones prácticas donde el diseñador puede desear optimizar simultáneamente dos o más funciones objetivo. La optimización con más una función objetivo se denomina *optimización multiobjetivo* o *multicriterio*. En este, se dice que un punto de diseño en el espacio de diseño factible es un óptimo de Pareto si no existe ningún otro punto en el espacio factible que reduzca alguna de las funciones objetivos sin aumentar otra. En Standler (1984) y Arora (2012) se presentan algunos de los distintos métodos de optimización multiobjetivo (método de la suma ponderada, método min-max ponderado, algoritmos genéticos, método de programación objetivo, etc.).

### 1.2.3. Restricciones de diseño

Los problemas de optimización estructural desde un punto de vista práctico, deben de ser formulados como problemas restringidos, de modo que los diseños deben satisfacer una serie de limitaciones para que puedan ser considerados como válidos.

Las restricciones se pueden agrupar en restricciones de igualdad y restricciones de desigualdad. Las restricciones de *igualdad* suelen estar asociadas a las relaciones que establecen el comportamiento de la estructura: ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad, ley de comportamiento de material, etc. Sin embargo, las restricciones de *desigualdad* suelen estar asociadas con limitaciones impuestas a la respuesta estructural: tensiones, desplazamientos máximos, frecuencias naturales de vibración, etc.

### 1.3. Tipos de optimización estructural

El problema de optimización estructural se puede abordar usando diferentes técnicas, dependiendo de cuales sean las variables a utilizar. De los cuatro tipos de variables mencionadas en el apartado 1.2.1, las propiedades constitutivas suelen considerarse como parámetros, siendo fijadas inicialmente por el diseñador. Por lo que las variables de diseño más frecuentes son: las propiedades de la sección, la geometría y la topología de la estructura.

Atendiendo al tipo de variable considerada, el problema de optimización estructural se puede clasificar como optimización de: tamaño, forma y topología.

#### 1.3.1. Optimización de tamaño

En la *optimización de tamaño* (o de *propiedades*) de estructuras discretas o de barras, las variables de diseño están relacionadas con propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos que constituyen la estructura (área de las barras, momentos de inercia, etc.). Técnicas de programación matemática (Zhou y Rozvany, 1996), criterios de optimalidad (Schmit y Miura, 1976) y métodos heurísticos (Xie y Steven, 1997) han sido ampliamente utilizados para resolver este tipo de problemas.

En el caso de estructuras continuas, las variables de diseño suelen ser los espesores de los elementos. Técnicas de programación matemática y métodos heurísticos como algoritmos genéticos (Osyczka, 2002), entre otros, han sido extensamente empleados para resolver el problema de optimización.

#### 1.3.2. Optimización de forma

En la *optimización de forma* (o de *geometría*), las variables de diseño están asociadas a propiedades que controlan la geometría de la estructura. La variación del contorno de la estructura puede necesitar de un modelo de análisis que se adapte de acuerdo con el proceso de optimización.

#### 1.3.3. Optimización de topología

Un factor que es crucial para alcanzar un diseño óptimo es la topología de la estructura. La *optimización de topología* es un proceso mediante el cual se determina la conectividad, forma y localización de cavidades en el diseño, permitiendo mayor libertad que la optimización de tamaño y forma. Por ello, esta optimización se puede considerar como una etapa preliminar o conceptual dentro del proceso de diseño, donde los cambios realizados en ocasiones, afectan significativamente al rendimiento del diseño.

La optimización de topología ha experimentado una rápida expansión en las últimas tres décadas tanto en la investigación y el desarrollo de nuevas metodologías como en el número de aplicaciones industriales. También, el alcance práctico de este tipo de optimización ha sido aplicado a otras áreas como: transferencia de calor, acústica, aeroelasticidad, flujo de fluidos, diseño de materiales, etc.

Una revisión actualizada sobre los métodos utilizados en optimización de topología estructural puede encontrarse en Rozvany (2009), Rozvany y Lewinski (2013) y Deaton y Grandhi (2014).

## 1.4. Métodos de optimización de estructuras continuas

A continuación se describe brevemente los diferentes métodos y técnicas que establecen el actual marco de optimización de estructuras continuas.

### 1.4.1. Programación matemática

La *programación matemática* (Mathematical Programming, MP) son un conjunto de técnicas que tratan de buscar la solución del problema (1.1) mediante el uso de métodos numéricos de forma que un conjunto de variables de diseño minimice o maximice la función objetivo satisfaciendo las restricciones impuestas. Estos métodos están basados en encontrar una dirección de movimiento a partir de la información del gradiente. El procedimiento comienza con una estimación inicial del conjunto de las variables de diseño, e ir actualizando iterativamente dichas variables a partir de la dirección  $\mathbf{d}$  y del paso  $\alpha$ , según la Ec. (1.2). La búsqueda termina cuando no se puede mejorar más el valor de la función objetivo sin violar alguna de las restricciones (Arora, 1989).

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d} \quad (1.2)$$

Los problemas de programación matemática se pueden clasificar en varias categorías dependiendo de la naturaleza y la forma de las variables de diseño (programación continua, entera o discreta). El problema se dice que es de *programación continua* cuando las variables pueden adoptar cualquier valor, de *programación entera* cuando las variables solo pueden adoptar valores enteros y de *programación discreta* cuando las variables solo pueden adoptar valores enteros dentro de una gama predefinida.

Otra clasificación se puede realizar en base a la linealidad de las funciones. Si la función objetivo y las restricciones son funciones lineales, el problema se denomina de *programación lineal*. Los métodos de programación lineal como el *método simplex* son sencillos de implementar. En cambio, si la función objetivo o cualquiera de las restricciones es una función no lineal, el problema se denomina de *programación no lineal*. Los problemas de programación no lineal pueden ser aproximados a problemas lineales mediante el uso de *la programación lineal secuencial*.

Estos métodos son extensamente utilizados, siendo aplicados en muchos campos de la ingeniería. Una revisión completa acerca del estudio y del uso de la programación matemática en optimización estructural puede encontrarse en Haftka y Gürdal (1992) y Arora (2012).

### 1.4.2. Criterio de optimalidad

Los criterios de optimalidad (Optimality Criteria, OC) están basados en las condiciones que una función debe satisfacer en el óptimo. Los métodos OC pueden proporcionar soluciones a problemas específicos, donde la solución puede encontrarse por medio de criterios que se sabe

(o se cree) que son apropiados para el problema tratado (Rozvany, 1989). Estos métodos son más eficientes que los métodos de programación matemática pero son menos generales.

Uno de los primeros OC fue el concepto de *diseño totalmente tensionado* (Fully Stressed Design, FSD), el cual tiene un claro concepto físico. El algoritmo FSD propuesto por Hinton y Sienz (1995), está basado en eliminar aquellas regiones para las cuales el valor de la tensión es inferior al establecido por un valor de corte. De esta manera, cada región de la estructura soporta la tensión máxima admisible al menos en uno de los estados de cargas especificados. La principal característica del método FSD es la ausencia de una función objetivo, por lo que no se puede asegurar que la solución obtenida converja a un mínimo. Además, un diseño FSD no es único para diferentes estados de carga. Por tanto, un algoritmo FSD puede llevar a una solución óptima en ciertos casos, pero lo más normal es que lleve a soluciones no óptimas o incluso a no encontrar una solución.

Apuntar que han ido surgiendo diferentes metodologías que intentan mejorar la eficiencia del procedimiento: CFS (Constant-weight Fully Stressed) y VCFS (Variable element dimension Constant-weight Fully Stressed) propuestos por Lin y Chao (2001), y PBO (Performance Based Optimization) y PBOC (Performance Based Optimality Criteria) desarrollados por Liang y Steven (2002).

### **1.4.3. Método de homogeneización**

La implementación del *método de homogeneización* en optimización estructural fue realizada por Bendsoe y Kikuchi (1988). Este método resuelve el problema de distribución de material en optimización de topología combinando el concepto de microestructura con la teoría de homogeneización (Sanchez-Palencia, 1980). Para ello, el volumen que ocupa la estructura se divide mediante una malla fija de elementos finitos de pequeño tamaño originando un material compuesto de porosidad variable. El objetivo del método se centra en determinar la microestructura de cada uno de los elementos, de forma que se minimice el peso y se maximice la rigidez de la estructura.

Existen diferentes tipos de microestructuras o celdas base. Estas se pueden dividir en dos categorías: células de material dispuestas en capas (Avellaneda, 1987) y micro-células con agujeros internos (Eschenauer y Olhoff, 2001).

Las estructuras optimizadas con el método de homogeneización originan diseños óptimos con grandes cantidades de áreas porosas, lo cual no resulta práctico para la mayoría de las aplicaciones en ingeniería (Rozvany et al., 1995).

### **1.4.4. Método de distribución de material sin homogeneización**

Existe otro conjunto de métodos que resuelven la distribución de material sin tener que recurrir a un modelo de microestructuras. Estos métodos se apoyan en el concepto de *material artificial* y en estos se usa una densidad artificial como variable de diseño para indicar la fase dentro de cada elemento. El valor 0 indica fase vacía y el valor 1 indica fase sólida. Estos métodos utilizan una penalización para convertir el problema de optimización de topología en uno de tamaño sobre un dominio fijo. El principal inconveniente radica en el número de variables de diseño, el cual resulta de ser muy elevado (una por cada elemento finito).

El método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) es la técnica más común y extendida dentro de los métodos basados en un material artificial (Bendsøe, 1989). El método utiliza la densidad relativa como variable de diseño, la cual es penalizada mediante una relación no lineal entre la densidad y la rigidez, atendiendo a una ley de interpolación:

$$E(\rho_e) = E_{min} + (E_0 - E_{min})\rho_e^p \quad (1.3)$$

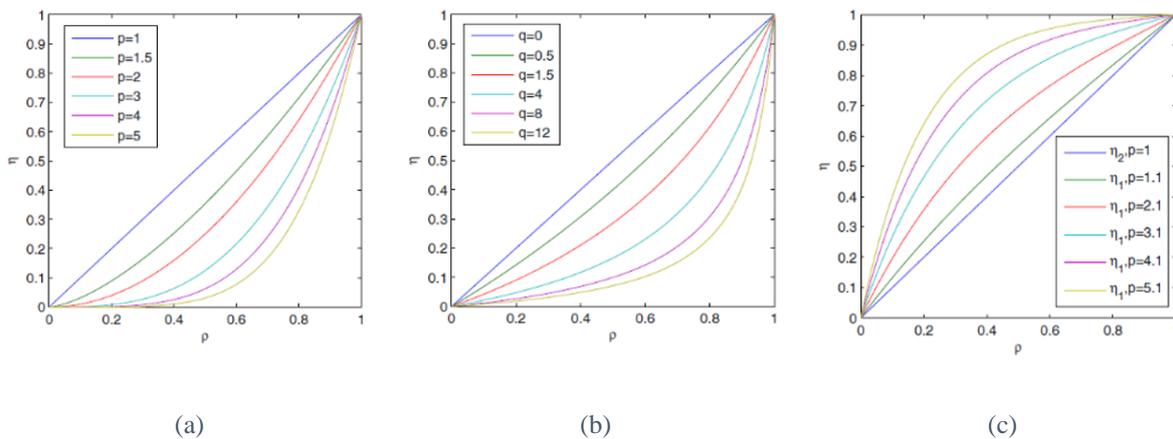
donde  $\rho_e$  es la densidad del elemento  $e$ ,  $E_0$  y  $E_{min}$  son el módulos de Young de la fase sólida y vacía respectivamente y  $p \geq 1$  es el factor de penalización usado para asegurar soluciones del tipo 0 ó 1. En estructuras continuas, un valor frecuente para el factor de penalización suele ser 3.

Los dos principales inconvenientes del método SIMP al aplicarse a estructuras continuas son: soluciones dependientes de la malla y soluciones en tablero de ajedrez (Sigmund y Peterson, 1998). Las *soluciones dependientes de la malla* tienen que ver con la obtención de diferentes topologías al variar el tamaño de la malla para el mismo dominio de diseño. Las *soluciones en tablero de ajedrez* son regiones donde los elemento cambian de fase vacía a solida de forma consecutiva. Una técnica para evitar estos dos problemas es utilizar filtros de la densidad o sensibilidad (Bendsøe y Sigmund, 2003; Lazarov et al., 2011). El inconveniente de los filtros es la formación de regiones con densidades intermedias, lo cual no tiene sentido desde un punto de vista de fabricación. Para superar este efecto se han aplicado métodos de proyección que transforman las densidades intermedias a 1 o 0 (Guest et al., 2004; 2011; Wang et al., 2011; Lazarov et al., 2011).

Stolpe y Svanberg (2001) proponen una ley de interpolación alternativa conocida como RAMP (Rational Approximation of Material Properties):

$$E(\rho_e) = E_{min} + (E_0 - E_{min}) \frac{\rho_e}{1 + q(1 - \rho_e)} \quad (1.4)$$

donde  $q$  es el parámetro de penalización. Una característica importante del método RAMP frente al método SIMP es que no tiene sensibilidad (derivada de  $E$  con respecto a  $\rho$ ) nula para densidad nula.



**Figura 1.2:** Comparación de métodos de material sin homogeneización. a) SIMP:  $\eta(\rho) = \rho^p$ ;

(b) RAMP:  $\eta(\rho) = \frac{\rho}{1+q(1-\rho)}$ ; y (c) SINH:  $\eta_1(\rho) = 1 - \frac{\sinh(p(1-\rho))}{\sinh(\rho)}$ ,  $\eta_2(\rho) = \rho$ .

Burns (2005) propone una ley de interpolación conocida como SINH. El método SINH es la función invertida de la ley propuesta por (Bendsøe, 1989). En la Figura 1.2 se puede observar una comparación entre las leyes de interpolación de SIMP, RAMP y SINH, donde  $\rho$  es la variable densidad,  $p$  el parámetro de penalización para SIMP y SINH, y  $q$  el parámetro de penalización para RAMP.

### 1.4.5. Métodos Hard-Kill

Los métodos Hard-Kill (HK) están basados en la eliminación o adición gradual de material en el dominio de diseño en base a un criterio heurístico, el cual normalmente no está basado en sensibilidad. Estos métodos son mucho más intuitivos y fáciles de implementar que los métodos de homogeneización y de distribución de material. El método hard-kill más conocido es el *método de optimización estructural evolucionaria* (Evolutionary Structural Optimization, ESO) inicialmente desarrollado por Xie y Steven (1993). A continuación, se describen algunos de los diferentes métodos que han surgido a partir del método ESO. Una revisión completa de estos métodos puede ser encontrada en Huang y Xie (2010).

#### 1.4.5.1. Optimización estructural evolucionaria

El método ESO (Xie y Steven, 1997) originalmente solo permitía la eliminación de una pequeña cantidad de material en cada iteración y estaba basado en el concepto de que un elemento estructural es eficiente cuando la tensiones son prácticamente uniforme para un nivel de seguridad. Es decir, que aquellas regiones que presentan una tensión (generalmente la de von Mises) inferior resultan ser ineficiente, y por lo tanto son eliminadas según:

$$\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR_i \sigma_{vm}^{\max} \quad (1.5)$$

donde  $\sigma_{vm}^{(e)}$  es la tensión de von Mises en el elemento  $e$ ,  $\sigma_{vm}^{\max}$  es la tensión máxima de von Mises en la estructura y  $RR_i$  es un ratio de rechazo para la iteración  $i$ .

Versiones recientes utilizan un procedimiento en dos etapas, para mejorar los resultados de la versión original de ESO (Edwards et al., 2007).

#### 1.4.5.2. Optimización estructural evolucionaria aditiva

A diferencia del método ESO donde los elementos son eliminados en aquellas zonas que no son necesarios, en el *método de optimización estructural evolucionaria aditiva* (Additive Evolutionary Structural Optimization, AESO) incorpora elementos a la estructura en aquellas regiones en las que son necesarios (Querin et al., 2000).

#### 1.4.5.3. Optimización estructural evolucionaria bidireccional

Con el propósito de mejorar tanto la eficiencia como la eficacia del método ESO, surge el *método de optimización estructural evolucionaria bidireccional* (Bi-directional Evolutionary

Structural Optimization, BESO). En el método BESO se combinan los métodos ESO y AESO, con el objeto de que trabajen de forma conjunta, permitiendo eliminar o añadir elementos según sea requerido (Young et al., 1999).

#### **1.4.5.4. Optimización estructural evolucionaria morfológica**

En ocasiones, el espesor es una de las variables a optimizar en una estructura. El método ESO no está capacitado para incluir esta variable, ya que en su formulación básica el elemento solo puede estar presente o no. Sin embargo, si en vez de utilizar un esquema binario, se define el elemento mediante un conjunto de variables mayor. La eliminación del elemento se realiza de una forma más gradual en vez de producirse de forma completa (Querin et al., 1999).

#### **1.4.5.5. Optimización estructural evolucionaria en grupo**

La *optimización estructural evolucionaria en grupo* optimiza conjuntos estructurales lo que proporciona: el número de componentes, la situación y los espesores (o alturas) óptimos (Lencus et al., 2002).

#### **1.4.5.6. Optimización estructural evolucionaria con algoritmos genéticos**

La *optimización estructural evolucionaria con algoritmos genéticos* (Genetic Evolutionary Structural Optimization, GESO) es un método en el cual se combinan los algoritmos genéticos (Genetic Algorithm, GA) con el método ESO (Liu et al., 2008). La principal característica en este método, es que cada elemento del dominio de diseño se trata como un individuo del algoritmo genético.

#### **1.4.5.7. Creación inteligente de cavidades**

Kim et al. (2000) proponen la *creación inteligente de cavidades* (Intelligent Cavity Creation, ICC), donde las soluciones en tablero de ajedrez pueden ser eliminadas controlando el número y la escala de las cavidades en la topología final. El método ICC elimina una pequeña cantidad de material en cada iteración. En primer lugar se eliminan los elementos situados en el contorno y a continuación los elementos interiores atendiendo al valor del índice ICC.

#### **1.4.6. Adaptatividad inversa**

El *método de adaptatividad inversa* (Reverse Adaptativity, RA) combina una malla de elementos finitos adaptativa con el método ESO (Reynolds et al., 1999). A diferencia del método ESO, en el método RA los elementos de menor tensión no son eliminados directamente de la estructura.

En el método RA, la estructura inicial y la optimizada se definen a partir de una malla de elementos finitos. Mediante el análisis de la estructura se obtiene la distribución de tensiones de von Mises en los elementos de la malla. Los elementos con una tensión inferior o igual a una

tensión de referencia son divididos, aumentando la precisión en estas regiones. Tras el refinamiento de los elementos, la estructura se reanaliza y los elementos con tensiones por debajo de la tensión de referencia son ahora eliminados. Por este motivo, el método es denominado adaptatividad inversa, ya que a diferencia de lo que ocurre en la adaptatividad convencional donde el refinamiento de malla ocurre en las zonas de altas tensiones, en este método el refinamiento de la malla se realiza en zonas de baja tensión.

#### **1.4.7. Translación de material evolucionaria**

La *translación de material evolucionaria* (Evolutionary Material Translation, EMT) es un método basado en el método RA combinado con métodos de adicción de material (Reynolds et al., 2001).

El método se basa en eliminar aquellos elementos donde se obtienen niveles de tensión inferior a un valor de referencia y añadir elementos donde se obtienen tensiones superiores a otro nivel de referencia. Este método, en primer lugar elimina material siguiendo el método RA. A continuación, se realiza un nuevo análisis y se añaden elementos en aquellas zonas con una tensión elevada.

#### **1.4.8. Métodos basados en crecimiento biológico**

El estudio de las estructuras biológicas (huesos, arboles, cuernos, etc.) revela que existe una fuerza impulsora que conduce el crecimiento de estas estructuras hacia estados de tensión constante (axiom of constant stress).

A partir de estas observaciones, Mattheck y Burkhardt (1990) propusieron un método para la optimización de forma denominado *optimización asistida por ordenador* (Computer Aided Optimization, CAO). Los autores observaron que p.ej.: los arboles ajustan su crecimiento de modo que la tensión su contorno esté igualmente distribuida. Para ello, los elementos con un nivel de tensión elevado aumentan su volumen (swelling) simulando con ello la agregación de material. Mientras que los elementos con niveles de tensión bajo ven disminuir su volumen (shrinkage) representando la sustracción de material. Las estructuras obtenidas con CAO no muestran picos de tensiones (Cervera, 2003).

Baumgartnert et al. (1992) propusieron otro método de optimización de estructuras basado en la mineralización de los huesos, en el cual las zonas de tensión elevada conducen a un grado de mineralización mayor que las zonas de menor tensión. En este método se modifica el módulo de Young de manera que los elementos con tensiones mayores aumentan su módulo de Young mientras que los elementos sujetos a una tensión menor lo ven reducido.

#### **1.4.9. Método de la burbuja**

Eschennauer y Schumacher (1994) proponen un método de optimización de topología denominado *método de la burbuja* (Bubble method). El procedimiento se basa en introducir

pequeñas burbujas (cavidades o huecos) en aquellas zonas donde el nivel de tensiones es reducido.

El principal inconveniente de este método reside en implementar un algoritmo que obtenga eficazmente el número y la posición de las burbujas. Los autores destacan que el método es atractivo desde el punto de vista de fabricación, ya que se genera diseños con geometrías muy suavizadas.

#### **1.4.10. Optimización con isolíneas**

Las isolíneas son líneas que unen puntos en los cuales un cierto criterio presenta el mismo valor. Por lo que, el valor de ese criterio permanece constante según nos movemos a lo largo de la misma.

Victoria et al. (2009) proponen un procedimiento, denominado *diseño de topología con isolíneas* (Isolines Topology Design, ITD), con el que relacionan la forma y topología de estructuras continuas bidimensionales con las isolíneas del criterio estructural deseado (tensión equivalente de von Mises, energía de deformación, etc.). El procedimiento elimina material y añade y/o redistribuye el mismo en aquellas zonas en las que el criterio seleccionado supera la isolínea de un cierto nivel. Una versión más actual, utiliza el *método de elementos finitos extendido* (eXtended Finite Element Method, X-FEM) en lugar de una malla fija de elementos finitos (Fixed Grid-Finite Element Method, FG-FEM) (Abdi et al., 2014).

#### **1.4.11. Optimización de topología basada en forma**

Los métodos de variación de contorno son básicamente métodos de optimización de forma a los que se les incorpora alguna técnica de creación de cavidades. En estos, el contorno de la geometría se puede representar de forma paramétrica o de forma implícita. La *forma paramétrica* representa las coordenadas de un punto por medio de funciones explícitas de un parámetro independiente. En cambio, en la *forma implícita* se establece una relación implícita entre las coordenadas. En la literatura, podemos encontrar dos métodos que utilizan funciones implícitas para definir el contorno: el método de las curvas de nivel y el método de campo de fase (Dijk et al., 2013, Chen, 2012).

##### **1.4.11.1. Representación paramétrica**

En los primeros trabajos se utilizaban las coordenadas de los nodos del contorno de los elementos finitos como variables de diseño (Zienkiewicz y Campbell, 1997). El problema asociado con esta metodología es que el número de variables de diseño puede ser muy grande, lo que puede suponer un elevado coste computacional, así como a generar formas no realistas e impracticables. Una alternativa es utilizar polinomios para describir los contornos, utilizándose como variables de diseño los coeficientes del polinomio (Francavilla et al., 1975). El uso de polinomios de alto orden puede reducir considerablemente el número total de variables pero puede originar contornos oscilatorios debido a inestabilidades numéricas (Ding,

1986). Este problema puede ser evitado utilizando funciones del tipo B-spline, cuya geometría se define mediante polígonos de control cuyos vértices (puntos de control) son utilizados como variables de diseño (Tang y Chang, 2001). Más recientemente, funciones B-spline racionales no uniformes (Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS) se han utilizado en optimización de forma debido a su mayor flexibilidad, lo cual permite obtener geometrías no definibles usando B-spline como: círculos o elipses (Cervera y Trevelyan, 2005).

#### 1.4.11.2. Representación implícita,

A. Método de las curvas de nivel.

El *método de las curvas de nivel* (Level Set Method, LSM) ha sido tradicionalmente utilizado para modelar problemas de superficie libre. El método fue originalmente desarrollado como una herramienta matemática para modelar el movimiento entre caras (Sethian, 1999).

Este método representa la estructura mediante una función escalar de alto orden (función de curva de nivel) cuyo curva de nivel cero (o contorno) coincide con la topología de la estructura. La optimización estructural se lleva a cabo permitiendo una variación de la función de la curva de nivel con el tiempo ( $t$ ). Según esta, el contorno se define como:

$$S(t) = \{x(t) : \Phi(x(t), t) = k\} \quad (1.6)$$

donde  $\Phi$  es la función de curva de nivel correspondiente a un valor de contorno  $k$  y  $x$  es el conjunto de puntos en el contorno de la estructura. Dicha función divide el dominio de la estructura en tres regiones (Ec. 1.7)

$$\begin{cases} \Phi(x(t)) > 0 & : x(t) \in \Omega \\ \Phi(x(t)) = 0 & : x(t) \in \partial\Omega \\ \Phi(x(t)) < 0 & : x(t) \notin \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

donde  $\Omega$  representa el dominio de diseño de la estructura y  $\partial\Omega$  el contorno (figura 1.3).

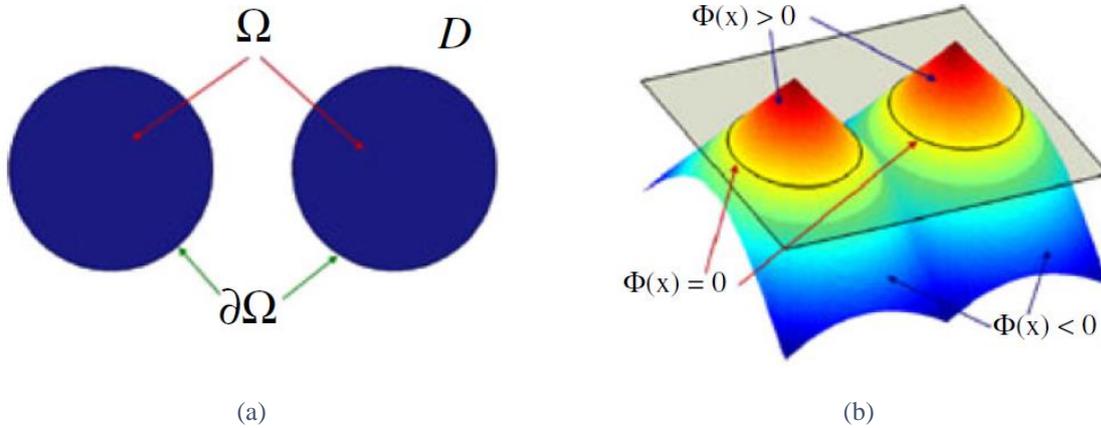
La ecuación de Hamilton-Jacobi se obtiene diferenciando la Ec. 1.6 de nivel cero.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \mathbf{V}(x) = 0 \quad (1.8)$$

Para obtener el contorno estructural óptimo, la ecuación de Hamilton-Jacobi se resuelve de forma iterativa.

Una limitación de este método es la imposibilidad de crear nuevas cavidades, ya que la formulación solo permite cambios en la forma del contorno pero no en la topología. Para superar esta dificultad se han propuesto diferentes estrategias que permiten incluir la derivada topológica en el método de las curvas de nivel (Burger y Stainko, 2004; Allaire y Jouve, 2006; He et al., 2007). La derivada topológica representa el cambio de la función objetivo con respecto a la inserción de una pequeña cavidad, permitiendo la nucleación de nuevas cavidades en cualquier región del dominio de diseño (Dunning y Kim; 2013).

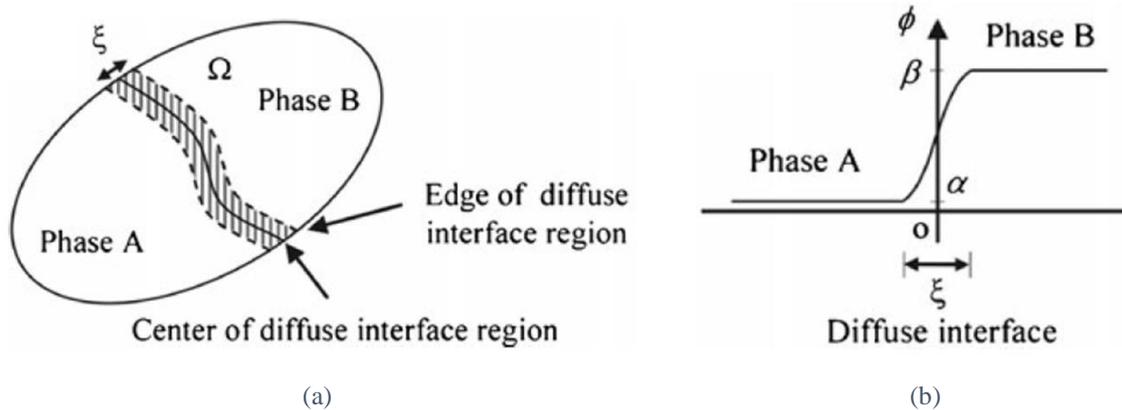
Una revisión más exhaustiva sobre LSM se puede encontrar en Burger y Osher (2005) y en van Dijk et al. (2013)



**Figura 1.3:** Curvas de nivel (Luo et al.; 2012). (a) Topología 2D. (b) Correspondiente función de curva de nivel.

### B. Método de campo de fase

El *método de campo de fase* (Phase-Field Method, PFM) está basado en representar la dinámica que ocurre en las transiciones de fase (p.ej.: sólido-líquido) (Chen, 2002). Este método fue aplicado por primera vez a la optimización de topología por Bourdin y Chambolle (2003). En este método se utiliza una función de campo de fase  $\Phi$  para especificar la separación del dominio de diseño en dos fases A y B. La región del contorno entre fases es una región que varía su espesor  $\xi$  de forma continua (ver figura 1.4). Estas regiones delimitan la topología de la estructura obteniéndose la topología óptima mediante ecuaciones de evolución dinámica de la función de campo de fase.



**Figura 1.4:** Funciones de campo de fase (Takezawa et al., 2010). (a) 2-D. (b) 1-D.

### 1.4.12. Recocido simulado

El *recocido simulado* (Simulated Annealing, SA) es un método estocástico cuya idea proviene de la física estadística. Este método intenta reproducir el procedimiento físico de un

recocido controlado de un metal. El proceso conlleva el calentamiento de un sólido (o líquido) para posteriormente ser enfriado hasta cristalizar en una estructura perfecta. Si el enfriamiento es lo suficientemente lento, las moléculas se organizan de forma que su nivel de energía se corresponda con un mínimo global. Por el contrario, si el proceso se realiza de forma rápida, el nivel de energía que se alcanza corresponde con un mínimo local.

La idea de que este proceso físico pudiera ser utilizado para resolver problemas de optimización estructural fue propuesta de forma independiente por Kirkpatrick et al. (1983) y Cerny (1985). El método consiste en generar aleatoriamente un diseño y evaluar su función objetivo, de modo que, si el diseño resulta no factible se descarta y se genera un nuevo diseño. Si el diseño es factible y la función objetivo proporciona un resultado mejor que el mejor resultado obtenido hasta ese momento, se conserva el diseño. Si el diseño es factible pero la función objetivo proporciona un resultado peor al mejor resultado guardado hasta ese momento, el diseño se acepta o descarta en función de un criterio probabilístico de aceptación.

El método SA ha sido ampliamente utilizado en problemas de optimización de estructuras debido a su simplicidad y facilidad para obtener el óptimo global, incluso en casos donde el número de variables de diseño es elevado.

#### **1.4.13. Optimización por enjambre de partículas**

La *optimización por enjambre de partículas* (Particle Swarm Optimization, PSO) es un método estocástico que está basado en el comportamiento social de algunas especies como: bandada de pájaros, enjambre de insectos, banco de peces, etc. Este método fue propuesto por Kennedy (1995) y aplicado por primera vez a la optimización de topología de estructuras por Fourie y Groenwold (2001).

Este método imita el comportamiento social donde un individuo intercambia con los más próximos su posición, su velocidad y su bienestar (local), intentando con ello, que el grupo tienda a moverse a regiones de mayor bienestar (global).

A pesar de ser una técnica muy simple y necesitar pocos parámetros de ajuste, la PSO puede presentar el inconveniente de una convergencia prematura.

#### **1.4.14. Optimización por colonia de hormigas**

El método de *optimización por colonia de hormigas* (Ant Colony Optimization, ACO) pretende imitar el comportamiento natural de las colonias de hormigas, abejas o avispas (Camp y Bichon 2004). Las colonias están formadas por individuos que desarrollan diferentes tareas como: la búsqueda de comida, la construcción, la defensa, etc. Cada individuo debe realizar su tarea interactuando con el resto de la población de tal forma de que si dicho individuo no es capaz de realizar su tarea, la colonia si la realizará.

#### **1.4.15. Algoritmos evolutivos**

Los algoritmos evolutivos surgen como consecuencia de los inconvenientes y limitaciones de la MP y los OC al ser aplicados a problemas complejos con un alto número de

variables. Las técnicas de optimización clásicas requieren de funciones continuas y derivables, lo cual no es siempre posible en problemas de optimización estructural.

Los algoritmos evolutivos tratan de mimetizar los fenómenos naturales y los procesos físicos de la evolución presentada por Darwin, donde se preservan las diferencias individuales favorables y se erradican las perjudiciales. En resumen, la supervivencia del más apto. Bajo esta denominación se engloban los métodos conocidos como: *programación evolutiva* (Evolutionary Programming, EP), *estrategias evolutivas* (Evolutionary Strategies, ES), *algoritmos genéticos* (Genetic Algorithm, GA), y *programación genética* (Genetic Programming, GP). La idea básica común a las diferentes estrategias es la misma, consistente en evolucionar una población de individuos (candidatos a ser solución de un problema conocido) utilizando operadores inspirados en la selección natural y en la variación genética (cruce, recombinación, y mutación). Durante estas operaciones, los mejores candidatos son elegidos para formar parte de la siguiente generación, descartando los menos aptos.

#### **1.4.15.1. Programación evolutiva**

El método de EP fue concebido por Fogel (1962) y posteriormente revisado por su hijo (Fogel, 1992). El interés de Fogel se concentró en la simulación del comportamiento inteligente (machine learning) empleando para ello máquinas FSM (Finite State Machines) capaces de aprender una secuencia de símbolos para predecir los siguientes. El procedimiento establece como principal operador de búsqueda la mutación Gaussiana.

#### **1.4.15.2. Estrategias evolutivas**

El método ES fue desarrollado por Rechenberg (1965). A diferencia del resto de algoritmos evolutivos, el método ES fue concebido como un procedimiento para la optimización numérica. El método ES permite incorporar en su algoritmo los siguientes operadores: recombinación, mutación y selección.

#### **1.4.15.3. Algoritmo genético**

Los principios básicos de los GA fueron establecidos por Holland (1975) y están basados en la evolución de los seres vivos. Es decir, que una población de individuos evoluciona de acuerdo a los principios de selección natural (postulados de Darwin, (1859)) y supervivencia del más fuerte. A diferencia de ES y EP, en los GA se evoluciona el genotipo y no el fenotipo. El operador principal en un GA es la recombinación (o cruce), siendo la mutación un operador secundario.

#### **1.4.15.4. Programación genética**

La GP fue derivada de los algoritmos genéticos y propuesta por Koza (1992). En éstos, los individuos que componen la población son programas ejecutables organizados en forma de árboles sintácticos. El proceso de optimización comienza con la definición de las funciones necesarias para realizar el programa. A continuación, se genera una población inicial de árboles que utilizan estas funciones. Sobre esta población se aplican los operadores: selección, cruce, y mutación. El operador cruce funciona intercambiando subárboles entre distintas soluciones, la

mutación modifica de forma aleatoria alguno de los nodos, y para la selección de los individuos que sobreviven a la siguiente generación se utiliza una función de evaluación que comprueba los resultados obtenidos.

#### **1.4.16. Método basado en división celular**

Más recientemente, Kobayashi (2010) desarrollo un nuevo método de optimización de topología inspirado en la división celular. Este método se sirve de sistemas de mapas (map system) y de los GA para alcanzar la solución. Un mapa se define como un conjunto finito de regiones delimitadas por unas líneas de contorno. Esta configuración es análoga a la disposición celular, donde las regiones representan a las células y las líneas de contorno a la pared celular. A partir de una serie de reglas sobre el proceso de mapeado, se determina la topología de la estructura. La optimización se lleva a cabo mediante un GA donde el mapeado se codifica mediante una representación binaria.

#### **1.4.17. Discusión de los métodos de optimización**

En la actualidad existen tres grandes aproximaciones para la resolución del problema de optimización planteado en la Ec. (1.1): métodos directos, métodos formales, y métodos heurísticos.

Los métodos directos (ESO, AESO, BESO, ICC, RA, OC, etc.) tratan de obtener un diseño: (1) que satisfaga un criterio específico; y (2) que a su vez cumpla con el objetivo buscado. Dicho criterio puede ser intuitivo o deducido matemáticamente de las características particulares del problema. Estos métodos no se pueden generalizar, ya que dependen de la configuración del problema, pero suelen ser más efectivos que los métodos formales.

Los métodos formales (MP), tratan de formular matemáticamente el problema en lugar de basarse en aspectos físicos del mismo. Estos métodos son capaces de resolver problemas generales. El gran inconveniente es que requieren información que no siempre está disponible o es muy complicada de obtener. Otro inconveniente de estos métodos es que el óptimo global no se puede garantizar ya que la solución depende de la posición de partida, lo que puede llevar a encontrar un mínimo local en vez de un mínimo global.

Los métodos heurísticos (PSO, ACO, SA, ES, EP, GP, GA), a diferencia de los métodos formales, no siguen un esquema de búsqueda preestablecido. Aunque estos métodos tienden a buscar el óptimo global, no se puede garantizar que la solución encontrada lo sea, por lo que es necesario ejecutar el algoritmo varias veces para tener la certeza de que la solución encontrada es un óptimo global.

Destacar que durante los últimos años, se ha experimentado un gran avance en el campo de la optimización de estructuras con la aparición de: nuevos enfoques, nuevas aplicaciones, y métodos más rigurosos incorporando nuevas restricciones como: restricciones de tensión, de fabricación, etc.

## 1.5. Optimización bajo incertidumbre

El problema de optimización estructural, tradicionalmente, se ha abordado desde un punto de vista determinista, sin considerar las fuentes de incertidumbre presentes en la realidad que intervienen en el problema. En una optimización estructural, las incertidumbres pueden presentarse por: imperfecciones en el proceso de fabricación, variabilidad en las propiedades del material, o condiciones de cargas desconocidas.

Tradicionalmente, el efecto de las incertidumbres se ha introducido en el proceso de diseño utilizando *hipótesis y criterios ingenieriles* que permiten tratar el problema de forma determinista.

- Con el uso de hipótesis se obtiene un modelo simplificado donde las variables y/o parámetros de diseño son caracterizados con certeza a sus valores medios o extremos. Sin embargo, las soluciones óptimas alcanzadas mediante este enfoque, tienen un comportamiento óptimo solo bajo condiciones operativas cercanas a las fijadas en el proceso de optimización, pudiendo empeorar en gran medida cuando las condiciones se alejan de las de diseño.
- Con el uso de criterios ingenieriles, tales como los factores de seguridad, se pueden obtener soluciones demasiado conservadoras o incluso incoherentes debido a la falta de conocimiento de la dispersión que puede originarse en el rendimiento de la estructura.

En los últimos años, la necesidad de incorporar las incertidumbres de las variables involucradas en el proceso de diseño, ha estimulado el interés hacia formulaciones de diseño capaces de incluir explícitamente aquellas fuentes de incertidumbre que pueden provocar cambios significativos: en la respuesta de la estructura, en la robustez, y en la fiabilidad del diseño final. Dichas formulaciones se conocen como problema de *optimización bajo incertidumbre* (Optimization Under Uncertainty, OUU).

Al considerar fuentes de incertidumbre en el problema (1.1), este se puede reformular como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\
 &\text{sujeto a:} && h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 && j = 1, \dots, n_i \\
 &&& g_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq 0 && k = 1, \dots, n_d \\
 &&& x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup} && i = 1, \dots, n_x
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde  $\mathbf{x}$  es el espacio de diseño, y  $\mathbf{z}$  representa el vector que contiene las incertidumbres asociadas a cada variable y/o parámetro. Como se observa en la Ec. 1.9, las fuentes de incertidumbre afectan tanto a la función objetivo como a las restricciones.

La formulación del problema de optimización estructural bajo incertidumbre está estrechamente relacionado con el modelado de la incertidumbre. Básicamente se distinguen dos formulaciones: no-probabilísticas y probabilísticas. En las formulaciones *no-probabilísticas*, no se dispone de información suficiente para caracterizar las incertidumbres por medio de funciones de densidad de probabilidad (probability density function, pdf). Por ello, la incertidumbre se modela mediante conjuntos convexos (Pantelides y Ganzerli, 1998) o

conjuntos difusos (Sakawa, 1993). El diseño óptimo se obtiene utilizando una estrategia anti-optimización (también llamada enfoque min-max o análisis del peor caso) (McWilliams, 2000). En el caso de formulaciones *probabilísticas* (o *estocásticas*), se sirven de una pdf para caracterizar la incertidumbre. Actualmente, se distinguen dos tipos de formulaciones estocásticas dependiendo de las funciones que se ven afectadas por la incertidumbre: *Diseño Óptimo Basado en Fiabilidad* (Reliability-Based Design Optimization, RBDO) donde el efecto de las incertidumbres es cuantitativamente expresado mediante probabilidades de fallo (Frangopol y Maute, 2004; Qiu et al., 2013) y el *Diseño Óptimo Robusto* (Robust Design Optimization, RDO), en el cual se buscan soluciones que sean poco sensibles ante la presencia de las incertidumbres (Schuëller y Jensen, 2008; Lee et al., 2010).

### 1.5.1. Diseño óptimo basado en fiabilidad

En el RBDO, el problema de optimización se formula como la minimización de una función objetivo determinista sujeta a restricciones de tipo estocástico. De este modo, el problema RBDO se formula como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\
 &\text{sujeto a:} && \mathbb{E}[h_j(\mathbf{x})] = 0 && j = 1, \dots, n_i \\
 &&& \mathbb{P}[g_k(\mathbf{x}) \leq 0] \leq P_{max} && k = 1, \dots, n_d \\
 &&& x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup} && i = 1, \dots, n_x
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde las restricciones de desigualdad e igualdad son medidas mediante probabilidades de fallo  $\mathbb{P}[g_k(\mathbf{x}) \leq 0]$  y valores medios  $\mathbb{E}[h_j(\mathbf{x})]$  respectivamente, y  $P_{max}$  es la probabilidad máxima admisible.  $\mathbb{E}[\ ]$  representa el operador estadístico esperanza o valor medio y el cual se ve con más detalle en el capítulo 6.

### 1.5.2. Diseño óptimo robusto

El objetivo del RDO es obtener un diseño que sea poco sensible ante la presencia de las incertidumbres. El problema de RDO se centra en satisfacer una función objetivo mediante algún criterio de robustez  $R(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , buscando soluciones que sean poco sensibles frente a las variaciones de las variables y/o parámetros de diseño. En este contexto, no es necesario garantizar un cierto nivel de fiabilidad de las restricciones, sino que es suficiente garantizar un cierto nivel de robustez de las mismas. Trabajos como el de Parkinson et al. (1993) reformulan el problema como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && R(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\
 &\text{sujeto a:} && \mu_{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})} + \beta \sigma_{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \leq 0 && j = 1, \dots, n_i \\
 &&& \sigma_{h_k(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \leq \sigma_k^+ && k = 1, \dots, n_d \\
 &&& x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup} && i = 1, \dots, n_x
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde,  $\mathbf{x}$  es el vector de las variables de diseño y  $\mathbf{z}$  es el vector de variables aleatorias. La restricción de desigualdad se formula en función de sus dos primeros momentos estadísticos,

media  $\mu_{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$  y desviación estándar  $\sigma_{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ , donde  $\beta$  representa la relación entre la media y la desviación estándar;  $\sigma_k^+$  es el límite superior admisible para la desviación estándar de la respuesta estructural;  $n_d$ ,  $n_i$  y  $n_x$  representan el número de restricciones de desigualdad, igualdad y variables de diseño respectivamente; y  $x_i^{inf}$  y  $x_i^{sup}$  acotan inferiormente y superiormente el valor de las variables de diseño.

A diferencia de lo que ocurre en la formulación basada en RBDO, en el caso de RDO no existe una formulación única para el problema, dependiendo en gran medida del criterio de robustez elegido. En la literatura se distinguen diferentes criterios de robustez probabilísticos: *criterios basados en el cuartil de la distribución*, *criterios basados en los momentos estadísticos* y *criterios basados en la diferencia de percentiles* (Martínez, 2013).

El enfoque más extendido consiste en utilizar los dos primeros momentos estadísticos de la respuesta: media  $\mu_f$  y desviación estándar  $\sigma_f$ . El valor medio y la desviación estándar de la función objetivo se definen respectivamente como:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mu_f = \mathbb{E}[f(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{z})p_z(\mathbf{z})d\mathbf{z} \quad (1.12)$$

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sigma_f = \sqrt{\mathbb{E}[f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mu_f]^2} = \sqrt{\int [f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \mu_f]^2 p_z(\mathbf{z})d\mathbf{z}} \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de las variables de diseño determinista,  $\mathbf{z}$  el vector de variables aleatorias, y  $p_z(\mathbf{z})$  la pdf que caracteriza a las variables aleatorias. La resolución analítica de estas dos integrales puede ser difícil o incluso imposible de calcular para funciones complejas. Por ello, en los últimos años se han desarrollado métodos alternativos para evaluar de forma aproximada dichos momentos estadísticos. Los diferentes métodos de propagación de la incertidumbre recogidos en la bibliografía (Tabla 1) se pueden clasificar en 5 grupos: *métodos de simulación*, *métodos de expansión*, *métodos basados en el punto más probable*, *métodos basados en meta-modelos* y *métodos de integración aproximada*. Una descripción más detallada se puede encontrar en los trabajos de Ditlevsen y Madsen (1996), Melchers (1999), Lemaire (2009) y Martínez (2014).

### 1.5.3. Diferencias entre el diseño robusto y el diseño fiable

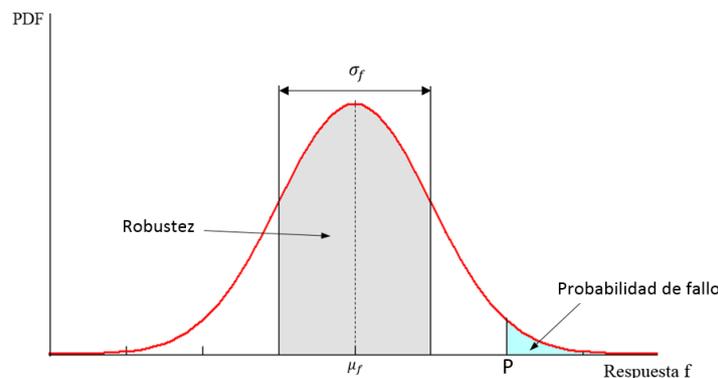
Aunque ambos métodos incorporan la variación de la incertidumbre dentro del proceso de diseño, estos se diferencian en tres aspectos fundamentales.

1. La robustez estructural se determina mediante un criterio que evalúe la variabilidad de la respuesta en torno a su valor medio, normalmente su desviación estándar. Mientras que, la fiabilidad se relaciona con probabilidades de fallo (ver figura 1.5). En términos generales, RBDO se relaciona más con satisfacer los requerimientos fiables bajo entradas de pdf conocidas y menos con reducir la variación de la respuesta estructural. El RBDO es un proceso iterativo basado en desplazar la media de la respuesta estructural de forma que cada vez sea mayor (ver figura 1.6), mientras que el RDO se centra en disminuir la variabilidad de la respuesta (ver figura 1.7).

**Tabla 1.1:** Principales métodos de propagación de incertidumbre.

Métodos de simulación	Métodos de expansión	Métodos basados en el punto más probable	Métodos basados en meta-modelos	Métodos de integración aproximada
- MC	- PM	- FORM	- SRM	- UDR
- Quasi-MC	- NEM	- SORM	- KM	- BDR
- LHS	- SSEM		- RBF	- GDR
- IS	- MSEE		- NN	
- DS	- SSM			
- MCMC	- SRSM			
	- DEMM			
	- SCM			

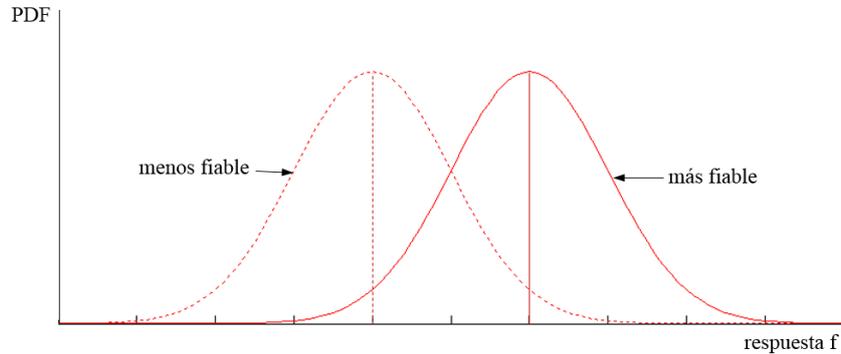
MC: Monte Carlo; LHS: muestreo por hipercubo latino (Latin Hypercube Sampling); IS: muestreo por importancia (Importance Sampling); DS: muestreo direccional (Directional Sampling); MCMC: Monte Carlo usando cadenas de Markov (Markov Chain Monte Carlo); PM: método de perturbación (Perturbation Methods); NEM: método de expansión de Neumann (Neumann Expansion Method); SSEM: método de expansión estocástica espectral (Stochastic Spectral Expansion Method); MSEE: Método de Solución Estadística Equivalente; SSM: método de expansión estocástica (Spectral Stochastic Method); SRSM: método de superficie de respuesta estocástica (Stochastic Response Surface Methods); DEMM: método de modelado determinístico equivalente (Deterministic Equivalent Modelling Method); SCM: método de colocación estocástica (Stochastic Collocation Method); FORM: método de fiabilidad de primer orden (First Order Reliability Method); SORM: método de fiabilidad de segundo orden (Second Order Reliability Method), SRM: método de la superficie de respuesta (Surface Response Method); KM: modelos kriging (Kriging Models); RBF: funciones de base radial (Radial Basis Function); NN: redes neuronales (Neural Networks); UDR: método de reducción univariable (Univariate Reduction Method); BDR: método de reducción bivariante (Bivariate Dimensional Reduction); GDR: método de reducción multivariable (Generalized Dimension Reduction)



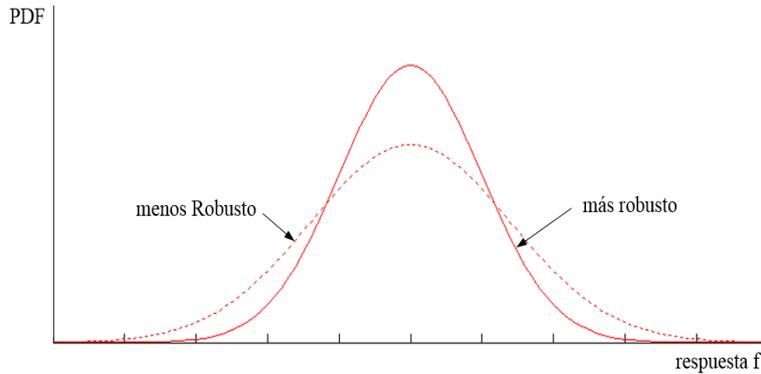
**Figura 1.5:** Concepto de robustez y fiabilidad para una pdf normal de la respuesta. El intervalo definido  $\sigma_f$  es una medida de la robustez y representa el promedio de diferencia que hay entre los datos y la media. La probabilidad de fallo (área azul) es una medida de fiabilidad y representa la probabilidad de exceder P.

- En RBDO se presta una atención especial a la seguridad estructural de los eventos extremos, mientras que en RDO pone más énfasis en el comportamiento estructural bajo fluctuaciones diarias durante su vida de servicio. Por esta razón, RBDO se asocia directamente o indirectamente con el daño inducido por el fallo catastrófico de la estructura y RDO con el gasto derivado de una pobre calidad del rendimiento estructural. En ambos casos, el riesgo

de un diseño es una combinación entre la probabilidad de un evento no deseado y las consecuencias de ese evento. En la figura 1.8 se muestra los dominios de optimización bajo incertidumbre en función de la frecuencia de un evento y el impacto de este.



**Figura 1.6:** Estrategia RBDO: movimiento de la media. Gráfico con línea sólida más fiable al contar con una P mayor para una misma probabilidad de fallo.



**Figura 1.7:** Estrategia RDO: disminuir dispersión. Línea sólida es más robusta, al ser menor su desviación estándar.

3. En RBDO se presta una atención especial a la seguridad estructural de los eventos extremos, mientras que en RDO pone más énfasis en el comportamiento estructural bajo fluctuaciones diarias durante su vida de servicio. Por esta razón, RBDO se asocia directamente o indirectamente con el daño inducido por el fallo catastrófico de la estructura y RDO con el gasto derivado de una pobre calidad del rendimiento estructural. En ambos casos, el riesgo de un diseño es una combinación entre la probabilidad de un evento no deseado y las consecuencias de ese evento. En la figura 1.8 se muestra los dominios de optimización bajo incertidumbre en función de la frecuencia de un evento y el impacto de este.
4. En RBDO es necesario una descripción completa de las incertidumbres mediante su pdf, mientras que en RDO solo es necesario alguna característica que mida la variabilidad en la respuesta como puede ser su desviación estándar.

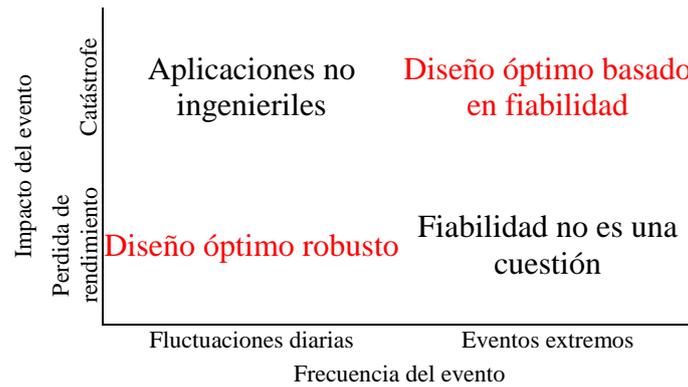


Figura 1.8: Escenarios posibles (Zang et al. 2002).

Tabla 1.2: Comparación entre RDO y RBDO.

	Diseño Óptimo Robusto	Diseño Óptimo basado en Fiabilidad
Descripción de la incertidumbre	Media y desviación estándar	Función de distribución de probabilidad
Objetivo de diseño	Reducir variabilidad	Min. bajo restricciones probabilistas
Tipo de análisis	Análisis variacional (dispersión)	Análisis fiable (probabilidades de fallo)
Estrategia	Reducir variación respuesta	Mover media respuesta

## 1.6. Revisión del estado del arte del diseño óptimo robusto de topología

En los últimos años, ha crecido el interés por obtener diseños óptimos robustos y fiables de topología. Una extensa revisión del diseño óptimo fiable de topología (Reliability-based Topology Optimization, RBTO) se puede encontrar en Mozunder et al. (2006). Sin embargo, el número de trabajos sobre diseño óptimo robusto de topología (Robust Topology Optimization, RTO) es considerablemente menor.

El RTO se basa en obtener diseños de topología óptimos poco sensibles a variaciones en las variables y/o parámetros de diseño. Desde hace unos años, se han desarrollado varias metodologías de RTO donde se combinan métodos deterministas de optimización de topología existentes con métodos estocásticos de representación y propagación de incertidumbres. En el campo de las estructuras continuas, el problema de RTO básicamente se ha tratado a partir de dos metodologías de optimización de topología: LSM y SIMP.

**LSM:** Conti et al. (2009) combinan técnicas de programación estocástica con LSM para la optimización de topología de estructuras bajo cargas puntuales inciertas. Shikui et al. (2010) caracterizan las incertidumbres de material mediante un campo aleatorio. Los autores aplicaron un método de aproximación, Karhunen-Loeve (K-L), para reducir la alta dimensionalidad del campo aleatorio por un reducido conjunto de variables aleatorias y utilizaron el método de reducción univariable (Univariate Dimension Reducción, UDR) junto con muestreo de cuadratura de tipo Gauss para calcular los dos primeros momentos estadísticos. Shikui y Wei (2011) modelan las incertidumbres en la geometría del contorno caracterizando la velocidad normal del contorno de diseño por medio de un campo aleatorio. Los autores utilizan K-L para aproximar el campo aleatorio mediante un reducido número de variables y UDR para propagar

el efecto de las incertidumbres sobre la función objetivo. Dunning et al. (2011) minimizan la compliance esperada con incertidumbre en magnitud y dirección de la carga, considerando distribuciones normales e independientes. El método es equivalente a un problema de múltiples estados de carga donde las cargas y los pesos son obtenidos analíticamente a partir de la Ec. (1.10). Dunning et al. (2013) amplían la formulación anterior mediante la consideración de la varianza en la función objetivo.

**SIMP:** Lazarov et al. (2012a) consideran pequeñas incertidumbres en la geometría, la cual se caracteriza por medio de un campo aleatorio. El campo aleatorio se discretiza mediante K-L y se utiliza el método de perturbación para medir la influencia de la incertidumbre sobre la respuesta estructural. Lazarov et al. (2012b) modelan incertidumbres geométricas y de material mediante campos aleatorios. El campo aleatorio se discretiza mediante K-L o Expansion Optimal Linear Estimator (EOLE) en un conjunto reducido de variables aleatorias. Los momentos estadísticos de la función objetivo son evaluados mediante el método de colocación. Tootkaboni et al. (2012) propone un método estocástico espectral para la representación y propagación de la incertidumbre en las propiedades de material. Jansen et al. (2013) caracterizan las incertidumbres geométricas introduciendo una pequeña perturbación sobre el centro del filtro de densidad, y utilizan el método de Monte Carlo para estimar los momentos estadísticos. Zhao y Wang (2014a; 2014b) consideran incertidumbres en cargas concentradas y/o distribuidas. Las cargas distribuidas son modeladas mediante un campo aleatorio el cual se discretiza en un reducido número de variables aleatorias con K-L. La función objetivo se evalúa mediante el método de Monte Carlo. Zhao y Wang (2014c) transforman el problema de optimización bajo cargas inciertas a un problema de múltiples estados de carga donde las cargas y los pesos son obtenidos analíticamente.

Estos trabajos han sido estudiados desde un punto de vista probabilístico. El criterio de robustez más utilizado es la suma ponderada de los dos primeros momentos estadísticos de la respuesta estructural (media y desviación estándar) (Chen et al., 2009; Chen y Chen, 2011; Schevenels et al., 2011; Tootkaboni et al., 2012; Lazarov et al., 2012; Jansen et al., 2012; Dunning y Kim, 2013; Zhao y Wang, 2014-a; Zhao y Wang, 2014b). Aunque, otros autores como Dunning et al., (2011) y Zhao y Wang (2014c) solo consideran el primer momento estadístico de la respuesta estructural. García et al. (2013) tratan el problema de DORT como un problema multi-objetivo de la media y la desviación estándar, el cual se resuelve mediante un frente de Pareto.

Desde un punto de vista no-probabilístico el problema ROT ha sido estudiado por Sigmund (2009); Amir et al. (2012). Aunque, estos trabajos quedan fuera de los objetivos de esta tesis.

## 1.7. Objetivos

El objetivo principal de tesis doctoral es el desarrollo e implementación de un nuevo procedimiento para el diseño óptimo robusto de topología de estructuras continuas en problemas bidimensionales (2D) mediante el uso de isolíneas y algoritmo genético, no descartándose como trabajo futuro su extensión a problemas tridimensionales (3D). Para ello se emplea un algoritmo genético para dirigir la búsqueda y una malla fija de elementos finitos para el análisis estructural.

El algoritmo genético es el responsable de controlar el movimiento de unas variables de posición. La topología de la estructura se obtiene a partir de las isolíneas del criterio estructural seleccionado. Este procedimiento permite considerar la existencia de incertidumbre en las cargas, no descartándose la consideración de incertidumbres en la geometría y en las propiedades del material.

El trabajo desarrollado en esta tesis contempla los siguientes objetivos parciales:

1. Implementar un algoritmo para el diseño óptimo de topología determinista de estructuras continuas mediante el uso de isolíneas y algoritmos genéticos y una malla fija de elementos finitos para el análisis. Para ello es necesario: 1) determinar una codificación idónea del problema; y 2) establecer un criterio que relacione el algoritmo genético con las isolíneas del problema.
2. Aplicar el algoritmo de optimización de topología determinista. Analizar y comparar los resultados obtenidos con la bibliografía más reciente.
3. Extender el algoritmo desarrollado para el diseño óptimo robusto de topología. Para ello es necesario: 1) identificar las variables aleatorias; 2) establecer un criterio para obtener las isolíneas del problema robusto; y 3) propagar el efecto de las incertidumbres a la respuesta estructural.
4. Aplicar el algoritmo para el diseño óptimo robusto de topología. Analizar y comparar los resultados obtenidos con los resultados obtenidos para el caso determinista.

## 1.8. Organización de la tesis

La tesis doctoral se ha estructurado en 8 capítulos:

En el capítulo 1 se realiza una introducción general al diseño óptimo de estructuras. En primer lugar se describen los diferentes métodos de optimización de estructuras continuas desde un punto de vista determinista. A continuación, se describen las metodologías existentes para tratar el problema de optimización bajo incertidumbres y finalmente, se recoge una revisión del estado del arte para el diseño óptimo robusto de topología de estructuras continuas.

En el capítulo 2, se realiza una introducción al análisis de elementos finitos con malla fija, describiendo los fundamentos y la formulación utilizada para el análisis de estructuras continuas bidimensionales.

El capítulo 3, se dedica al diseño óptimo de topología de estructuras mediante algoritmos genéticos, exponiendo sus fundamentos biológicos y matemáticos.

El capítulo 4, está dedicado a la implementación de un método para el diseño óptimo de topología determinista, donde el algoritmo genético controla la forma de una curva virtual mediante el movimiento de unas variables de posición. A partir de esta curva, se determina las isolíneas del criterio seleccionado que determina la topología de la estructura.

El capítulo 5, está dedicado a la implementación de un método de optimización de topología con isolíneas y programación matemática. Mediante programación cuadrática secuencial se controla la forma exterior de la estructura mediante el movimiento de unas

variables de posición, dependiendo la topología de la generación de cavidades internas. La posición y forma de las cavidades se obtienen a partir de las isolíneas del criterio seleccionado.

En el capítulo 6 se describen diferentes métodos y técnicas para caracterizar y propagar el efecto de las incertidumbres en el problema RTO.

El capítulo 7 está dedicado a la implementación de un método para el diseño óptimo robusto de topología considerando incertidumbre en la carga. Para ello, el problema de optimización se formula desde un punto de vista probabilístico mediante una función objetivo robusta. El efecto de las incertidumbres se propaga a la función objetivo mediante el método UDR.

El capítulo 8 recoge las conclusiones que se derivan de la tesis y algunas sugerencias de cara a trabajos futuros.

---

# CAPÍTULO 2:

## ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS POR ELEMENTOS FINITOS CON MALLA FIJA

---

El objetivo de este capítulo es presentar y familiarizarse con los conceptos de: elasticidad bidimensional, el método de elementos finitos y el análisis con malla fija.

### **2.1. Introducción**

En la década de los años cincuenta comenzó a desarrollarse un método que, partiendo de las ideas variacionales o energéticas ampliamente utilizadas en la primera mitad del siglo para la obtención de soluciones aproximadas, permitía establecer las matrices de rigidez elementales de subdominios previamente definidos de un medio elástico bidimensional. Este método llevaría posteriormente al conocido método de los elementos finitos (Finite Element Method, FEM), cuya base teórica fue publicada por primera vez en el libro “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics” (Zienkiewicz y Cheung, 1967).

En la década de los setenta, el FEM alcanza su madurez, aumentando sus aplicaciones en numerosas ramas de la ingeniería no relacionadas con el análisis estructural como: mecánica de fluidos, transferencia de calor, electricidad, magnetismo, etc. Destacar que es en esta década

cuando surgen los grandes programas de elementos finitos: ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, ADINA, MARC, IDEAS, etc.

En la actualidad, el método de los elementos finitos se ha consolidado como la principal herramienta de análisis para la resolución de problemas en mecánica estructural y de sólidos. En la tabla 2.1 se recogen algunas de las aplicaciones de este método para el análisis estructural.

**Tabla 2.1:** Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería

Campos de estudio	Equilibrio	Autovalores	Propagación
Estructural Mecánica Aeroespacial	Análisis de vigas, placas, láminas. Análisis bi y tridimensional de tensiones	Estabilidad de estructuras. Frecuencias naturales y modos de vibración de estructuras	Propagación de ondas de tensiones. Respuesta dinámica de estructuras. Problemas viscoelásticos
Mecánica de suelos Mecánica de rocas	Análisis bi y tridimensional de tensiones. Problemas de excavaciones. Iteración suelo/estructura	Frecuencias naturales y modos de vibración de combinaciones suelo/estructura	Propagación de ondas de tensión en medios porosos deformables. Interacción dinámica suelo/estructura

Destacar que un gran número de métodos de optimización estructural utilizan el FEM para realizar el análisis. Durante el proceso de optimización, el diseño original puede sufrir cambios que afectan tanto a su forma como a su topología. Estos cambios pueden obligar a revisar la forma de los elementos de la malla, para evitar su excesiva distorsión y un deterioro general en los resultados obtenidos del análisis. Este hecho conlleva un proceso de remallado, lo que supone aumentar el coste computacional de la optimización.

Algunas de las alternativas para reducir el coste computacional son:

- Método de los elementos de contorno (Boundary Element Method, BEM). Las principales ventajas de este método derivan del menor número de elementos y la elevada precisión en el contorno de la estructura. Las primeras aplicaciones del BEM se desarrollaron para la optimización de forma (Zochowski y Mizukami, 1983) y posteriormente para la optimización de topología (Cervera y Trevelyan, 2005). A pesar de las ventajas, se han demostrado ciertos comportamientos erráticos (Haftka, R y Grandhi, 1986) que devuelven un mayor grado de fiabilidad al método de los elementos finitos.
- Método elementos finitos en malla fija (Fixed Grid-Finite Element Method, FG-FEM), introducido por García y Steven (García y Steven, 1999). Este método se basa en que los cambios producidos en el medio, son capturados numéricamente mediante la modificación de las propiedades de sus elementos. Para ello, el método FG-FEM superpone una malla de elementos finitos sobre la estructura, identificando elementos dentro, fuera y sobre el contorno. La identificación de elementos dentro y fuera de la estructura transforma el problema en otro equivalente con diferentes materiales. Las principales ventajas de este método son la simplicidad y la velocidad, lo que hace que el método resulte interesante para su aplicación en el campo de la optimización estructural (García y Steven, 1998) y el diseño interactivo (García y Steven, 1999).

- Método de elementos finitos extendido (eXtended Finite Element Method, X-FEM) (Belytscho y Black, 1999) puede ser comparado con el método FG-FEM, ya que ambos están basados en una malla fija. La diferencia radica en que en el método X-FEM, los elementos que están situados sobre el contorno pueden ser divididos (Moes et al., 2001). Este proceso de división incrementa el coste computacional considerablemente, si el número de elementos situados en el contorno es elevado. Este método ha sido utilizado tanto para la optimización de forma (Duysinx et al., 2006), como para la optimización de topología (Wei et al., 2010).
- Método de los elementos finitos basado en una malla cartesiana (Cartesian grids-Finite Element Method, Cg-FEM) (Nadal et al., 2013). En este método, los elementos de borde son divididos al igual que en X-FEM. La diferencia radica en que este utiliza una pila de mallas cartesianas con diferentes niveles, p.ej.: mallas con niveles de elementos rectangulares lineales y cuadráticos organizados según una relación jerarquizada.
- Método isogeométrico (Isogeometric Method, IM), este utiliza funciones de forma de alto orden (B-splines o NURBS) para representar tanto la geometría, siendo el análisis realizado en una malla fija en el dominio ficticio. IM permite definir geometrías de formas suavizadas, siendo ideal para el análisis de tensiones, sobre todo en el contorno de la estructura. Este método ha sido utilizado tanto para la optimización de forma (Wall y Wang, 2008; Wall et al., 2008), como para la optimización de topología (Seo et al., 2010).

A continuación, se presenta una breve revisión sobre los conceptos básicos a conocer acerca de la teoría de la elasticidad para el análisis con una malla fija de elementos finitos de problemas lineales.

## 2.2. Teoría de elasticidad bidimensional

Existe una gran variedad de estructuras cuyo análisis permite hacer uso de la elasticidad bidimensional. Una de las principales ventajas de la teoría de la elasticidad bidimensional es el estudio de los casos de tensión y deformación plana de forma unificada, aunque estos casos representan tipologías sin ninguna relación entre si (Oñate, 1995). A continuación, se presentan los conceptos básicos a conocer sobre la teoría de elasticidad bidimensional para su utilización en el FEM.

### 2.2.1. Desplazamientos

Las características geométricas y de carga de una estructura en estado de tensión o deformación plana, permiten establecer la hipótesis de que todas las secciones perpendiculares al eje prismático  $z$ , se deforman en su plano y de forma idéntica. Por tanto, es suficiente conocer el comportamiento de cualquiera de dichas secciones.

De modo que, si consideramos una sección genérica contenida en el plano  $xy$ , el campo de desplazamientos de la sección está perfectamente definido si se conocen los desplazamientos en las direcciones  $x$  e  $y$  de todos sus puntos. El vector de desplazamientos de un punto se define como:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $u_x(x, y)$  y  $u_y(x, y)$  son los desplazamientos del punto en las direcciones de los ejes coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente.

### 2.2.2. Deformaciones

Si los alargamientos unitarios  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$  se definen como el cambio de la longitud con respecto a la longitud inicial, y la deformación tangencial  $\varepsilon_{xy}$  se define como la mitad del decremento del ángulo recto que forma inicialmente los lados del elemento paralelo a los ejes  $x$  e  $y$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\approx \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &\approx \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &\approx \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $u_x$  y  $u_y$  son las componentes de los desplazamientos en la dirección paralela a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Para deformación plana, la deformación longitudinal  $\varepsilon_z$  es nula. En cambio, para tensión plana, dicha deformación no es nula pero se supone que lo es la tensión  $\sigma_z$ . Por consiguiente, no es necesario considerar la deformación  $\varepsilon_z$  en ninguno de los dos casos, ya que no interviene en las ecuaciones del trabajo de deformación al ser nulo el producto  $\sigma_z \varepsilon_z$ . Así pues, el vector de deformaciones para tensión y deformación plana se define como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}] = \mathbf{H}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{H}$  es el operador diferencial

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.2.3. Tensiones

De la Ec. (2.3) se deduce que las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son nulas. La tensión  $\sigma_z$  es nula por los mismos motivos explicados en el apartado 2.2.2. para las deformaciones  $\varepsilon_z$ . Por lo que el vector de tensiones significativas es:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] \quad (2.5)$$

La relación entre las tensiones y las deformaciones se deduce de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional, junto con las hipótesis descritas anteriormente ( $\sigma_z = 0$  para tensión plana,  $\varepsilon_z = 0$  para deformación plana, y  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  en ambos casos). Por tanto

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

donde la matriz de comportamiento para deformación o tensión plana de un material elástico viene dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & 0 \\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{d}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

En la tabla 2.2 se muestran las constantes elásticas para los estados de tensión y deformación plana.

**Tabla 2.2:** Valor de las constantes elásticas para los estados de tensión y deformación plana, siendo  $E$  el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

Constante	$\mathbf{d}_{11}$	$\mathbf{d}_{12}$	$\mathbf{d}_{21}$	$\mathbf{d}_{22}$	$\mathbf{d}_{33}$
Tensión plana	$E/(1 - \nu^2)$	$d_{11} \nu$	$d_{12}$	$d_{11}$	$E/2(1 + \nu)$
Deformación plana	$E(1 - \nu)/2(1 + \nu)(1 - 2\nu)$	$d_{11} \nu/(1 - \nu)$	$d_{12}$	$d_{11}$	$E/2(1 + \nu)$

### 2.3. El método de los elementos finitos

Para obtener la matriz de rigidez y el vector de cargas elementales, es necesario partir de la formulación débil del problema. En elasticidad, dicha formulación es equivalente al principio de los trabajos virtuales, tomando como sistema real el sistema de fuerzas en equilibrio y como sistema virtual un sistema compatible en desplazamientos. El principio de los trabajos virtuales para el problema de elasticidad bidimensional se plantea como:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\psi})^T \boldsymbol{\sigma} t d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{\psi})^T \mathbf{f} t d\Omega + \int_{\delta\Omega} (\mathbf{u}^{\psi})^T \mathbf{t}^{\nu} t d(\delta\Omega) \quad (2.8)$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\psi}$  las deformaciones virtuales,  $\Omega$  es el dominio de diseño,  $\delta\Omega$  el contorno estructural,  $t$  el espesor del sólido,  $\mathbf{u}^{\psi}$  los desplazamientos virtuales,  $\mathbf{f}$  las cargas volumétricas, y  $\mathbf{t}^{\nu}$  las cargas superficiales. Expresando el primer miembro de la Ec. (2.8) en función de los desplazamientos virtuales  $\mathbf{u}^{\psi}$  y utilizando las Ecs. (2.3) y (2.6), se tiene:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{H}\mathbf{u}^{\psi})^T \mathbf{D} (\mathbf{H}\mathbf{u}) t d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{\psi})^T \mathbf{f} t d\Omega + \int_{\delta\Omega} (\mathbf{u}^{\psi})^T \mathbf{t}^{\nu} t d(\delta\Omega) \quad (2.9)$$

La Ec. (2.9) representa dos ecuaciones integro-diferenciales que permiten obtener la solución débil del problema, es decir, el campo de desplazamientos en el sólido (Ec. 2.1).

A continuación se realiza la aproximación de las incógnitas en forma discreta mediante las correspondientes funciones de aproximación o forma, tal que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_n \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{N}$  son las funciones de aproximación y  $\mathbf{u}_n$  los desplazamientos nodales. Las funciones de aproximación son conocidas a priori y transforma la formulación débil (Ec. 2.9) en un sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[ \int_{\Omega_e} (\mathbf{H}\mathbf{u}^\psi)^T \mathbf{D}\mathbf{H} t d\Omega \right] \mathbf{u}_n = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} (\mathbf{u}^\psi)^T \mathbf{f} t d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\delta\Omega_e} (\mathbf{u}^\psi)^T \mathbf{t}^v t d(\delta\Omega) \quad (2.11)$$

donde  $N_e$  es el número de elementos,  $\Omega_e$  el área del elemento  $e$  y  $\delta\Omega_e$  el contorno del elemento  $e$ . La aproximación de la incógnita supone un incremento del número de variables, por lo que es necesario tomar tantas *funciones de ponderación* como de aproximación,  $\mathbf{u}^\psi = \mathbf{N}$ . Como las funciones de aproximación son todas nulas excepto para los nudos del elemento considerado, el primer término de la Ec. (2.11) puede escribirse como:

$$\left[ \int_{\Omega_e} (\mathbf{H}\mathbf{N})^T \mathbf{D}\mathbf{H}\mathbf{N} t d\Omega \right] \mathbf{u}_n^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (2.12)$$

Si  $\mathbf{B} = \mathbf{H}\mathbf{N}$ , la *matriz de rigidez elemental* se puede expresar como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} t d\Omega \quad (2.13)$$

De igual forma, se demuestra que el segundo miembro de la Ec. (2.11) se puede escribir para un elemento determinado como:

$$\mathbf{F}^{(e)} = \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} t d\Omega \right] + \left[ \int_{\delta\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^v t d(\delta\Omega) \right] \quad (2.14)$$

siendo  $\mathbf{F}^e$  el *vector de fuerzas equivalentes generalizadas* del elemento  $e$ .

### 2.3.1. Aproximación de la geometría

Se va a considerar para el problema de elasticidad bidimensional, elementos finitos rectangulares de cuatro nodos. El elemento rectangular de cuatro nodos proporciona una precisión elevada en el caso de que la estructura esté sometida principalmente a tracción o compresión pura. Por el contrario, en aquellos problemas en los que el comportamiento predominante es la flexión, el elemento ofrece una menor precisión, siendo necesario utilizar una malla más densa para obtener una precisión aceptable. Por ello, para aumentar el rendimiento resulta aconsejable hacer uso de técnicas especiales como: la adición de nodos internos de este elemento, la integración reducida de los términos de deformación tangencial, la adición de modos incompatibles o la imposición de un campo de deformaciones.

Para la utilización práctica de los elementos finitos se realiza una transformación entre el *elemento de referencia* definido en el sistema de *coordenadas naturales*  $(\xi, \eta)$  y los *elementos reales* en los que se discretiza el dominio (ver figura 2.1). Una vez se conoce la relación entre las coordenadas reales del elemento en la pieza y las coordenadas naturales del elemento de referencia, se pueden realizar todas las operaciones necesarias sobre el elemento de referencia.

Un método muy conveniente para realizar la transformación de coordenadas es emplear las funciones de aproximación utilizadas para la aproximación de la variable, en este caso estamos ante la definición de *elementos isoparamétricos*. El cambio de coordenadas se puede realizar como:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_{\text{nudos}}} N_i x_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_{\text{nudos}}} N_i y_i \quad (2.15)$$

Como las funciones de aproximación  $N_i$  dependen de las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$ , se obtiene una transformación de coordenadas.

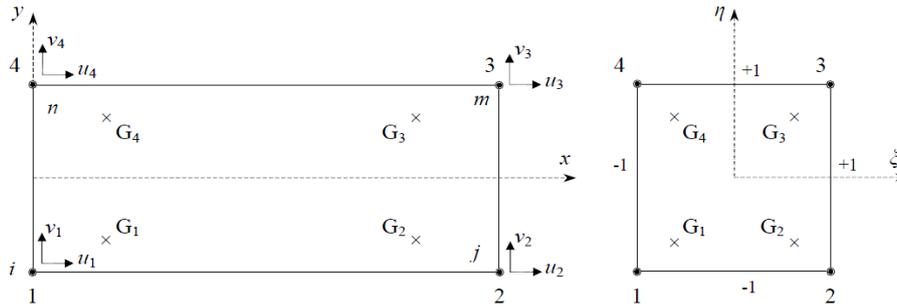


Figura 2.1: Transformación de la geometría, desplazamientos nodales, sistema de coordenadas global y local, y numeración de los nodos (Victoria, 2006).

### 2.3.2. Funciones de aproximación de las variables

Para un elemento cuadrado de 4 nodos, la función de aproximación más sencilla que cumple las condiciones de compatibilidad e invariancia geométrica es el polinomio lineal. Según la figura 2.2, el polinomio lineal ha de incluir tres parámetros más uno adicional. Para mantener la simetría el elemento se incluye  $(\xi, \eta)$ . De esta forma, los desplazamientos se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta \\ u_y(x, y) &= a_5 + a_6 \xi + a_7 \eta + a_8 \xi \eta \end{aligned} \quad (2.16)$$

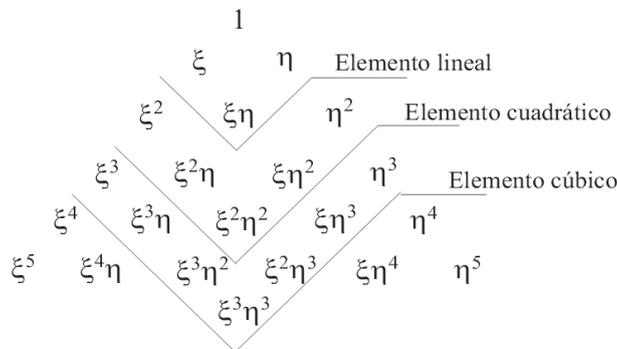


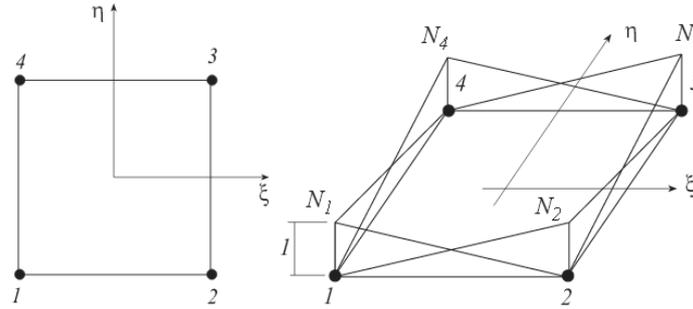
Figura 2.2: Componentes de las funciones de aproximación en elementos rectangulares lagrangianos.

La Ec. (2.16) se puede expresar mediante un producto de dos funciones lineales en cada una de las dos coordenadas como:

$$u_x = \sum_{i=1}^4 N_i u_{x_i} \quad ; \quad u_y = \sum_{i=1}^4 N_i u_{y_i} \quad ; \quad (2.17)$$

siendo las funciones de aproximación ( $N_i$ ):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad ; \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad ; \quad N_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.18)$$



**Figura 2.3:** Funciones de forma para un elemento rectangular lineal.

La Ec. (2.17) se puede expresar en forma matricial como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \\ u_{x_4} \\ u_{y_4} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)} \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]; \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}^{(e)} &= \{\mathbf{u}_1^{(e)}, \mathbf{u}_2^{(e)}, \mathbf{u}_3^{(e)}, \mathbf{u}_4^{(e)}\}; \quad \mathbf{u}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.3.3. Integración numérica en dos dimensiones

Para obtener la matriz de rigidez (Ec. 2.13) y el vector de fuerzas elementales (Ec. 2.14) es necesario realizar la integral sobre el dominio bidimensional del elemento de referencia. Mediante la formulación isoparamétrica se pueden transformar las integrales sobre el dominio

del elemento en otras sobre el espacio de coordenadas naturales. Si el término a integrar se define por  $f(\xi, \eta)$  y se utiliza la cuadratura de Gauss-Legendre bidimensional, la integral para los elementos cuadriláteros se calcula mediante:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} f(\xi_p, \eta_q) W_p W_q \quad (2.21)$$

donde  $n_p$  y  $n_q$  son el número de puntos de integración seleccionados en cada una de las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ ;  $\xi_p$  y  $\eta_q$  son las coordenadas naturales del punto de integración  $p$  y  $q$ , y  $W_p$  y  $W_q$  son los pesos correspondientes a cada dirección en dicho punto.

## 2.4. Formulación de la malla fija

En el análisis clásico de elementos finitos, el dominio es habitualmente representado por una malla no estructurada de elementos y la integración de la matriz de rigidez se suele realizar mediante integración numérica. Aunque estas técnicas proporcionan resultados adecuados, requieren de una cierta interacción con el usuario y son computacionalmente costosas. Estos aspectos tienen especial importancia para la optimización, ya que la geometría sufre continuas modificaciones, por lo que una malla de elementos finitos debería ser regenerada para analizar el nuevo dominio. Este proceso de remallado produce un aumento considerable en el coste computacional e introduce errores debido a la transferencia de datos de la anterior malla.

Una alternativa para superar estas limitaciones del FEM en optimización es utilizar una malla fija de elementos finitos (Fixed Grid-Finite Element Method, FG-FEM). En este apartado se presentan algunas aproximaciones para representar un dominio mediante una malla fija de elementos finitos.

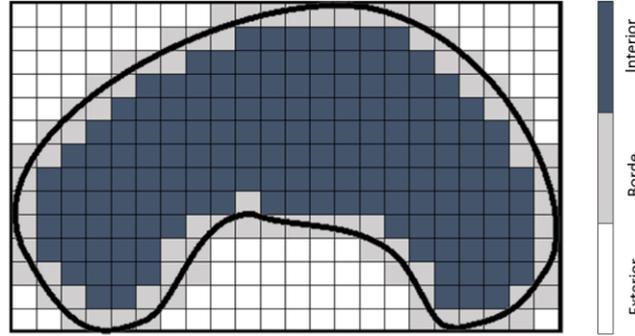
La primera fase consiste en ajustar el dominio ficticio ( $\Omega_{fg}$ ) al dominio físico ( $\Omega$ ) (ver figura 2.4) y superponer una malla fija sobre el dominio ficticio. Esta malla puede consistir de elementos rectangulares con una geometría fija. En función de la posición del elemento con respecto al dominio de la estructura se pueden distinguir tres tipos: *elementos interiores* (In, I), si todos sus nodos están contenidos en  $\Omega$ ; *elementos exteriores* (Out, O), si todos los nodos están fuera de  $\Omega$ , y *elementos de borde* o *contorno* (Boundary, B) si presenta nodos interiores y exteriores a  $\Omega$  (ver figura 2.5).



Figura 2.4: Dominio ficticio  $\Omega_{fg}$  y dominio de diseño  $\Omega$

Los elementos I, O, y B se diferencian exclusivamente en las propiedades constitutivas del material, las cuales son determinadas mediante el método de homogeneización. Los elementos I presentan las mismas propiedades que el material de la estructura (material real),

los elementos O disponen de valores muy inferiores (material virtual) y los elementos B resultan una combinación entre las propiedades del material real y el virtual.



**Figura 2.5:** Aproximación de la geometría con una malla fija. Clasificación de los elementos finitos con respecto del contorno de la estructura

### 2.4.1. Matriz de rigidez para elementos interiores, exteriores y de borde

La matriz de rigidez para un elemento rectangular lineal según la Ec. (2.13), está formada por un conjunto de integrales que dependen de las derivadas parciales de las funciones de aproximación y de las propiedades constitutivas del material:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}^{(e)}| \, d\xi \, d\eta \quad (2.22)$$

donde  $|\mathbf{J}^{(e)}|$  es el determinante del Jacobiano  $\mathbf{J}^{(e)}$

$$\mathbf{J}^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Los valores del módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson en estructuras constituidas por un único material son constantes en cualquier punto de su dominio. Sin embargo, en el caso de una malla fija, estos valores pueden cambiar dependiendo de si el elemento es interior, de borde o exterior.

Las matrices de rigidez correspondientes a un elemento interior  $\mathbf{K}_I$  y a un elemento exterior  $\mathbf{K}_O$  pueden ser calculadas numéricamente de forma sencilla aplicando la Ec. (2.22). El valor de las propiedades del material exterior  $\mathbf{K}_O$  es insignificante en comparación con las del material real  $\mathbf{K}_I$ , es decir  $\mathbf{K}_O \ll \mathbf{K}_I$ . Una práctica habitual es reducir el valor del módulo elástico  $E$ . El coeficiente  $C_{fg} = E/E_0$  por el cual se divide el módulo de elasticidad, normalmente está comprendido entre  $10^3$  y  $10^6$  (ver Tabla 2.3).

Los elementos que se sitúan sobre el contorno de la estructura, están constituidos por dos materiales, material real y virtual, de modo que propiedades como el módulo de elasticidad no son constantes en todo el elemento (ver figura 2.5). Para determinar la matriz de rigidez de los elementos de contorno se dispone principalmente de dos aproximaciones:  $FG_0$  y  $FG_1$ .

**Tabla 2.3:** Relación entre el módulo de elasticidad real y virtual

Autor/es	$C_{fg}$
Bendsøe y Kikuchi (1988)	$10^2 \div 10^3$
Hinton y Siens (1995)	$10^5$
García y Steven (1998)	$10^3 \div 10^5$
Stolpe y Svanberg (2001)	$10^3$
Victoria et al. (2009)	$10^4$
Shikui et al. (2010)	$10^3$
Lazarov et al. (2012a)	$10^4$

Mediante la aproximación  $FG_0$ , los elementos de borde son convertidos a elementos interiores o exteriores. Un criterio para decidir si un elemento se transforma en uno interior o exterior puede ser el porcentaje de elemento que se encuentra en el dominio de la estructura. Si  $A_I^{(e)}$  representa el área del elemento dentro de la estructura y  $A_O^{(e)}$  representa el área exterior, la aproximación  $FG_0$  puede expresarse como:

$$\mathbf{K}_B^{(e)} = \zeta \mathbf{K}_I^{(e)} \quad (2.24)$$

con

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } A_I^{(e)}/A_O^{(e)} > A^* \\ 0 & \text{si } A_I^{(e)}/A_O^{(e)} \leq A^* \end{cases}; \quad 0 < A^* < 1 \quad (2.25)$$

donde  $A^*$  es el umbral de conversión, normalmente 0,5 (50%).

Por otro lado, la aproximación  $FG_1$  es mucho más precisa. En esta, se transforma el elemento bi-material en otro equivalente de características homogéneas

$$\xi = \frac{A_I^{(e)}}{A_I^{(e)} + A_O^{(e)}} = \frac{A_I^{(e)}}{A^{(e)}} \quad (2.26)$$

donde  $\xi$  es el ratio que representa el área interior a la estructura. Por consiguiente, las expresiones para obtener las matrices de rigidez de los elementos interiores, exteriores y de borde son:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{cases} \mathbf{K}_I^{(e)} & \text{si } \xi = 1 \\ \mathbf{K}_O^{(e)} & \text{si } \xi = 0 \\ \mathbf{K}_B^{(e)} = \mathbf{K}_I^{(e)}\xi + (1 - \xi)\mathbf{K}_O^{(e)} & \text{si } 0 < \xi < 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

#### 2.4.2. Análisis de las tensiones en los nodos de la malla fija

En el problema elástico, una vez resuelto el sistema de ecuaciones, se obtendrá el valor de los desplazamientos en cada uno de los nodos de la estructura y en base a la aproximación utilizada en el elemento, el desplazamiento en todos los puntos del dominio. Una vez se conoce la distribución del campo de desplazamientos en todo el dominio, aunque sea de forma aproximada, no es complicado obtener las tensiones. A nivel de elemento, las deformaciones pueden establecerse como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{H}\mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)} \quad (2.28)$$

En general el material inicial puede estar sujeto a deformaciones iniciales (cambios de temperatura, retracciones, etc.). Si se representan dichas deformaciones iniciales por  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , las tensiones se deberán a la diferencia entre las deformaciones reales e iniciales. Del mismo modo, el material inicial puede estar sujeto a unas tensiones residuales iniciales  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . Considerando una relación lineal entre las tensiones y las deformaciones, las tensiones en cualquier punto del elemento pueden expresarse como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}(\mathbf{H}\mathbf{N}\mathbf{u}^{(e)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{u}^{(e)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.29)$$

Normalmente, se suele calcular las tensiones en los puntos de Gauss del elemento (ver figura 2.1), debido a que los valores de las matrices de deformación  $\mathbf{B}$  son conocidos. Suponiendo que las tensiones y deformaciones iniciales son nulas, las tensiones en los puntos de Gauss se obtienen como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{G_1}^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_1}\mathbf{u}^{(e)}; \quad \boldsymbol{\sigma}_{G_2}^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_2}\mathbf{u}^{(e)}; \quad \boldsymbol{\sigma}_{G_3}^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_3}\mathbf{u}^{(e)}; \quad \boldsymbol{\sigma}_{G_4}^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_4}\mathbf{u}^{(e)}; \quad (2.30)$$

A partir de las tensiones en los puntos de Gauss, la tensión del elemento se puede determinar mediante el promedio de estas tensiones.

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \frac{1}{4} \left( \boldsymbol{\sigma}_{G_1}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{G_2}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{G_3}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{G_4}^{(e)} \right) \quad (2.31)$$

Para determinar las tensiones en los nodos de los elementos se puede optar entre:

- Adoptar el valor de la tensión del punto de Gauss más cercano.
- Extrapolar el valor nodal a partir de la información obtenida en los puntos de Gauss.
- Utilizar las funciones de forma del elemento.
- Promediar las tensiones de los elementos que comparten el nodo.
- Ajustar mediante mínimos cuadrados a partir de las tensiones en los elementos que circundan el nodo de interés.

En esta tesis, las tensiones en los nodos y en los elementos de la malla fija se determinan a partir de las tensiones en los puntos de Gauss. Las tensiones en los puntos de Gauss son obtenidas a partir del análisis de la estructura mediante el programa Ansys. Las tensiones en los puntos de Gauss son trasladadas a los nodos mediante las funciones de forma y promediadas en función del volumen de los elementos adyacentes tal que

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{\sum_{j=1}^{n_e} V_j \boldsymbol{\sigma}_n^{(j)}}{\sum_{j=1}^{n_e} V_j} \quad (2.32)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}_n$  es la tensión sobre el nodo  $n$ ,  $n_e$  el número de elementos adyacentes al nodo  $n$ ,  $V_j$  el volumen del elemento  $j$ , y  $\boldsymbol{\sigma}_n^{(j)}$  es la tensión en el nodo  $n$  del elemento  $j$ . A partir de estas, se puede obtener la tensión del elemento como:

$$\sigma_e = \sum_{i=1}^{n_p} \sigma_i / n_p \quad (2.33)$$

siendo  $n_p$  el número de nodos en el elemento  $e$ .

## 2.5. Optimización de estructuras con malla fija

Como se ha dicho en el capítulo uno, el diseño óptimo de estructuras es un proceso iterativo durante el cual ciertas variables son modificadas hasta alcanzar un diseño óptimo. Cada iteración del proceso de optimización comienza con una configuración inicial y finaliza con un análisis del nuevo diseño.

El análisis mediante FEM requiere una división del dominio mediante una malla de elementos finitos, normalmente no estructurada. Tanto los métodos de optimización de topología como de forma son procesos iterativos en los que se cambia continuamente la geometría de la estructura. Debido a estos cambios, la precisión del modelo de análisis se puede ver gravemente deteriorada, por lo que es necesario readaptar la malla para que se ajuste a la nueva geometría. Este proceso es generalmente conocido como regeneración de malla, y el cual supone un aumento del coste computacional. Según un estudio realizado por Sandia National Laboratories, en el análisis de una geometría con FEM, el 80% del tiempo de computación se debe a la creación de la malla y solo el otro 20% del tiempo es debido al propio análisis (Cottrell et al., 2009).

Con objeto de reducir el coste computacional en el análisis con FEM, en estos últimos años se ha visto incrementado notablemente el uso de FG-FEM. La principal ventaja de FG-FEM, es que la matriz de rigidez no se altera durante el proceso de optimización, solo se modifican aquellas posiciones correspondientes a los elementos cuyo estado ha cambiado (I, O, B). En la figura 2.6 se muestra los diagramas de flujos de FEM y FG-FEM.

Los principios de la optimización de estructuras mediante la aplicación de una malla fija fueron establecidos por García (1999). En su estudio, FG-FEM se confirma como una metodología eficiente y fiable para aproximar el campo de desplazamientos en problemas donde la geometría de la estructura o las propiedades físicas varían con el tiempo.

A continuación se describen algunos de los trabajos de optimización en los que se ha utilizado una malla fija:

Kim et al. (2000) desarrollaron un procedimiento para la optimización de topología, en el que se integran el análisis con FG-FEM con el método ESO. El uso de una malla fija elimina la necesidad de readaptar la malla. Kim et al. (2003) extienden el trabajo y confirman la eficiencia del método.

Woon et al. (2003) presentaron un procedimiento para la optimización de forma y topología de estructuras continuas a través de un algoritmo multi-genético, donde el análisis de la estructura se realiza en una malla fija.

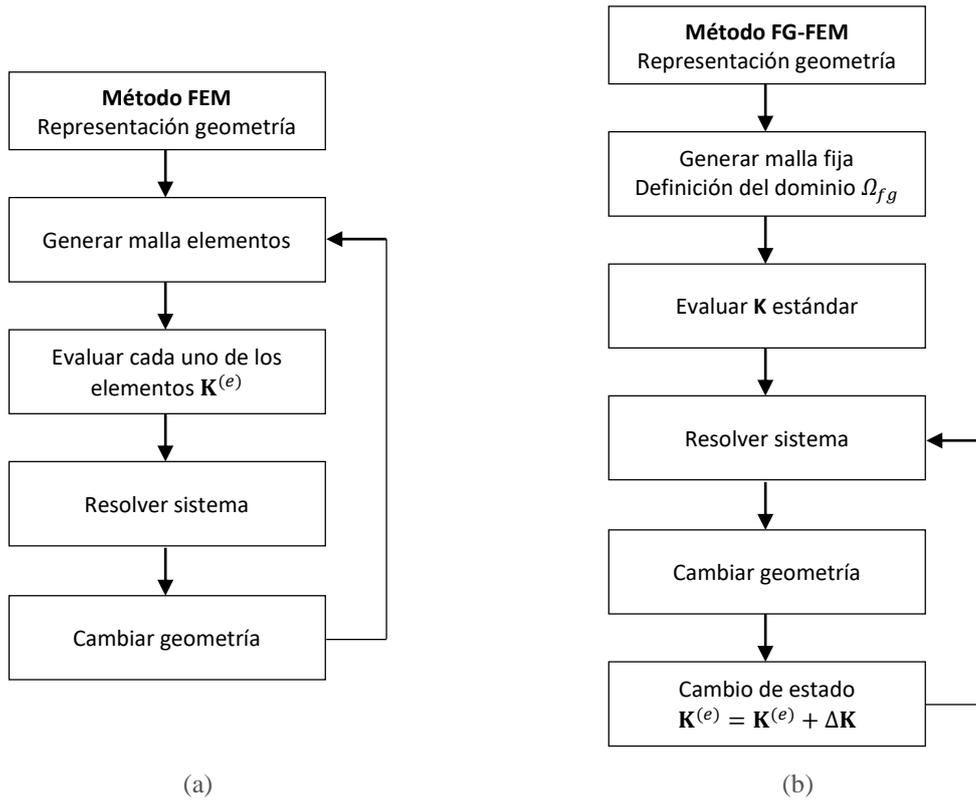


Figura 2.6: Diagrama de flujo. (a) FEM y (b) FG-FEM

Kim y Chang (2003, 2005) proponen un método de optimización de forma, utilizando para el análisis una malla Eurliana, con el fin de reducir el coste computacional y los errores asociados a la distorsión de la malla tan frecuente en el planteamiento Lagrangiano.

García y Gonzalez (2004) aplican estrategias evolutivas para la optimización de forma donde el análisis de tensiones se realiza mediante una malla fija.

Lee y Kwak (2007) proponen un método para optimizar forma y topología mediante el uso de B-Spline para definir el contorno de la geometría, utilizando FG-FEM.

Rong y Liang (2008) utilizan FG-FEM junto con LEM para resolver problemas de optimización de forma y topología.

Dunning et al. (2008) presentan una alternativa al ratio del área con el objeto de reducir los errores producidos en los elementos de borde, al utilizar este tipo de aproximación para calcular la matriz de rigidez. Para ello proponen una formulación isoparamétrica de malla fija (Isoparametric Fixed Grid, IFG). Esta formulación utiliza un sistema de coordenadas locales para representar las coordenadas globales que definen la parte interior del elemento de contorno.

Victoria et al. (2009) proponen un procedimiento de optimización de topología de estructuras continuas 2-D usando isolíneas y FG-FEM.

Daneshmand y Kazemzadeh-Parsi (2009) proponen un método de elementos finitos en malla fija modificado (modified FG-FEM, MFGFEM), para mejorar los resultados obtenidos sobre los elementos de contorno. Para ello proponen un nuevo enfoque para calcular la matriz de rigidez de los elementos de borde utilizando funciones de penalización. En Kazemzadeh-Parsi y Daneshmand (2009b) utilizan SFGFEM (Smooth FG-FEM) en problemas de

transferencia de calor. En SFGFEM se utiliza una técnica de suavizado de gradiente para evaluar las integrales del dominio.

Hesmati et al. (2014) proponen un método modificado de FG-FEM para resolver problemas de optimización de forma no basados en gradiente. La modificación consiste en calcular la matriz de rigidez de los elementos de borde mediante la introducción de unas coordenadas materiales  $(r,s)$  que transforma la parte interior del elemento de contorno a un elemento de referencia.

Más recientemente, Cai et al. (2014) proponen una metodología para la optimización de forma y topología mediante LSM y FG. Para aumentar la precisión del análisis de tensiones, ellos utilizan funciones B-spline como funciones de aproximación.



---

# CAPÍTULO 3:

## DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS CON ALGORITMO GENÉTICO

---

En este capítulo se presentan los fundamentos básicos de los algoritmos genéticos (GA) y sus aplicaciones al diseño óptimo de estructuras. Los algoritmos genéticos están basados en los procesos genéticos de los organismos biológicos y en los principios de la evolución natural. En primer lugar, se presenta la analogía del método con los conceptos biológicos y a continuación, se presentan los fundamentos matemáticos para un algoritmo genético simple.

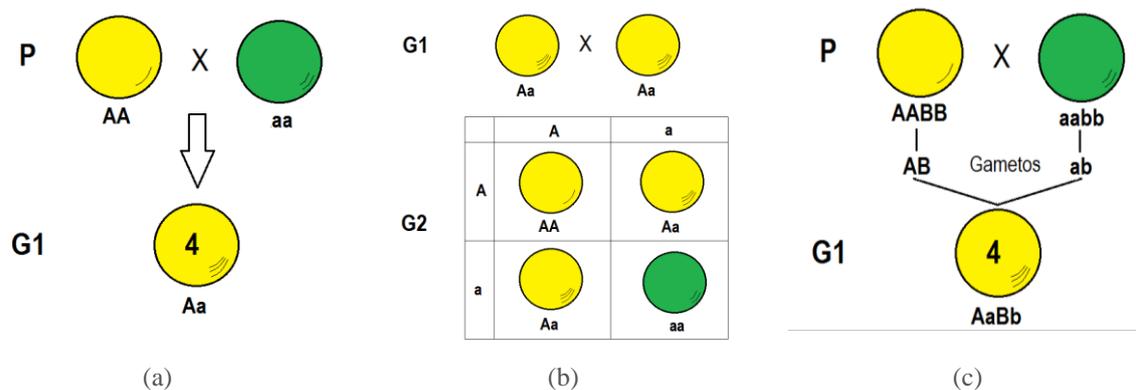
### 3.1. Introducción

Charles Darwin (1859) formuló la teoría de la evolución natural de las especies. En 1858, Darwin se vio obligado a presentar sus trabajos cuando recibió el manuscrito de Wallace (1855), el cual había llegado a las mismas conclusiones de forma independiente. Ambos, tomaron como base para sus estudios la obra de Malthus (1798) sobre el crecimiento de la población, en la cual se establece que el crecimiento de una población está estrechamente relacionado con la disponibilidad de los recursos. Según Darwin y Wallace, esta lucha por los recursos necesarios para la supervivencia desemboca en una “selección natural” en la cual sobreviven aquellos individuos cuyas características son más favorables para el entorno, desapareciendo aquellos

menos adaptados. Sin embargo, Darwin desconocía como se transmitían las características de padres a hijos.

Mendel descubrió que las características de un individuo son heredadas de sus progenitores de forma discreta en base a su carácter (dominante o recesivo). El núcleo de su trabajo, que comenzó en el año 1856 a partir del cruzamiento de guisantes, le permitió establecer las tres *leyes de la herencia* o *leyes de Mendel* (1865), las cuales se enuncian como:

- *Primera ley de Mendel* o *ley de homogeneidad*: cuando se cruzan dos variables puras de una misma especie, los descendientes son todos iguales y pueden parecerse a uno de los progenitores o a ninguno de ellos (figura 3.1a).
- *Segunda ley de Mendel* o *ley de la segregación*: al cruzar entre sí a individuos de la primera generación, los descendientes se dividen en cuatro partes, de las cuales una se parece a su abuela, otra a su abuelo y las dos restantes a sus progenitores (figura 3.1b).
- *Tercera ley de Mendel* o *ley de la independencia de los caracteres*: En el caso de que las dos variedades de partida difieran entre sí en dos o más caracteres, cada uno de ellos se transmite de acuerdo con la primera ley con independencia de los demás (figura 3.1c).



**Figura 3.1:** Las tres leyes de Mendel. (a) primera ley. (b) segunda ley. (c) tercera ley. En el gráfico P son las variables puras, G1 variables de primera generación, y G2 variables de segunda generación.

La teoría de Mendel fue olvidada por la comunidad científica hasta finales del siglo XIX y principios del XX, cuando se produjo una serie de avances en el estudio de la célula que permitieron que las leyes de Mendel se incorporaran definitivamente al cuerpo teórico de la biología.

Flemming (1882) describió los cromosomas, como ciertos filamentos en los que se agregaba la cromatina del núcleo celular durante la división celular. Fysher (1930), un genetista inglés, relacionó las teorías de Mendel y Flemming demostrando que los genes mendelianos eran los que proporcionaban el soporte para la evolución.

Watson y Crick (1953) descubrieron que la base molecular de los genes está en el ADN (ácido desoxirribonucleico). Los cromosomas están compuestos de ADN y por consiguiente los genes están en los cromosomas.

Todos estos hechos constituyen actualmente la teoría del neo-darwinismo, donde se establece que una serie de procesos como la reproducción, la mutación, la competición y la selección actúan dentro de las poblaciones, regulando el funcionamiento de las especies.

Según los ingenieros evolucionistas, la evolución optimiza puesto que, va creando seres cada vez más perfectos. Sin embargo, algunos genetistas, biólogos, y filósofos afirman que la evolución no optimiza, sino que adapta y mejora localmente dentro de un marco espacio/tiempo. Evolución no significa progreso ya que, un organismo más evolucionado puede estar en desventaja competitiva frente a un antepasado, si el primero se sitúa en el entorno del último.

## 3.2. Origen de los Algoritmos Genéticos

Los GA son una técnica de búsqueda heurística que trabaja con un conjunto de soluciones (individuos) al mismo tiempo, emulando los procesos naturales que se llevan a cabo en la genética y en la selección natural.

Los GA fueron desarrollados por Holland a principio de los años sesenta tras estudiar el libro escrito por Fisher (1930), titulado “The Genetical Theory of Natural Selection”, donde aprendió que la evolución es una forma de adaptación más potente que el simple aprendizaje. Los principales objetivos de su investigación fueron: (1) abstraer y explicar de forma rigurosa el proceso adaptativo de los procesos naturales; y (2) diseñar sistemas artificiales (programas) capaces de imitar los mecanismos más importantes de estos procesos. Resultado de estos estudios, Holland y sus colaboradores (De Jong, 1975) propusieron:

- La evolución es un proceso que opera sobre los cromosomas, más que sobre los seres vivos en sí.
- El proceso de reproducción es el mecanismo a través del cual se produce la evolución.
- El cruce genera cromosomas diferentes a los de los progenitores mediante su recombinación.
- Las mutaciones generan en los hijos genes diferentes a los de los padres.

Posteriormente Goldberg, que también fue estudiante de Holland, publicó un libro (Holland, 1975) en el presentaba la base científica de los GA.

Como ya se ha mencionado, los mecanismos de búsqueda de los GA se basan en la genética y en la selección natural, combinando el concepto de supervivencia de los individuos mejor adaptados con operadores genéticos que imitan los procesos naturales como el cruce o la mutación. Golberg (1989) define los GA como:

*«Algoritmos de búsqueda basados en los mecanismos de selección y genética natural. Combinan la supervivencia de los más compatibles entre las estructuras de cadenas, con una estructura de información ya aleatorizada, intercambiada para construir un algoritmo de búsqueda con algunas de las capacidades de innovación de la búsqueda humana».*

Los GA han tenido un gran éxito en la resolución de problemas de optimización. Parte de este éxito se debe a la robustez y al equilibrio entre la eficiencia y eficacia para determinar puntos óptimos, sobre todo en espacios de búsqueda grandes, complejos y pobremente conocidos, donde las técnicas de búsqueda tradicionales pueden ser inapropiadas. Básicamente, los GA se diferencian de las técnicas tradicionales de optimización en:

- No utilizan derivadas para dirigir la búsqueda. Gracias a ello, pueden ser utilizados en problemas de optimización con variables discretas o continuas.
- No trabajan directamente con las variables de diseño, sino con una codificación de estas.
- Trabajan con un conjunto de soluciones y no con un único punto como hacen los métodos tradicionales. Esto ayuda a encontrar el óptimo global evitando óptimos locales.
- Utilizan reglas y operadores estocásticos en lugar de reglas deterministas.
- Existe la certeza matemática de que el algoritmo es capaz de obtener siempre un óptimo independientemente del punto de partida, si no existe un tiempo límite de cálculo.

### 3.3. Aspectos biológicos

Una de las consecuencias del gran número de trabajos realizados durante los primeros años del siglo XX sobre la genética, fue la aparición de una nueva terminología, más precisa y sencilla que la utilizada por Mendel.

Las *células* son el elemento más pequeño que puede considerarse vivo. Todo organismo vivo está constituido por una o varias células siendo clasificados como *seres unicelulares* o *pluricelulares*, respectivamente. La mayor parte del material genético se encuentra en el núcleo de las células en forma de múltiples moléculas de ADN conocidas como *cromatina*, que durante la división celular se disponen en forma de bastoncillos conocidos como *cromosomas*. Un *gen* es un trozo de ADN (que codifica una determinada proteína) que contiene la información necesaria para que se manifieste un carácter. Se suele pensar en los genes como entidades responsables de determinar los rasgos de un individuo (color de pelo, ojos, estatura, etc.). Cada una de las posibles formas alternativas que puede tener un gen se denomina *alelo* (en la figura 3.1, los genes “A” y “a” serían alelos de un mismo carácter). La posición que ocupa un gen en el cromosoma se denomina *locus*.

El *genoma* de un organismo es la colección completa de material genético y el *genotipo* es el conjunto de genes contenido en un genoma. La manifestación externa del genotipo, es decir, la suma de caracteres observados en un individuo se denomina *fenotipo*.

La mayoría de los organismos pluricelulares son *diploides* (en caso contrario *haploides*), ello quiere decir que almacenan sus cromosomas por parejas donde la mitad de los genes vienen de la madre y la otra mitad del padre. Por tanto, los organismos diploides tienen dos alelos para un mismo carácter en cada cromosoma. Si ambos alelos son iguales se denominan *homocigóticos*, en cambio, si son diferentes *heterocigóticos*. Durante la reproducción sexual se produce un cruce o recombinación de la información genética, emparejando los gametos (cada una de las dos células sexuales masculina y femenina, las cuales son haploides) de los dos padres, para formar un nuevo cromosoma diploide completo. Si los alelos obtenidos tras la recombinación son heterocigóticos, solo uno de los dos genes estará presente en el fenotipo del individuo. Este gen o alelo se denomina *dominante*, en contraposición del gen o alelo *recesivo*. No obstante, la descendencia también está sujeta a mutaciones, habitualmente debido a un error de copia, que producen cambios en algunos de los *nucleótidos* (bits elementales de ADN) entre padres e hijos.

El conjunto de posibles alelos presentes en una población particular de una determinada especie forma la *reserva genética*. El tamaño de la reserva genética determina la diversidad de

la población. La diversidad poblacional es mantenida entre generaciones gracias a los nuevos genotipos producidos por la recombinación y la mutación.

La selección natural puede actuar sobre cualquier rasgo fenotípico, por lo tanto, los individuos más aptos tienen más probabilidades de contribuir con descendientes a la siguiente generación, mientras que los menos aptos tenderán a desaparecer. Como resultado, los alelos que en promedio conllevan una mejor adaptación son más abundantes en la siguiente generación, mientras que los alelos que tienden a perjudicar al individuo, también tienden a desaparecer.

En los GA, un individuo representa una solución posible al problema planteado, mientras que el término cromosoma representa la codificación de dicho individuo mediante una cadena de bits. Una población está constituida por un conjunto de individuos, la cual puede cambiar de tamaño entre generaciones (iteración).

Los genes son una porción del cromosoma que generalmente codifica el valor de un solo parámetro acotado dentro de un rango o dominio. La estructura de un gen depende de la *función de codificación* o *mapeo* empleada. En la Tabla 3.1 se muestra una analogía entre los términos de un sistema natural y un GA.

La *recombinación* consiste en el intercambio de material genético entre dos cromosomas. La *mutación* consiste en la permutación aleatoria de bits.

La mayoría de los GA utilizan individuos haploides (solo un juego de cromosomas), debido a que estos son mucho más sencillos de construir y procesar. En la reproducción haploide, no es necesario determinar que gen es el dominante y cual el recesivo.

Los individuos de una población son evaluados de acuerdo a una función de aptitud, la cual cuantifica el grado de calidad de los individuos. La selección natural se llevará a cabo de los individuos más aptos.

**Tabla 3.1:** Paralelismo entre términos biológicos y los algoritmos genéticos

Sistema Natural	Diseño Óptimo
Cromosoma	Cadena, palabra binaria, vector
Gen	Rasgo, carácter, parámetro del problema
Genotipo	Estructura codificada
Fenotipo	Estructura decodificada
Individuo	Solución
Generación	Ciclo o iteración del algoritmo

### 3.4. Estructura de un algoritmo genético simple

El GA comienza a partir de la determinación de un conjunto de individuos (población) obtenidos de forma aleatoria o a partir de individuos apropiados para el problema. Los individuos de la población son seleccionados en función de su aptitud, permitiendo su recombinación y mutación. Una vez obtenida la nueva población de individuos, estos son evaluados de nuevo. Este proceso se repite hasta satisfacer el criterio de parada (ver figura 3.2).

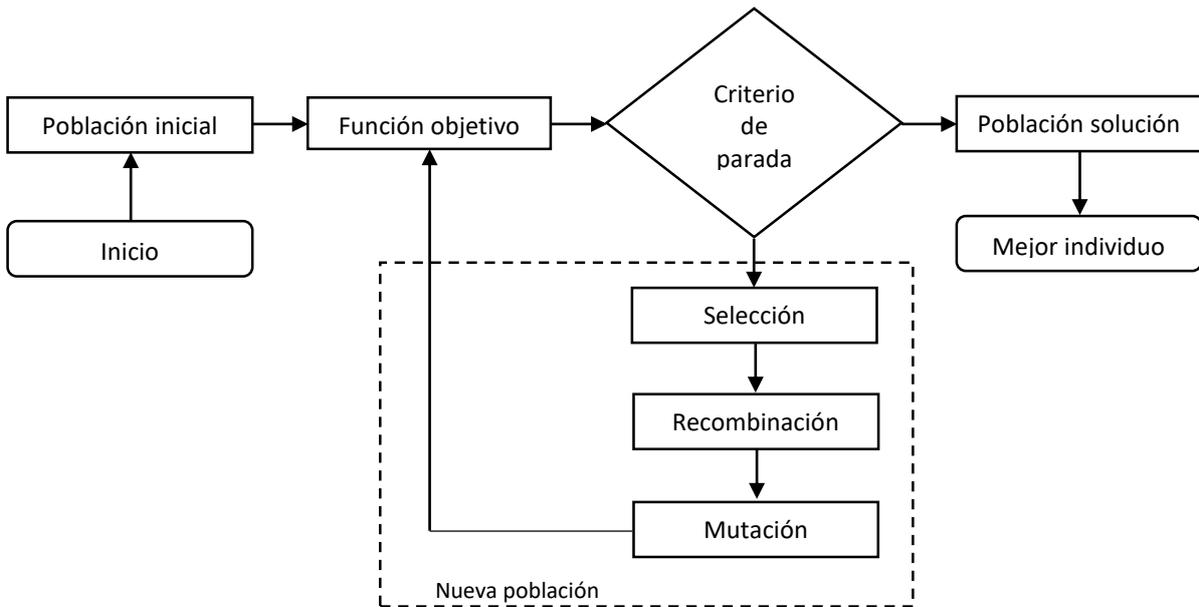


Figura 3.2: Diagrama de flujo de un algoritmo genético simple.

A continuación, se describe de forma más precisa los pasos necesarios para implementar un GA:

1. Codificar el dominio del problema. Definir la función de aptitud y los operadores genéticos.
2. Generar un conjunto inicial (población) de  $n$  soluciones (individuos), donde  $n$  es el tamaño de la población.

$$\mathcal{X}_j^t = \{x_{1,j}^t; x_{2,j}^t; \dots; x_{k,j}^t\} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{X}_j^t$  es el cromosoma del individuo  $j$ -th para la generación  $t$ , el cual está formado por  $k$  genes.

3. Evaluar la calidad de los individuos mediante una función de aptitud.
4. Obtener una nueva población de individuos mediante los operadores:
  - 4.1. Selección: elegir dos individuos (padres) de la población, de acuerdo a su aptitud.
  - 4.2. Cruce: a partir de la probabilidad de cruce, los padres seleccionados recombinan su información para obtener dos nuevos individuos (hijos).
  - 4.3. Mutación: mutar los alelos de los nuevos individuos a partir de la probabilidad de mutación.
5. Reemplazar la generación anterior por la nueva población.
6. Si el criterio de parada se satisface, finalizar. En caso contrario, volver al paso 3.

### 3.5. Representación de individuos

La primera etapa para construir un GA es decidir cuál va a ser la relación entre el espacio genotípico (codificado) y el fenotípico (decodificado), ya que una de las características básicas de los GA es que trabajan de forma simultánea en ambos espacios. Los operadores cruce y

mutación actúan sobre el espacio genotípico, mientras que la evaluación y la selección lo hacen sobre el espacio fenotípico. Elegir una buena representación, es un aspecto clave para realizar una búsqueda eficiente.

Una representación adecuada debe de contar con las siguientes propiedades:

- **Coherencia:** no puede codificar un elemento que carece de significado semántico.
- **Uniformidad:** todos los individuos de una población deben ser representados por el mismo número de genes.
- **Simplicidad:** la codificación debe ser fácilmente aplicable en ambas direcciones.
- **Causalidad:** pequeñas modificaciones del valor (fenotipo) deben corresponder a pequeñas modificaciones en la solución codificada (genotipo).
- **Consistencia:** no deben existir codificaciones improductivas.
- **Minimalidad:** la longitud del código debe ser tan pequeña como sea posible.

Por otro lado, se debe evitar la redundancia interna y la degeneración. Una representación se dice que tiene *redundancia interna* cuando no toda la información genética contenida en el cromosoma es estrictamente necesaria para identificar la solución al cual corresponde. Una representación se dice que contiene *degeneración* cuando más de un cromosoma puede hacer referencia a la misma solución.

Desde la aparición de los GA se han utilizado diferentes formas de representar un individuo. Estas se pueden clasificarse, atendiendo a:

- **Tipo de representación:** binaria, entera, real, etc.
- **Nivel del algoritmo evolucionario:** genotípico, fenotípico.
- **Forma en la que se organiza el cromosoma:** lineal, matricial, arbórea, etc.
- **Longitud del cromosoma:** fija o variable.
- **Cambio durante la evolución:** estática o dinámica.
- **Esquema de codificación:** directa o indirecta.
- **Posibilidad de reutilizar la codificación:** generativa o no generativa.
- **Correspondencia genotipo-fenotipo:** explícita o implícita.

A continuación, se describen algunos de los tipos de representación más utilizados.

### 3.5.1. Representación binaria

Tradicionalmente, la *representación binaria* ha sido la más empleada por facilitar el desarrollo de programas informáticos y utilizar operadores genéticos sencillos. En esta representación, el cromosoma se representa mediante una cadena de dígitos binarios donde cada gen del cromosoma se codifica usando el mismo número de bits (alelos). El número de bits asignados a cada gen dependerá del grado de ajuste que se desee alcanzar. No necesariamente

cada gen debe estar codificado con el mismo número de bits. En la figura 3.3, se muestra un ejemplo de un individuo binario constituido por tres genes.

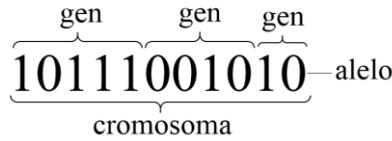


Figura 3.3: Individuo genético binario.

Dentro de las representaciones con códigos binarios cabe destacar la codificación Gray y E-code. En la codificación *Gray*, la separación que existe en el espacio codificado entre soluciones adyacentes en el espacio decodificado es 1. La codificación *E-code* presenta un genotipo en el cual a cada una de las combinaciones de la tabla de códigos se le asigna un número creciente de 1. En la tabla 3.2, se muestran las diferencias entre las codificaciones: binaria, Gray y E-code.

Un inconveniente de la representación binaria es su falta de adaptabilidad a ciertos tipos de problemas. No quiere decir, que en estos problemas no se pueda utilizar este tipo de representación, sino que el esfuerzo que se debe realizar, disminuye la eficiencia de la misma. Para estos problemas existen otros tipos de representaciones más apropiadas, como se describen a continuación.

Tabla 3.2: Codificación usando tres bits mediante una cadena binaria, Gray y E-code.

Número	0	1	2	3	4	5	6	7
Cadena binaria	000	001	010	011	100	101	110	111
Gray	000	001	011	010	110	111	101	100
E-code	000	001	010	100	011	101	110	111

### 3.5.2. Representación entera

La *representación entera* se caracteriza por utilizar una cadena de números enteros para codificar los elementos, por ejemplo {0, 1, 2, 3} representa {Norte, Sur, Este, Oeste}.

### 3.5.3. Representación real o punto flotante

A menudo, la forma más adecuada de representar los individuos de un problema es mediante una cadena de números reales. Esto ocurre cuando los genes a codificar provienen de una distribución continua. Esta, suele ser una codificación directa donde el valor de la solución (fenotipo) es directamente la solución del cromosoma (genotipo).

### 3.5.4. Representación con permutaciones

La *representación con permutación* es la forma más natural de codificar aquellos problemas en los que hay que decidir el orden en el que ocurre una secuencia de eventos. Existen dos formas de codificar utilizando esta representación. En la primera, la posición del

elemento  $i$ -ésimo codifica directamente el lugar en el que ocurre el evento en la secuencia. En la segunda, la posición en la que ocurre el evento en la secuencia viene designado por el valor del elemento  $i$ -ésimo.

### 3.5.5. Representación híbrida

La *representación híbrida* utiliza dos tipos de genotipos: representación real para codificar variables continuas y representación binaria para codificar variables discretas.

### 3.5.6. Representación natural

La *representación natural* utiliza números naturales para representar diferentes conjuntos de intervalos de características continuas o diferentes conjuntos de valores de variables discretas.

### 3.5.7. Discusión de las técnicas de representación

Tradicionalmente, la codificación binaria ha sido el tipo de representación más extendido, básicamente por su simplicidad y sobre todo por su analogía con los conceptos darwinianos. El *Teorema Fundamental de los Esquemas* (The fundamental Theorem of schemata) (Holland, 1975) establece que el alfabeto binario ofrece el máximo número de esquemas por bits de información de todos los sistemas de codificación. Además, esta codificación maneja operadores genéticos (recombinación y mutación) fáciles de implementar. Sin embargo, para muchos problemas la codificación binaria no es adecuada debido a:

- Epítasis: existe una fuerte interacción entre genes en un cromosoma. Por lo que, la contribución en la aptitud de un gen depende de los valores de los otros genes.
- Inconsistencia: los operadores genéticos pueden producir soluciones ilegales, ya que una representación binaria puede no describir naturalmente un punto del espacio de búsqueda.

Desde los experimentos realizados por Michalewicz (1992), donde se comparan la representación binaria y la real, numerosos trabajos han demostrado que la representación real es mucho más eficiente que la codificación binaria sobre todo en problemas multidimensionales que requieren una alta precisión (Michalewicz et al., 1994; Walters y Smith, 1995; Rakesh, 2012). Por otro lado, Eshelman y Schaffer (1993) lograron desarrollar la generalización del teorema fundamental de los esquemas tanto para una codificación entera como real, aportando un bagaje teórico tan potente como el desarrollado por Holland para la codificación binaria.

Habitualmente, los genes se suelen representar de forma *lineal*. En una codificación lineal, el cromosoma se idealiza como una representación unidimensional en forma de lista o la cadena. Sin embargo, también se pueden utilizar representaciones *no lineales* como la matricial o arbórea (Hamda y Schoenauer, 2000; Carrano et al., 2007; Snásel et al., 2008).

Otra de las características de los cromosomas es su longitud: *fija* o *variable*. En este último caso se permite que los individuos puedan variar la longitud de su cromosoma entre generaciones (Kim y Weck, 2005; Li et al., 2008).

Por otro lado, las codificación pueden ser *directa*, si el valor de la solución (fenotipo) coincide con la solución del cromosoma (genotipo) o *indirecta* en el caso de codificar reglas para cada uno de los parámetros (Horby, 2003). Normalmente, la representación real suele ser directa mientras que la representación binaria suele ser indirecta.

### 3.5.8. Representaciones utilizadas en optimización de topología y forma

La codificación más popular para el diseño óptimo de topología es mediante una *cadena de bits* (bitstring representation). Esta codificación es una de las más frecuentes, ya que se genera a partir de una malla de elementos regulares, en donde la distribución de material se realiza representando cada elemento de la malla como un gen que puede tomar valores 0/1. Si el valor es “1” indica la presencia de material y si el valor es “0” indica la ausencia del mismo. La construcción del cromosoma (unidimensional) se realiza mediante la concatenación de los bits (Jakiela et al., 2000; Li et al., 2008; Li et al., 2009). Sin embargo, los límites de esta representación aparecen cuando el nivel de discretización es elevado, necesitando poblaciones de gran tamaño para alcanzar la convergencia en un tiempo razonable. Kim y de Weck (2005) y Li et al. (2008) consiguieron acelerar la convergencia de la optimización, empleando cromosomas de tamaño variable, eliminando de los cromosomas aquellos bits que representan elementos con una baja energía de deformación. Chen et al. (2009) utilizaron diferentes criterios de optimalidad para determinar la población inicial, demostrando como el método propuesto puede resolver problemas de optimización de topología de una forma más eficiente, además de lograr mejores soluciones con un coste computacional menor que con los algoritmos genéticos clásicos.

Otro tipo de representación, aunque no tan extendida como la anterior, es la *representación de Voronoï*, a través de la cual se codifica el dominio de diseño en particiones o celdas. Estas celdas (*Voronoï cells*) son subconjuntos poliédricos del dominio, los cuales se etiquetan con “1” si están compuesto por material y con “0” si están vacíos (Schoenauer et al., 1996).

La idea de partir de un dominio inicial e ir retirando material en aquellas regiones donde las tensiones son mínimas (Djonghe, 1993) dio lugar a la *codificación de agujeros* (hole representation) también denominada codificación-H. Las características más representativas de este tipo de representación son: (1) el dominio inicial se representa con material, (2) una lista (de longitud variable) de agujeros (rectángulos, triángulos círculos, etc.) es la encargada de caracterizar la topología de la estructura, y (3) la lista de agujeros está controlada por los operadores:

- Cruce mediante intercambio geométrico de agujeros.
- Mutación para la modificación de las características de los agujeros.
- Mutación para adicción o destrucción de algunos agujeros.

Basada en la teoría gráfica, la *codificación morfológica* (morphological representation), actualmente denominada *representación gráfica* (graph representation) optimiza la topología de una estructura mediante: (1) curvas Bezier, que conectan los soportes de la estructura con aquellos puntos en donde están aplicadas las cargas y (2) un cromosoma de valores reales, en el cual se dispone de información relativa a los puntos de inicio y fin de las curvas, número de

elementos de control y ancho de las curvas (Wang y Tai, 2004; Tai y Akhtar, 2005). Este tipo de representación, también ha sido utilizada para la optimización de topología bajo incertidumbre (Wang y Yang, 2009). Para ello, se combinan la técnica del peor caso de tratamiento de incertidumbres con un algoritmo genético multiobjetivo.

La *representación de contorno* (boundary representation) optimiza la forma de una estructura mediante: (1) curvas B-Spline, las cuales son definidas a partir de unos pocos puntos de control y parámetros de forma y (2) un cromosoma definido por los puntos de control y los parámetros de forma. Cerreloza et al. (2000) utilizan una codificación binaria para definir cada uno de los genes del cromosoma. En cambio, Burczynski y Kokot, (2003) utilizan una codificación real para definir el cromosoma. García et al. (2015), proponen un algoritmo genético jerarquizado para ajustar curvas mediante B-spline. Para ello, utilizan dos tipos de genes: genes de control y genes paramétricos. Los *genes de control* son codificados mediante dígitos binarios, mientras los *genes paramétricos* son codificados con números reales. El propósito de los genes de control es de habilitar o no los genes paramétricos.

### 3.6. Población inicial

Como ya se comentó con anterioridad, los algoritmos genéticos trabajan usando un conjunto de soluciones (población) que evoluciona conforme a los operadores genéticos. Por ello, para poder trabajar con los GA es necesario establecer una población inicial. En términos generales, la población inicial debe ser lo suficiente variada para evitar la convergencia prematura del algoritmo. Según Michalewicz (1992), la forma más eficaz de determinar que individuos van a formar parte de la población inicial es mediante una generación aleatoria. Una alternativa para generar la población inicial es mediante el uso de técnicas heurísticas adaptadas al problema que se desea resolver. Sin embargo, estas técnicas pueden generar poblaciones muy determinadas del espacio de búsqueda, perdiendo poder de exploración y un aumento del esfuerzo computacional. También pueden utilizarse soluciones conocidas para establecer la población inicial, pero esta estrategia habitualmente conduce a óptimos locales.

### 3.7. Operadores genéticos

En el caso de los GA los operadores fundamentales son: reproducción (selección y recombinación) y mutación. Estos operadores son los que dominan el proceso de búsqueda y de su elección dependen los procesos de exploración y explotación.

La *exploración* hace referencia a la búsqueda de soluciones más allá de las soluciones codificadas en los progenitores, mientras que la *explotación* se refiere a la búsqueda del óptimo guiada y acotada por la solución de los progenitores. Una exploración demasiado intensa hace que el proceso de convergencia sea lento, mientras que una explotación excesiva provoca la convergencia prematura a un óptimo local. Un equilibrio entre ambos aspectos es clave para el buen funcionamiento del algoritmo.

Antes de comenzar la descripción de los diferentes operadores, advertir que un número importante de consideraciones han sido omitidas, ya que una discusión en profundidad queda fuera del alcance del propósito de este trabajo. Una revisión más exhaustiva se puede encontrar en: (Golberg, 1989; Mitchell, 1998; Eiben y Smith, 2003; Sivanandam y Deepa, 2008).

### 3.7.1. Selección

La *selección* es el operador mediante el cual se escogen los individuos de la población que van a participar en la reproducción. El objetivo es elegir las mejores soluciones y desplazar fuera de la población aquellas cuya aptitud es inferior. Una característica importante del operador selección es que trabaja en el espacio fenotípico, por lo que no depende del tipo de representación sino del valor de su aptitud.

Un concepto de gran importancia es la *presión selectiva* (cociente entre aptitud máxima y la media de las aptitudes de la población), que indica el grado de importancia con el que las mejores soluciones son favorecidas para formar parte de la población de progenitores. El ratio de convergencia de un algoritmo genético está estrechamente relacionado con la magnitud de la presión selectiva. Si la presión selectiva es elevada, la búsqueda termina de forma prematura hacia una solución incorrecta (óptimo local). Sin embargo, si la presión selectiva es demasiado baja, el algoritmo evoluciona lentamente. Por tanto, lo más recomendado es utilizar una presión selectiva baja al comienzo del algoritmo genético (para realizar una exploración amplia del espacio de búsqueda), e ir aumentando esta presión hacia el final (para explotar las regiones más prometedoras del espacio de búsqueda).

Hay cuatro aspectos claves que ejercen una influencia significativa sobre la presión selectiva y por tanto en el comportamiento del algoritmo genético.

- **Tamaño del espacio de muestreo:** puede ser regular o extendido. En el espacio de muestreo *regular*, el tamaño de la población permanece constante donde los padres son reemplazados por los hijos. En cambio, en el espacio de muestreo *extendido*, tanto los padres como los hijos tienen la misma probabilidad de competir por la supervivencia.
- **Mecanismos de muestreo:** Se pueden emplear tres mecanismos diferentes para la selección de individuos: *estocástico*, *determinista* y *mixto*.
- **Tipos de selección:** Desde un punto de vista Neo-Darwiniano, la selección puede ser: estabilizada, direccional o quebrantada. La *selección estabilizada* (o *normalizada*) tiende a eliminar aquellos cromosomas con valores extremos, la *selección direccional* tiende a incrementar o disminuir el valor medio de la población, y la *selección quebrantada* tiende a eliminar los cromosomas con valores intermedios. Apuntar que, la mayoría de los métodos de selección están basados en la selección direccional.
- **Probabilidad de selección:** En este punto, el aspecto más importante es determinar la probabilidad de selección de cada cromosoma. Dicha probabilidad puede ser determinada mediante mecanismos de escalonamiento o de orden. Los mecanismos de *escalonamiento* transforman los valores de la aptitud a un valor real positivo mediante una función de escalonamiento y utilizan este nuevo valor para determinar la probabilidad de selección de cada cromosoma. En los mecanismos de *orden*, los cromosomas son ordenados según su valor de aptitud y la probabilidad de selección se determina en función al orden que ocupa cada cromosoma.

A continuación, se describen los principales operadores de selección.

### 3.7.1.1. Selección por ruleta

La selección de los individuos para formar parte de la población de padres se realiza teniendo en cuenta la aptitud del individuo respecto a la del resto de la población. Por ello, los mejores individuos de la población (superindividuos) toman rápidamente el control de la población, disminuyendo la diversidad de esta y provocando una convergencia prematura del algoritmo hacia un óptimo local. Dentro de esta categoría cabe destacar:

- *Selección por ruleta o proporcional* (roulette wheel): es la técnica más popular, fue desarrollada por Holland (1975), y posteriormente analizada por Bridle (1981). Con este operador, la probabilidad de selección de un individuo  $i$  es directamente proporcional a su aptitud  $\Phi$ .

$$P_i = \frac{\Phi_i}{\sum_{i=1}^n \Phi_i} \quad (3.2)$$

donde  $P_i$  es la probabilidad de selección,  $\Phi_i$  es la aptitud del individuo  $i$  y  $n$  es el número total de individuos que se desea seleccionar para formar la población de padres.

La selección por ruleta se puede ilustrar gráficamente como una ruleta de casino dividida en  $n$  sectores donde el tamaño de estos es proporcional al nivel de aptitud de cada individuo. La selección consiste en rotar la ruleta y el sector donde indique el marcador será el individuo que ha de ser seleccionado para reproducirse. Los  $n$  individuos son seleccionados realizando  $n$  tiradas. Aunque este mecanismo es aleatorio, la oportunidad de que un individuo sea seleccionado es proporcional al tamaño del sector. De esta forma, los individuos menos aptos son desplazados de la población según se van sucediendo los giros de la ruleta.

- *Selección estocástica universal o sin remplazamiento*: fue originalmente definida por De Jong (1975) con el fin de mejorar la mala distribución de los individuos de la población obtenida con el operador de selección por ruleta. El operador es similar a la selección por ruleta, pero en lugar de tener un único marcador, se colocan de forma equidistante tantos marcadores como individuos desean seleccionarse y mediante una única tirada se seleccionan los  $n$  individuos. Este operador presenta dos ventajas con respecto a la selección por ruleta:

1. Reduce la alta variabilidad estocástica, y el tiempo computacional.
2. Garantiza que un individuo suficientemente apto, pueda ser seleccionado varias veces.

### 3.7.1.2. Selección por rango

La selección por rango fue originalmente definida por Baker (1985) con el fin de superar los inconvenientes de la selección por ruleta. Este operador ordena jerárquicamente los individuos según su aptitud y determina la probabilidad de selección de un individuo en función del orden que ocupa en la población. Una vez que la probabilidad de selección de cada individuo ha sido establecida, el proceso para la selección de los descendientes puede ser realizado mediante un método proporcional.

### 3.7.1.3. Selección por torneo

Existen principalmente dos versiones de selección por torneo: determinista y probabilista. En la versión determinista se eligen de forma aleatoria un conjunto de individuos de la población. De entre los seleccionados se elige el individuo más apto. En la versión probabilista, se genera un número aleatorio en el intervalo  $[0,1]$ , si este es mayor que un parámetro  $p$  (fijado a priori) se escoge el individuo más apto, en caso contrario el menos apto.

Generalmente, el torneo se realiza entre dos individuos (torneo binario). Sin embargo, este principio puede ser extendido a un conjunto arbitrario cuya dimensión se denomina tamaño del torneo. Un caso particular es el *elitismo global*, en el cual participan todos los individuos de la población

Este operador no selecciona la población de padres en función de su aptitud, con lo que se asegura la diversidad poblacional. Debido a sus características es uno de los operadores más efectivos y suele conducir a la obtención de máximos absolutos (Whitley, 1989).

### 3.7.2. Recombinación

El *operador de recombinación* o también llamado *cruce*, es el encargado de producir dos o más hijos a partir de dos progenitores. El principio del mecanismo de recombinación es muy sencillo. A partir de dos individuos de características diferentes y deseables se generan hijos que combinan las características de ambos padres. La combinación de la información genética de los padres permite realizar búsquedas en otros puntos del espacio de diseño. El operador de cruce realiza las siguientes operaciones:

- Toma aleatoriamente individuos entre los elegidos anteriormente por el operador selección.
- Genera aleatoriamente un número entre 0 y 1, el cual es comparado con  $p_c$  (probabilidad de cruce). Si el valor es menor a la  $p_c$ , se generan hijos mediante una regla de intercambio de genes, sino, los hijos son una copia exacta de los padres. A la hora de realizar el intercambio de genes, este se puede realizar por genotipo o por fenotipo.

A continuación, se describen los principales operadores de recombinación organizados en función del tipo de representación: binaria o real.

#### 3.7.2.1. Operadores de recombinación para representación binaria

**Cruce por un punto:** es el operador de cruce más sencillo. Fue propuesto inicialmente por Holland (1975) y estudiado por De Jong (1975). La recombinación se puede realizar por genotipo o por fenotipo. En el primer caso, la implementación del algoritmo se realiza del siguiente modo: (1) se genera un número aleatorio  $r \in [0, n_g]$ , donde  $n_g$  es el número de bits que constituyen el cromosoma, y (2) se intercambian las subcadenas de los padres posteriores al punto de cruce formando dos nuevos descendientes. En la figura 3.4, se muestra un ejemplo de cruce por un punto por genotipo con  $r=7$ . En el segundo caso, la implementación se realiza del mismo modo, pero sustituyendo  $n_g$  por  $n_f$ , donde  $n_f$  es el número de fenotipos presentes en el genoma. En la figura 3.5, se muestra un ejemplo de corte por un punto por fenotipo con  $r=2$ , donde en el genoma se pueden apreciar tres fenotipos distintos (enmarcados usando rectángulos). El principal inconveniente de este operador es que el intercambio de segmentos

siempre se realiza en los extremos del cromosoma, tendiéndose a mantener los genes de un extremo u otro.

Padres	Hijos
{0110011 101}	{0110011 010}
{1110110 010}	{1110110 101}

Figura 3.4: Cruce por un punto. Corte por genotipo ( $r = 7$ ).

Padres	Hijos
{0110 01 1101}	{011001 0010}
{1110 11 0010}	{111011 1101}

Figura 3.5: Cruce por un punto. Corte por fenotipo ( $r = 2$ ).

**Cruce por  $n$  puntos:** es muy similar al operador de cruce por un punto, pero en lugar de tener un único punto de corte se consideran  $n$  puntos. En este se permutan los genes comprendidos en cada segmento de corte. Una característica importante de este operador es que los segmentos intercambiados no tienen que corresponder con los extremos finales de la cadena. En las figuras 3.6 y 3.7, se muestran un ejemplo de cruce por dos puntos.

Padres	Hijos
{011 0011 101}	{011 0110 101}
{111 0110 010}	{111 0011 010}

Figura 3.6: Cruce por dos puntos. Corte por genotipo ( $r = 3$  y  $7$ ).

Padres	Hijos
{0110 01 1101}	{0110 11 1101}
{1110 11 0010}	{1110 01 0010}

Figura 3.7: Cruce por dos puntos. Corte por fenotipo ( $r = 1$  y  $2$ ).

**Cruce uniforme:** Este operador fue desarrollado por Syswerda (1989) y consiste en generar una máscara binaria de forma aleatoria de longitud igual al genoma de los padres en el caso de realizar un corte por genotipo o igual al número de fenotipos en el caso de hacer un corte por fenotipo. El cruce se realiza siguiendo esta máscara, eligiendo para el primer hijo el primer padre si en la máscara aparece un “1” o el segundo padre si es un “0” y viceversa con el segundo hijo. En la figura 3.8, se muestra un ejemplo de cruce uniforme por genotipo con una máscara {1101001101} y en la figura 3.9, se muestra un ejemplo de cruce por fenotipo usando una máscara {1 0 0}.

Padres	Hijos
{0110011101}	{0110111111}
{1110110010}	{1110010000}
máscara {1101001101}	

Figura 3.8: Cruce uniforme. Corte por genotipo.

Padres	Hijos
{0110   01   1101}	{0110110010}
{1110   11   0010}	{1110011101}
máscara {1 0 0}	

Figura 3.9: Cruce uniforme. Corte por fenotipo.

### 3.7.2.2. Operadores de recombinación para representación real

La recombinación de cadenas de bits de números reales se puede realizar de dos formas: (1) usando los operadores descritos para representación binaria, siendo cada alelo un número real. La principal desventaja es que solo la mutación introduce nuevos valores dentro de la población, ya que la recombinación solo realiza combinaciones de valores existentes. Este tipo de recombinación es conocida como *recombinación discreta*; y (2) usando un operador, que para cada gen, origine un nuevo alelo en el hijo que se encuentre entre los alelos de los padres, mediante la expresión:

$$z_i = \alpha x_i + (1 - \alpha)y_i \quad \alpha \in [0,1] \quad (3.3)$$

donde el valor del alelo  $i$  del hijo  $z$  es una combinación de los alelos de los padres  $x$  e  $y$ . De esta forma, el operador es capaz de crear nuevo material genético. Los operadores de este tipo son conocidos como *recombinación aritmética*. A continuación, se describen diferentes operadores de recombinación para codificación real.

**Recombinación aritmética simple:** La implementación se realiza seleccionando del genoma un gen  $k$  de forma aleatoria. A continuación, para el primer hijo, se copia el genoma del primer padre hasta la posición del gen  $k$  y el resto del genoma es el promedio aritmético de los dos padres:

$$\{x_1, \dots, x_k, \alpha y_{k+1} + (1 - \alpha)x_{k+1}, \dots, \alpha y_n + (1 - \alpha)x_n\} \quad (3.4)$$

El segundo hijo es originado de la misma forma pero invirtiendo la posición de los padres (ver figura 3.10).

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,5 0,5 0,6}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,5 0,5 0,6}

Figura 3.10: Recombinación aritmética simple.  $k = 6$  y  $\alpha = 0,5$ .

**Recombinación aritmética singular:** La implementación de este operador se realiza, copiando en el primer hijo todo el genoma del primer padre a excepción del gen  $k$ , el cual se obtiene como promedio aritmético de los dos padres:

$$\{x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha y_k + (1 - \alpha)x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\} \quad (3.5)$$

El segundo hijo es originado de la misma forma pero invirtiendo la posición de los padres (ver figura 3.11).

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,5 0,8 0,9}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,5 0,2 0,3}

Figura 3.11: Recombinación aritmética singular.  $k = 7$  y  $\alpha = 0,5$ .

**Recombinación aritmética completa:** En este caso, el genotipo de los hijos es el promedio de los genotipos de los padres. El genoma de ambos hijos se expresa como:

$$\begin{aligned} \text{hijo 1} &= \alpha x + (1 - \alpha)y \\ \text{hijo 2} &= \alpha y + (1 - \alpha)x \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  e  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$  (ver figuras 3.12 y 3.13).

Debe tenerse especial cuidado en este operador de no realizar un cruce aritmético intermedio ( $\alpha = 0,5$ ), ya que en este caso ambos hijos resultaran ser iguales, provocando una pérdida de la diversidad en la población (ver figura 3.12).

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,2 0,2 0,3 0,3 0,4 0,4 0,5 0,5 0,6}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	{0,2 0,2 0,3 0,3 0,4 0,4 0,5 0,5 0,6}

Figura 3.12: Recombinación aritmética completa.  $\alpha = 0,5$

Padres	Hijos
{0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70}	{0,24 0,20 0,30 0,26 0,36 0,32 0,42}
{0,30 0,20 0,30 0,20 0,30 0,20 0,30}	{0,16 0,20 0,30 0,34 0,44 0,48 0,58}

Figura 3.13: Recombinación aritmética completa.  $\alpha = 0,3$

**Cruce Lineal:** Este operador fue propuesto por Wright (1991). En este caso se generan tres hijos cuyo genotipo se obtiene mediante una recombinación lineal de los genotipos de los padres según las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{hijo 1} &= 0,5x + 0,5y \\ \text{hijo 2} &= 1,5x - 0,5y \\ \text{hijo 3} &= -0,5x + 1,5y \end{aligned} \quad (3.7)$$

A continuación, los padres son sustituidos por los dos hijos más prometedores. En la figura 3.14, se muestra un ejemplo de la generación de los tres hijos por medio de este operador.

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,2 0,2 0,3 0,3 0,4 0,4 0,5 0,5 0,6}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	{0,0 0,2 0,3 0,5 0,6 0,8 0,9 1,1 1,2}
	{0,4 0,2 0,3 0,1 0,2 0,0 0,1 -0,1 0,0}

Figura 3.14: Cruce lineal.

**Cruce geométrico:** Fue originalmente propuesto por Michalewicz et al. (1992). En este tipo de cruce, solo se genera un hijo cuyo genotipo resulta de la recombinación cuadrática de los genotipos de ambos padres:

$$\{\sqrt{x_1 y_1}, \dots, \sqrt{x_n y_n}\} \quad (3.8)$$

En la figura 3.15, se muestra un ejemplo de aplicación de este operador.

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,2 0,2 0,3 0,3 0,4 0,3 0,5 0,4 0,5}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	

Figura 3.15: Recombinación geométrica.

**Cruce plano:** Este operador fue desarrollado por Radcliffe (1991). En este caso, cada uno de los genes de los hijos es un valor generado aleatoriamente en el intervalo  $[x_i, y_i]$ .

**Cruce por mezcla alfa (BLX- $\alpha$ ):** Este operador fue desarrollado por Eshelman et al. (1993). Dado los genotipos de los padres  $\mathbf{x} = \{x_1 \dots x_n\}$  e  $\mathbf{y} = \{y_1 \dots y_n\}$ , se define la distancia rectilínea o de Manhattan como:

$$d_i = |x_i - y_i| \quad (3.9)$$

El algoritmo utiliza la distancia rectilínea para formar el genotipo de los hijos, de tal manera que el valor de cada gen se determina de forma aleatoria dentro del intervalo  $[L_i, U_i]$  siendo:

$$\begin{aligned} L_i &= \min(x_i, y_i) - \alpha d_i \\ U_i &= \max(x_i, y_i) + \alpha d_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde el valor  $\alpha$  representa la distancia, más allá de los límites establecidos por los genes de los padres, que los genes de los hijos pueden tomar. Por lo que se permite que los genes de los hijos adopten valores mayores o menores a los de los padres, pero no de forma excesiva. En la figura 3.16, se muestra un ejemplo de aplicación de este operador.

Según Deb y Agrawal (1994), este operador no respeta, en todas las ocasiones, las características deseables de los padres a la hora de generar hijos, con lo que se puede ralentizar el proceso de convergencia.

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,1 0,2 0,3 0,4 0,2 0,6 0,5 1,1 0,8}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	{0,3 0,2 0,3 0,5 0,5 0,1 0,8 0,5 1,2}
$L = \{0,0 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,1 \ 0,2 \ 0,0 \ 0,1 \ -0,1 \ 0,0\}$	
$U = \{0,4 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,5 \ 0,6 \ 0,8 \ 0,9 \ 1,1 \ 1,2\}$	

Figura 3.16: Cruce por BLX – 0,5.

**Cruce lineal extendido:** Este operador fue desarrollado por Mühlenbein et al. (1993). Los valores de los genes en los hijos son determinados según la Ec. (3.11) donde  $\alpha$  es un valor elegido aleatoriamente en el intervalo  $[-0,25; 1,25]$ .

$$\begin{aligned} \text{hijo 1} &= \{x_1 + \alpha(y_1 - x_1), \dots, x_n + \alpha(y_n - x_n)\} \\ \text{hijo 2} &= \{y_1 + \alpha(x_1 - y_1), \dots, y_n + \alpha(x_n - y_n)\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

En la figura 3.17, se muestra un ejemplo de aplicación de este operador, donde  $\alpha$  ha sido elegido aleatoriamente igual a 0,3.

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,2 0,2 0,3 0,3 0,4 0,5 0,6 0,6 0,7}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	{0,2 0,2 0,3 0,3 0,4 0,3 0,4 0,4 0,5}

Figura 3.17: Cruce lineal extendido ( $\alpha = 0,3$ ).

**Cruce intermedio extendido:** Los valores de los genes de los hijos son determinados según la Ec. (3.12), donde  $\alpha_i$  es un valor elegido aleatoriamente en el intervalo  $[-0,25; 1,25]$  (Mühlenbein et al., 1993). Este operador es equivalente a BLX-0,25 . En la figura 3.18, se muestra un ejemplo de cruce intermedio extendido.

$$\begin{aligned} \text{hijo 1} &= \{x_1 + \alpha_1(y_1 - x_1), \dots, x_n + \alpha_n(y_n - x_n)\} \\ \text{hijo 2} &= \{y_1 + \alpha_1(x_1 - y_1), \dots, y_n + \alpha_n(x_n - y_n)\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9}	{0,2 0,2 0,3 0,2 0,4 0,6 0,3 0,8 0,5}
{0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3 0,2 0,3}	{0,2 0,2 0,3 0,4 0,4 0,2 0,7 0,2 0,7}
$\alpha = \{0,4 \ -0,2 \ 0,7 \ 1,2 \ 0,3 \ 0,1 \ 0,9 \ 0,0 \ 0,7\}$	

Figura 3.18: Cruce intermedio extendido.

**Cruce binario simulado (SBX- $\beta$ ):** Este operador fue propuesto por Deb (1994) con el objetivo de simular el operador de cruce por un punto, pero en este caso bajo una codificación real que respeta la construcción de esquemas.

Para ello, utiliza un factor ( $\beta$ ), denominado factor de propagación, que mide la propagación de los genes de los hijos con respecto a la de los padres. Este se calcula para cada uno de los genes, como el cociente entre la distancia de los genes de los hijos con respecto a la distancia de los genes de los padres. Dados los padres  $\{x_1 \dots x_n\}$  e  $\{y_1 \dots y_n\}$  y los hijos  $\{u_1 \dots u_n\}$  y  $\{v_1 \dots v_n\}$ , el factor de propagación  $\beta_i$  para cada gen se calcula como:

$$\beta_i = \left| \frac{x_i - y_i}{u_i - v_i} \right| \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Para implementar el operador se debe de realizar los siguientes pasos: (1) generar un número aleatorio  $r \in \text{rand}(0,1)$ , y (2) calcular el valor de  $\beta$  usando la Ec. (3.14)

$$\beta = \begin{cases} 2r^{\frac{1}{\eta+1}} & r \leq 0,5 \\ \left[ \frac{1}{2(1-r)} \right]^{\frac{1}{\eta+1}} & r > 0,5 \end{cases} \quad (3.14)$$

donde  $\eta$  determina la probabilidad de generar individuos próximos o alejados de los padres. Valores pequeños de  $\eta$  generan hijos muy alejados de los padres mientras que valores grandes de  $\eta$  generan hijos muy próximos a los padres. Un valor frecuente es  $\eta=1$ ; y (3) determinar los hijos según Ec. (3.15). En la figura 3.19, se muestra un ejemplo de aplicación de este operador.

$$\begin{aligned} \text{hijo 1: } & 0,5[(1 + \beta)x + (1 - \beta)y \\ \text{hijo 2: } & 0,5[(1 - \beta)x + (1 + \beta)y \end{aligned} \quad (3.15)$$

Padres	Hijos
{0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6}	{0,0 0,2 0,3 0,4 0,5 0,7}
{0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1}	{0,7 0,5 0,4 0,3 0,2 0,0}

Figura 3.19: Cruce binario simulado ( $r = 0,4$ ;  $\eta = 1$ ;  $\beta = 1,27$ ).

**Operadores de cruce multiparentales:** Los operadores de cruce definidos hasta este momento, parten de dos padres para generar los hijos. Sin embargo, existen operadores de cruces que utilizan más de dos padres. Algunos de estos operadores son: el cruce unimodal de distribución normal (UNDX- $m$ ) (Kita et al., 1998), el cruce parento-céntrico (PCX) (Deb et al., 2002), y el cruce simplex (Tsutsui y Goldberg, 2002; Renders y Bersini, 1994).

### 3.7.3. Mutación

La mutación es el nombre genérico para aquellos operadores que utilizan un solo individuo (padre) para generar un nuevo individuo (hijo) mediante el cambio aleatorio de valor de algunos de sus genes, habitualmente uno.

La mutación se puede realizar mediante la selección de ciertos individuos de la población y mutarlos antes de ser introducidos en la nueva población, o utilizarla de forma conjunta con el operador de cruce. Esta última, es la forma habitual de llevar a cabo la mutación, donde primeramente se seleccionan los individuos de la población para realizar el cruce. Si el cruce

es satisfactorio, entonces uno de los descendientes, o ambos, son mutados con respecto a una cierta probabilidad. El proposito es imitar el comportamiento que se produce en la naturaleza, ya que cuando se generan nuevos individuos se puede producir algún tipo de error, normalmente sin mayor trascendencia, en el paso de la carga genética de padres a hijos.

La mutación es por tanto un mecanismo muy interesante, con el cual se puede generar nuevos individuos con características distinta a las de sus progenitores, y permitir búsquedas más allá de los puntos generados por el genotipo de los padres. A continuación, se describen varios operadores de mutación en el caso de utilizar una codificación binaria o real.

### 3.7.3.1. Operadores de mutación para representación binaria

**Mutación de bit:** Existe una única posibilidad de que se produzca la mutación de algún bit. De producirse, el algoritmo elige aleatoriamente un bit y lo invierte. En la figura 3.20, se muestra un ejemplo de aplicación de este operador donde se ha elegido el tercer bit para ser mutado.

Padre	Hijo
{1 0 0 1 1 0 1 1 0}	{1 0 1 1 1 0 1 1 0}

Figura 3.20: Mutación de bit ( $k = 3$ ).

**Mutación multi-bit:** Cada bit tiene una probabilidad de mutarse o no, la cual se recalcula para cada una de las generaciones. En la figura 3.21, se muestra la mutación mediante este operador del tercer y octavo bit.

Padre	Hijo
{1 0 0 1 1 0 1 1 0}	{1 0 1 1 1 0 1 0 0}

Figura 3.21: Mutación de multi-bit ( $k = 3$  y 8).

**Mutación de gen:** Similar a la mutación de bit, pero el cambio se realiza para un gen completo. En la figura 3.22, se muestra un ejemplo de aplicación de este operador, en el cual, el cromosoma está constituido por tres genes y es mutado el gen que ocupa la segunda posición.

Padre	Hijo
{ 10   100   0110 }	{ 10   011   0110 }

Figura 3.22: Mutación por gen.

**Mutación de intercambio:** se intercambia el contenido de dos bits/genes de forma aleatoria. En la figura 3.23, se muestra el intercambio realizado mediante este operador de los bits que ocupan la tercera y octava posición.

Padres	Hijos
{1 0 0 1 1 0 1 1 0}	{1 0 1 1 1 0 1 0 0}

Figura 3.23: Mutación de intercambio ( $k = 3$  y 8).

### 3.7.3.2. Operadores de mutación para representación real

**Mutación aleatoria uniforme:** Si un gen  $k$  resulta ser elegido para la mutación, se genera aleatoriamente un valor dentro del dominio  $[L_k, U_k]$ , donde  $L_k$  y  $U_k$  representan el valor mínimo y máximo que puede tomar dicho gen.

Padres	Hijos
{0,1 0,2 <b>0,3</b> 0,4 0,5 0,6}	{0,0 0,2 <b>0,6</b> 0,4 0,5 0,7}

Figura 3.24: Mutación aleatoria uniforme ( $k = 3$ ;  $U_3 = 0,2$ ;  $L_3 = 0,8$ ).

**Mutación no uniforme:** Si un gen  $k$  resulta ser elegido para la mutación, se genera aleatoriamente un número  $r$  dentro del intervalo  $[0,1]$ , de modo que si  $r < P_w$  (proporción de individuos alejados del gen inicial) se lanza una “moneda”. Si sale “cara”, se suma al valor del gen un valor aleatorio entre el valor del gen y el valor máximo  $U_k$ , y si sale “cruz” se le resta un valor aleatorio entre el valor del gen y el valor mínimo  $L_k$ . Este proceso se repite hasta que  $r \geq P_w$ .

**Mutación de convolución gaussiana:** En este caso, la mutación se realiza mediante la adición de ruido sobre el gen que se desea alterar. El ruido se genera mediante una distribución normal de media cero y una cierta desviación estandar. Dado que se pueden generar valores fuera de los límites del gen, estos deben ser acotados al rango  $[L_k, U_k]$ . Al utilizar una distribución gaussiana, se asegura que los cambios introducidos serán mínimos. Una alternativa, es utilizar la distribución de Cauchy.

**Mutación de Creep real:** Este operador aumenta (o disminuye) aleatoriamente el valor de un gen una pequeña cantidad. El cambio máximo permitido se define por medio de un parámetro definido por el usuario. Existen diferentes variaciones de este operador dependiendo de como se define el cambio máximo permitido (Davis, 1991; Davis, 1989; Kelly y Davis, 1991).

**Mutación de Mühlenbein:** Si un gen  $k$  resulta elegido para ser mutado, su valor se calcula mediante la Ec. (3.16).

$$\{x_1, \dots, x_k \pm \text{rang}_k \gamma_k, \dots, x_n\} \quad (3.16)$$

donde  $\text{rang}_k$  define el rango de mutación, el cual normalmente es obtenido como  $0,1(U_k - L_k)$ . El signo  $+$  ó  $-$  se define mediante una probabilidad de valor 0,5. Existen diferentes variaciones de este operador dependiendo de como se calcule  $\gamma$  (Mühlenbein y Schlierkamp-Voosen, 1993; Voigt y Anheyer, 1994).

### 3.7.4. Operadores de reemplazo.

Fundamentalmente existen dos tipos de algoritmos genéticos dependiendo de cual sea la estrategia de reemplazo adoptada: los *algoritmos genéticos con reemplazo generacional*, también conocidos como *algoritmos genéticos simples* y los *algoritmos genéticos con brecha generacional*. En los primeros, la población de padres es completamente reemplazada por la población de hijos una vez estos han sido engendrados y mutados. En los segundos hay una

proporción de padres, brecha generacional, que sobreviven. Los algoritmos genéticos con reemplazamiento generacional tienen una brecha generacional nula, siendo necesario emplear operadores elitistas para evitar la pérdida de los mejores individuos en la población, mientras que en los algoritmos genéticos con brecha generacional, la misma puede llegar a ser bastante amplia.

A continuación se describen algunos de los operadores de reemplazo utilizados para algoritmos genéticos con brecha generacional.

- Reemplazo de los menos aptos: los hijos engendrados reemplazan a los individuos menos aptos de la población.
- Reemplazo aleatorio: los hijos engendrados reemplazan a los individuos de la población de forma aleatoria.
- Reemplazo del individuo más viejo: los hijos engendrados reemplazan a los individuos más viejos de la población. En este operador es necesario emplear operadores elitistas para evitar la pérdida de los mejores individuos.
- Torneo a muerte: Con este operador se selecciona un conjunto de individuos de la población, donde el menos apto es reemplazado por un hijo.
- Selección conservativa: Este operador realiza un torneo entre el individuo más viejo y otro elegido aleatoriamente de la población. De estos dos, el más apto sobrevive y el menos apto es reemplazado por un hijo. Este operador tiene la ventaja de no reemplazar al más viejo si es el más apto.

### 3.7.5. Otros operadores.

A continuación se detallan una serie de operadores que exploran el espacio de soluciones de una forma más ordenada: actuando de forma exhaustiva en las últimas fases de la búsqueda, en las cuales se determina si el proceso se termina con una solución aceptable o con una solución óptima.

**Operadores de nicho:** Los operadores de nicho se utilizan principalmente en problemas con muchas soluciones posibles para mantener la diversidad genética, de forma que los cromosomas son sustituidos solo por cromosomas similares. Aunque, en algunas ocasiones, los operadores de nicho se consideran más como estrategias para enfocar la selección y la evaluación de la población que operadores genéticos (Horn et al., 1994).

**Elitismo:** El operador elitista tiene como objetivo evitar la eliminación del individuo o conjunto de individuos más aptos de la población. La eliminación del individuo más apto puede provocar una pérdida de información valiosa dificultando así la convergencia.

## 3.8. Ajuste y control de un algoritmo genético

Los operadores genéticos suelen llevar asociados una serie de parámetros (probabilidad de mutación y cruce, tamaño de la población, tamaño del torneo, etc.) que deben ajustarse y cuyo valor influye de forma drástica en la eficiencia y eficacia del GA.

De forma general, se pueden distinguir dos alternativas diferentes para establecer el valor de estos parámetros: el ajuste o el control.

### 3.8.1. Ajuste

El *ajuste* de los parámetros se basa en la experiencia previa con problemas similares, utilizando aquellos valores que han proporcionado buenos resultados. El ajuste se realiza mediante experimentación, probando diferentes valores, y eligiendo aquellos que dan mejores resultados. Aunque esta técnica es sencilla de implementar, tiene una serie de inconvenientes:

- Probar todos las posibles combinaciones de los parámetros es prácticamente imposible.
- Consume mucho tiempo.
- El parámetro seleccionado no tiene porque ser óptimo para el problema tratado.

De Jong (1975) invirtió grandes esfuerzos en determinar un conjunto de valores capaces de proporcionar buenos resultados a un conjunto de funciones test. Sus conclusiones fueron que, los siguientes parámetros proporcionaban soluciones aceptables para el conjunto de problemas contrastados: tamaño de la población (50), probabilidad de cruce (0,6), probabilidad de mutación (0,001) y elitismo. Para otros problemas pueden no proporcionar tan buenos resultados. Desde entonces, le han seguido numerosos trabajos en la determinación de los mejores parámetros (Grefenstette, 1986; Goldberg et al., 1992; Woon et al., 2003). En estos trabajos, se ha comprobado que cada problema requiere de un ajuste particular para que se pueda desarrollar completamente su potencial. Otro inconveniente del ajuste es que los parámetros permanecen constantes durante todo el proceso, estando en contraposición con el espíritu adaptativo propio de un GA. De hecho, se ha demostrado que diferentes valores de parámetros pueden ser los óptimos en diferentes etapas del proceso (Eiben y Smith, 2003).

En la tabla 3.3 se muestran algunos de los valores utilizados por diferentes autores para el tamaño de la población, probabilidad de cruce y mutación, así como el número máximo de generaciones.

### 3.8.2. Control

El *control* se basa en un concepto totalmente diferente. Se comienza con unos valores iniciales y es el propio algoritmo, el cual mediante diferentes mecanismos, se encarga de ir ajustando los parámetros según se suceden las generaciones.

Básicamente, se pueden distinguir dos tipos de mecanismos de control: (1) mediante un mecanismo de realimentación heurístico basado en ciertos estimadores que se calculan cada generación como: la diversidad poblacional, mejora relativa, variación de la aptitud de la solución, etc. (Rechenberg, 1973; Davis, 1989); o (2) mediante la incorporación de los propios

**Tabla 3.3:** Valores asignados por diferentes autores para el ajuste de los parámetros de un algoritmo genético (Victoria, 2006).

Autor/es	$n$	$p_c$	$p_m$	NMG
De Jong (1975)	NM	0,60÷0,80	0,010÷0,020	NM
Grefenstette (1986)	80	0,45	0,010	20
Wang (1991)	100	1,00	0,010	50
Janson y Frenzel (1993)	100	No menciona	0,001	500
Ball, Sargent y Ige (1993)	100	0,30	0,006	180
Koumoussis y Georgiou (1994)	20	0,60	0,010	100
Srinivas y Patnail (1994)	30÷200	0,50÷1,00	0,001÷0,05	NM
Croce, Tadeo y Volta (1995)	300	1,00	0,030	3000
Dorndoft y Pesch (1995)	200	0,65	0,001	300
Tate y Smith (1995)	100	0,25	0,750	2000
Keane (1995)	100	0,80	0,005	10
Suresh, Vinod y Sahu (1996)	40÷60	0,50÷0,70	0,100	NM
Carrol (1996)	100÷200	0,60	0,010÷0,005	20
Carrol (1996)	50	0,50	0,020÷0,040	12
Roston y Sturges (1996)	200	0,50	0,010	150
Furuta, He y Watanabe (1996)	NM	0,25	0,010	NM
Liu, Hammad y Itoh (1997)	50	0,80	0,010	100
Gätzi, Uebersax y König (2000)	25÷125	0,60÷0,90	0,005÷0,05	100
Nankorn y Meesomklin (2001)	40	0,80	0,001	100
Nankorn y Meesomlin (2001)	50	0,85	0,05	100
Annicchiario y Cerrolaza (2002)	100	1,00	0,020	50
Tadeusz y Grzegorz (2003)	70	0,14	0,028	300
Victoria y Marti (2005)	20	0,80	0,003	300

$n$ : tamaño de la población; NMG: número máximo de generaciones; y NM: no menciona

parámetros dentro de la codificación de los cromosomas, haciendo que sea el propio proceso el encargado de controlar sus propios valores. A este último mecanismo también se le denomina autoadaptación, y básicamente existen dos variantes: coevolución (Tuson y Ross, 1996; Bäck, 1996) y micro-algoritmo genético ( $\mu$ -GA) (Bäck, 1995; Lee y Takagi, 1995).

### 3.8.2.1. Tamaño de la población

El tamaño de la población determina cuántos cromosomas (individuos) forma la población en cada generación. Si el tamaño de la población es pequeño, el algoritmo genético tendrá pocas posibilidades de recombinar su información, y explorará solo una pequeña región del espacio de búsqueda. Por el contrario, si el tamaño de la población es excesivamente grande, la velocidad de convergencia del algoritmo genético es lenta, sin que por ello se aporten soluciones mejores.

### 3.8.2.2. Probabilidad de cruce

La probabilidad de cruce ( $p_c$ ) determina con que frecuencia debe ser realizada la recombinación. En el caso de que la probabilidad de cruce sea del 100%, significa que todos los hijos se reconstruyen a partir de la recombinación de los padres. Si la probabilidad de cruce es del 0%, quiere decir que la nueva generación resulta una copia exacta de los padres.

### 3.8.2.3. Probabilidad de mutación

La probabilidad de mutación ( $p_m$ ) establece con que probabilidad, partes del cromosoma serán mutadas. De modo que si la probabilidad de mutación es del 0%, los descendientes son generados directamente después del cruce. En cambio, si la probabilidad de mutación es del 100% todos los genes del cromosoma son mutados.

## 3.9. Función de Aptitud

Para el correcto funcionamiento de un GA es necesario disponer de un mecanismo que indique si los individuos de la población representan buenas soluciones o no. La función de aptitud establece una medida numérica de la bondad de cada solución. Por consiguiente, la función de aptitud aplicada sobre una población de individuos produce como resultado:

- 1- Un rango que cuantifica la calidad de los resultados.
- 2- Una conexión entre el proceso evolutivo y el problema considerado.
- 3- Una medida del coste computacional asociado al algoritmo genético.

Aunque, inicialmente los algoritmos genéticos fueron desarrollados para resolver problemas de optimización no restringidos, lo más habitual es que el problema a optimizar contenga restricciones. En los últimos años se han desarrollado muchas estrategias para incorporar las restricciones a los algoritmos genéticos. En la bibliografía se puede encontrar una gran cantidad de técnicas para introducir restricciones en el problema. Estas se pueden clasificar en cuatro tipos:

- Rechazo: estas estrategias eliminan los individuos no factibles. Sin embargo, los resultados no son del todo satisfactorios si el número de restricciones es elevado.
- Reparación: en estas se reparan los individuos no factibles. Su principal inconveniente es su dependencia con el problema, pudiendo ocurrir que la reparación del problema sea tan compleja como el propio problema en sí.
- Modificación de los operadores genéticos: son aquellas que usan operadores especializados capaces de mantener la factibilidad de las soluciones.
- Penalización: estos métodos incluyen de forma indirecta el efecto de las restricciones, empleando para ello funciones especializadas (de penalización), que modifican el valor de la función de aptitud para forzar que se cumplan las restricciones. La función de penalización es la forma más habitual de manejar las restricciones en los algoritmos genéticos. A continuación, se detalla con más detalle el funcionamiento de los métodos de penalización.

En la Tabla 3.4, se muestran algunas de las funciones de aptitud que han sido utilizadas por diferentes autores.

**Tabla 3.4:** Funciones de aptitud empleadas en algoritmos genéticos para la optimización de forma y topología de estructuras continuas (Victoria, 2006).

Autor/es	Función de aptitud
Annicchiarico y Cerrolaza (1999)	$\text{Peso} + \lambda  \Delta\sigma ^2 + \mu  \Delta V_p ^2 + \pi H_1(g_c, 0) + \xi(g_c, 0)$
Hamda y Schoenauer (2000)	$\text{Peso} + \alpha(D_{max} - D_{min})$
Jakiela, Champan, Duda, Adewuya, y Saitou (2000)	$1/\delta_{max}$
	$1/(\ln(\text{compliance}))$
	$1/(\text{desplazamiento} \cdot \text{área})$
	$1/(\text{desplazamiento} \cdot \text{área} \cdot \text{perímetro agujero})$
	$1/(\text{desplazamiento} \cdot \text{área} \cdot \text{perímetro agujero})$
	$1/(\text{desplazamiento} \cdot \text{área} + (c \cdot \text{área}) / \text{perímetro})$
	$1/(\text{desplazamiento} \cdot \text{área} \cdot (\text{número de agujeros} + 1))$
	$1/(\text{desplazamiento} \cdot \text{área} + (c \cdot \text{área}) / \text{perímetro agujero})$
	$1/(\text{desplazamiento} \cdot \text{área} + (c \cdot \text{área}) / \text{área agujero})$
Woon, Querin y Steven (2001)	$1/(\text{peso} \cdot \text{deflexión media})$
Woon, Querin y Steven (2003)	$L \sum v/p \sum \alpha$
Zheng, Querin, Barton y Brodie (2003)	$1/(\text{peso} \cdot \delta_{max})$
Woon, Tong Querin y Steven (2003)	$1/(\text{compliance} \cdot \text{área})$
	$1/(\text{Std}(\sigma) \cdot \text{área})$
García y Gonzalez (2003)	$w_1 \cdot (V(x_i)/V(x_0)) + w_1 \cdot (\max(d(x_i))/\max(d(x_0)))$
Victoria y Marti (2004)	$1/(A + \beta \sum (pb + pd + pt))$
Sid et al. (2007)	$(1/f(x))/(f_{max}(1 + \sum \max[0 - gi(x)]))$
Chen et al. (2009)	$W^{(k)}/W^{(0)}$

### 3.9.1. Función de penalización

La idea fundamental consiste en transformar el problema característico en otro sin restricciones. Para ello, se añade (o resta) un determinado valor a la función objetivo dependiendo del grado de violación de las restricciones en una determinada solución. De este modo, la nueva función de aptitud  $\Phi'(x)$  se puede expresar como:

$$\Phi'(x) = \Phi(x) + P(x) \tag{3.17}$$

donde  $\Phi(x)$  es la función de aptitud y  $P(x)$  la función de penalización.

Dependiendo del enfoque utilizado, la función de penalización puede ser: *estática*, *dinámica* o *adaptativa*.

#### 3.9.1.1. Penalización estática

En este caso, los factores de penalización son establecidos a priori y mantienen sus valores constantes a lo largo de todo el proceso de optimización. En la bibliografía se distinguen

planteamientos diferentes. De entre ellos, cabe destacar el propuesto por Homaifar et al. (1994) donde se disponen varios niveles de violación, fijando para cada nivel un coeficiente de penalización. Según este criterio, la función de penalización se formula como:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m R_{k,i} \cdot (\max[0, g_i(\mathbf{x})]^2), \quad k = 1, \dots, l \quad (3.18)$$

donde  $R_{k,i}$  son los coeficientes de penalización,  $m$  el número total de restricciones y  $l$  el número de niveles de violación. Este método tiene la ventaja de que trata cada restricción de forma independiente permitiendo una penalización diferente para cada restricción. Sin embargo, tiene el inconveniente de que el número de coeficientes a determinar es excesivamente elevado:  $m(2l+1)$ .

Otro planteamiento es el propuesto por Morales y Quezada (1998), los cuales plantean que la aptitud de un individuo se determina como:

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{si la solución es factible} \\ k - \sum_{i=1}^s \frac{k}{m} & \text{si la solución es no factible} \end{cases} \quad (3.19)$$

donde  $s$  es el número de restricciones satisfechas,  $m$  el número de restricciones,  $k$  una constante de valor grande (normalmente  $k = 10^9$ ). Por lo que, cuando un individuo no es factible, no es necesario evaluar la función de aptitud. Este planteamiento es muy conveniente para aquellos problemas en los cuales la evaluación de la función de aptitud supone un alto coste computacional. Por otro lado, todos los individuos que violen el mismo número de restricciones tienen la misma aptitud, independientemente de su cercanía al espacio de soluciones, lo cual contradice la idea básica de las funciones de penalización.

Hoffmeister y Sprave (1996) plantean la siguiente función de penalización

$$P(\mathbf{x}) = \pm \sqrt{\sum_{i=0}^m H(-g_i(\mathbf{x})) g_i(\mathbf{x})^2} \quad (3.20)$$

donde  $H(\bullet): \mathbf{R} \rightarrow \{0,1\}$  es la función Heaviside:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \leq 0 \\ 1 & \mathbf{x} > 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

El planteamiento de Hoffmeister y Sprave tiene el inconveniente de evaluar siempre las soluciones no factibles peor que las factibles, lo cual no siempre ocurre (Michalewicz, 1995).

### 3.9.1.2. Penalización dinámica

En esta categoría se incluyen estrategias donde los factores de penalización son dependientes de la generación en la que se encuentre el proceso.

Joines y Houck (1994) proponen la siguiente función de penalización

$$P(\mathbf{x}, t) = (Ct)^\alpha \left[ \sum_{i=1}^m D_i^\beta(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n D_j(\mathbf{x}) \right] \quad (3.22)$$

donde  $t$  es la generación;  $C$ ,  $\alpha$ , y  $\beta$  son constantes definidas por el usuario a priori. Joines y Houck recomiendan  $C = 0,5$ ;  $\alpha \in [1,2]$ ; y  $\beta \in [1,2]$ .  $D_i^\beta$  y  $D_j$  se obtienen de la Ec. (3.23).

$$D_i^\beta(\mathbf{x})_{1 \leq i \leq m} = \begin{cases} 0 & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ |g_i(\mathbf{x})| & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$D_j(\mathbf{x})_{1 \leq i \leq n} = \begin{cases} 0 & -\varepsilon \leq h_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon \\ |h_i(\mathbf{x})| & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Kazarlis y Petridis (1998) proponen:

$$P(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{t}{T}\right)^2 \left[ A \sum_{i=1}^m \left( H(g_i(\mathbf{x})) w_i \Phi(d_i(S)) \right) + B \right] \delta_s \quad (3.24)$$

donde  $A$  es el factor de severidad de la penalización,  $H(\bullet)$  es la función Heaviside (Ec. 3.18),  $w_i$  es el factor de ponderación para la restricción  $i$ ,  $d_i(S)$  es una medida del grado de violación de la restricción  $i$  introducida por la solución  $S$ ,  $\Phi(\bullet)$  es una función de penalización que depende del grado de violación  $i$ ,  $\delta_s$  es un factor binario (“1” si  $S$  es no factible y “0” en otro caso),  $t$  es la generación actual y  $T$  es el número total de generaciones.

Este planteamiento ha funcionado bien para los problemas planteados por los autores pero todavía no hay información concluyente sobre sus resultados en otros campos.

### 3.9.1.3. Penalización adaptativa

Aunque esta categoría puede ser incluida dentro de las estrategias dinámicas, presenta un rasgo particular que la distingue claramente. Los factores de penalización son actualizados continuamente en base a la información generada durante el proceso de búsqueda.

Hadj-Alouane y Bean (1997) propusieron la siguiente expresión como función de penalización:

$$P(\mathbf{x}, t) = \lambda(t) \left[ \sum_{i=1}^m g_i^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n |h_j(\mathbf{x})| \right] \quad (3.25)$$

donde  $\lambda(t)$  se actualiza en cada generación  $t$  según:

$$\lambda(t+1) = \begin{cases} (1/\beta_1)\lambda(t) & \text{caso 1} \\ \beta_2\lambda(t) & \text{caso 2} \\ \lambda(t) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.26)$$

donde, el caso 1 ocurre cuando el mejor individuo es factible en las últimas  $k$  generaciones, y el caso 2 cuando el mejor individuo no es factible en las últimas  $k$  generaciones,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes que deben cumplir las siguientes condiciones:  $\beta_2 > 1$ ;  $\beta_1 > \beta_2$ ; y  $\beta_1 \neq \beta_2$ . De este modo la penalización disminuye si los mejores individuos fueron factibles y se incrementa en caso contrario.

Lemonge y Barbosa (2004) proponen un esquema adaptativo, libre de parámetros, en el cual se introduce información como la media de la función objetivo, y el nivel de violación para cada restricción durante la evolución:

$$\Phi'(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Phi(\mathbf{x}) & \text{s i la solución es factible} \\ \bar{\Phi}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m k_i v_i(\mathbf{x}) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.27)$$

donde:

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Phi(\mathbf{x}) & f(\mathbf{x}) > \mu_f(\mathbf{x}) \\ \mu_\Phi(\mathbf{x}) & f(\mathbf{x}) \leq \mu_f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.28)$$

$$k_i = \frac{|\sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i)|}{\sum_{l=1}^m [\sum_{i=1}^n v_l(\mathbf{x}_i)]^2} \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}_i) \quad (3.29)$$

siendo  $\mu_\Phi(\mathbf{x})$  la media de los valores de la función objetivo de la población,  $v_i(\mathbf{x})$  la violación de la  $i$ -ésima restricción por el individuo  $l$ ,  $k_i$  el factor de penalización de la restricción  $i$ , y  $n$  el tamaño de la población.

### 3.10. Criterios de parada

Una vez la solución converge, el algoritmo debe detenerse para que el algoritmo no se repita indefinidamente. Los criterios de detención más habituales son:

- Estabilidad de la aptitud durante  $t$  generaciones. El algoritmo se detiene si la aptitud de uno o varios individuos de la población permanece constante durante  $t$  generaciones.
- Entancamiento durante  $t$  generaciones. El algoritmo se detiene si la aptitud de uno o varios individuos de la población no mejora durante  $t$  generaciones.
- Número máximo de generaciones o tiempo transcurrido máximo. Se utiliza normalmente para evitar que el algoritmo siga funcionando, si no es detenido por alguno de los criterios anteriores.

---

# CAPÍTULO 4:

## OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS

---

En este capítulo se presenta una nueva metodología para la optimización de topología con isolíneas y algoritmos genéticos, donde el algoritmo genético dirige el movimiento de una serie de puntos de control, a partir de los cuales se determinara la isolínea de recorte.

### **4.1. Introducción**

Con objeto de obtener estructuras con geometrías suaves y de fácil interpretación, ha tomado una gran importancia el desarrollo de métodos de optimización de forma y topología de manera integrada.

En algunos de los primeros trabajos, el problema de optimización de forma y topología se resolvía de manera separada (Lin y Chao, 2000). En estos intentos, los diseños obtenidos mediante la optimización de forma tenían una geometría suavizada, pero manteniendo invariable la topología del problema.

Ansola (2000) intercalaba de forma sucesiva etapas de optimización de topología con etapas de optimización de forma, por medio de una serie de iteraciones que se van realizando en cada etapa. Sin embargo, se debe tener en cuenta que pequeñas modificaciones en la forma

o la topología pueden alterar el comportamiento de la estructura con respecto a la etapa anterior. Por lo que es lógico pensar que ambas etapas deben relacionarse del modo más adecuado.

Hsu y Chen (2001) presentaron un proceso integrado para la optimización de topología y forma. En este trabajo, las isolíneas correspondientes a la densidad del material son utilizadas para determinar las cavidades de la estructura.

Cui et al. (2003) propusieron un método denominado XESO (*Extended Evolutionary Structural Optimization*), el cual controla de forma activa la forma y la topología de la estructura mediante el empleo de isolíneas de tensión.

Woon et al. (2003) utilizaron dos algoritmos genéticos para controlar de forma separada la forma y la topología óptima del problema. El algoritmo genético externo (*external-GA*) se utiliza para optimizar la forma, mientras que otro algoritmo (*internal-GA*) tiene como objeto determinar el número, forma y posición de las cavidades internas a partir de las isolíneas de tensión de von Mises del problema.

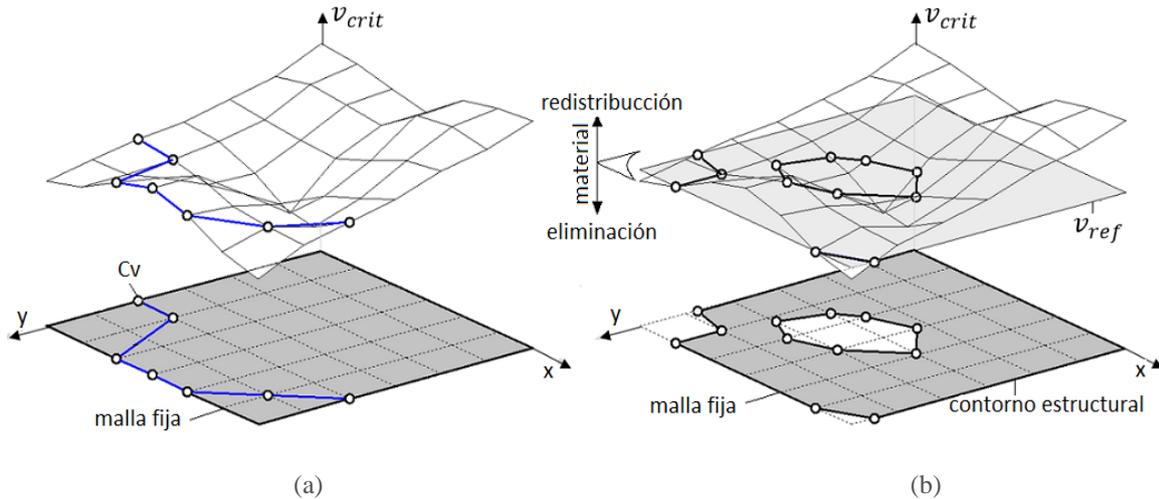
Victoria et al. (2006) proponen un proceso heurístico para la optimización de forma y de topología de forma integrada. El proceso elimina material y lo redistribuye en aquellas zonas en las que el valor del criterio supera la isolínea de un cierto nivel. Abdi et al. (2014) modifican el método utilizando el método de los elementos finitos extendidos en lugar de una malla fija de elementos finitos.

Lee y Man (2007) presentaron una metodología de optimización de topología denominada "*smooth boundary topology optimization*". Para ello utilizan los puntos de control de una curva B-Spline como variables de diseño. La mejora del diseño se realiza modificando los puntos de control usando una optimización de forma o creando nuevas cavidades. En el caso de que una nueva cavidad sea creada, esta se representa mediante una nueva curva B-spline.

En este capítulo se presenta un nuevo procedimiento para la optimización de forma y topología de forma integrada mediante el uso de un GA y el análisis de la estructura mediante una malla fija de elementos finitos. El GA controla el movimiento de una serie de puntos de control que definen el contorno virtual ( $C_v$ ) de la estructura. A partir de este contorno virtual, se extrae las isolíneas para un cierto valor de referencia ( $v_{ref}$ ). Una vez obtenidas las isolíneas, la topología se altera mediante la eliminación y la redistribución de material en aquellas zonas donde el valor del criterio ( $v_{crit}$ ) sea inferior o superior respectivamente al valor de referencia. Para el análisis de la estructura, se utiliza una malla fija de elementos finitos, método descrito en el capítulo 2. Esta técnica permite modificar la topología mediante la transformación de las propiedades mecánicas de sus elementos. En la figura 4.1, se muestra el proceso para la eliminación y/o redistribución de material a partir del contorno virtual.

## 4.2. Codificación para la optimización

Para resolver un problema de optimización usando algoritmos genéticos, se pueden utilizar diferentes codificaciones para obtener una solución óptima. Sin embargo, las soluciones pueden ser muy diferentes. Por ello, uno de los aspectos clave cuando se resuelve un problema con un GA es utilizar una codificación adecuada para el problema.



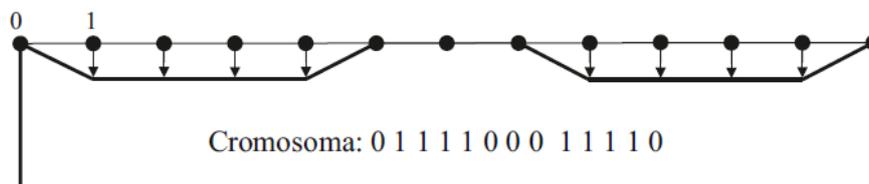
**Figura 4.1:** Proceso para la extracción y/o distribución de material. (a) Definición del contorno virtual. (b) Isolínea para el valor de referencia usada para construir un nuevo contorno estructural.

La cadena de bit (o vectores) binaria es la forma más habitual a la hora de representar usando algoritmos genéticos simples (o canónicos). Sin embargo, en muchos casos la representación utilizada para la optimización de topología emplea una representación basada en una cadena de valores reales. Normalmente, este tipo de representaciones se utilizan en aquellos problemas donde se requiere una relación explícita entre el genotipo y el fenotipo, lo que permite representar directamente el fenotipo, siendo innecesario un proceso de decodificación.

El objetivo principal del GA es dirigir la búsqueda de la topología óptima mediante el movimiento de una serie de puntos de control (PC). Este planteamiento se asemeja a una optimización de topología basada en variación de contorno, pero con la salvedad de que los PC no definen el contorno exterior de la estructura, sino que son utilizados, exclusivamente, para establecer el valor de la isolínea de referencia a partir de la cual se determina el contorno estructural (ver figura 4.1).

A continuación se describen las cuatro codificaciones estudiadas para describir el movimiento de los PC.

**Codificación 1:** Esta codificación se basa en una cadena binaria donde un bit representa el movimiento de un PC. Si el bit tiene un valor igual a “0”, el PC no presenta movimiento. Si el bit tiene un valor igual a “1”, el PC realiza un movimiento. Este movimiento se caracteriza por su magnitud  $\delta$  y la dirección  $\theta$  preestablecida, siendo siempre el sentido de movimiento hacia el interior de la estructura (ver figura 4.2).



**Figura 4.2:** Representación de un cromosoma usando la codificación 1.

**Codificación 2:** Codificación binaria donde se utilizan dos bits por gen para representar el movimiento de cada uno de los PC. Por tanto, la longitud de los individuos será dos veces el número de PC. El primer bit hace referencia a la capacidad de movimiento del PC. De forma que, un valor igual a “0” representa un PC sin movimiento y un valor igual a “1” representa un PC con movimiento. El segundo bit hace referencia al sentido de movimiento. Un valor igual a “1” representa un sentido de movimiento hacia el interior de la estructura, mientras que un valor igual a “0” representa un movimiento hacia el exterior de la estructura, considerando la restricción geométrica que constituye el dominio de diseño inicial.

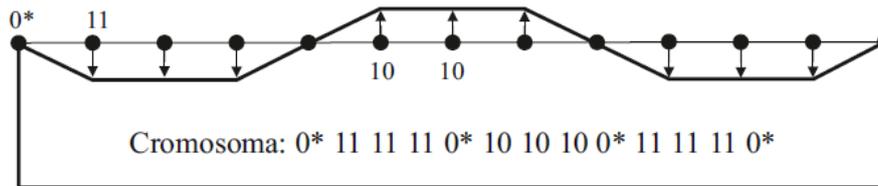


Figura 4.3: Representación de un cromosoma usando la codificación 2.

**Codificación 3:** En esta nueva codificación se consideran 3 bits por gen, un bit más que en la codificación 2. Este nuevo bit controla la magnitud de movimiento, pudiendo presentar dos valores ( $\delta_1, \delta_2$ ). Un valor igual a “1” representa un tamaño de paso  $\delta_1$ , mientras que un valor igual a “0” representa un tamaño de paso  $\delta_2$ . Al igual que en la codificación 2, no se admiten posiciones de los PC fuera del dominio de diseño inicial.

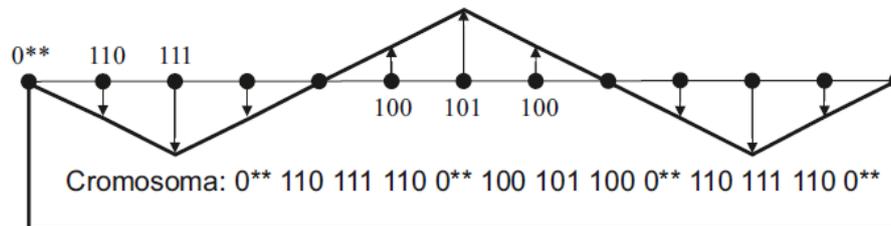
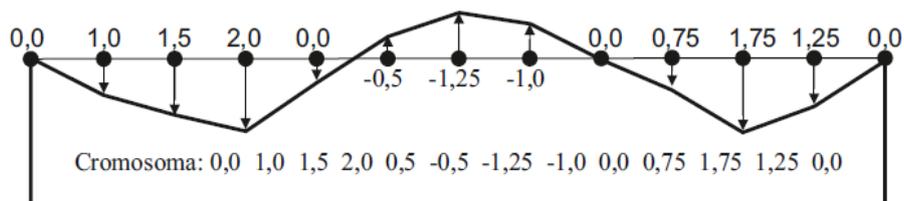


Figura 4.4: Representación de un cromosoma usando la codificación 3.

**Codificación 4:** La cuarta codificación está constituida por una cadena de números reales de modo que cada uno de los bits representa directamente la magnitud de movimiento de cada uno de los PC. El tamaño de paso está limitado por un valor superior e inferior. Un valor positivo indica que el movimiento se debe realizar en sentido interior a la estructura. En caso de ser un valor negativo, el sentido será hacia el exterior de la misma.



### 4.3. Extracción de la topología

Una vez se han establecido las posiciones de los PC, es necesario construir el contorno exterior, y determinar la forma y la posición de las cavidades. Para ello, en primer lugar, se debe determinar el valor de la isolínea de referencia. A continuación, se realizan los cambios en la forma y en la topología de la estructura usando un algoritmo de recorte.

#### 4.3.1. Isolíneas de referencia

Una isolínea es una curva que conecta puntos geométricos cuyos valores para un criterio elegido presentan la misma magnitud. Geométricamente, una isolínea se puede obtener mediante la intersección entre la superficie del criterio y el plano horizontal que define el valor de referencia.

A la hora de definir la topología de un diseño mediante el uso de las isolíneas para la detectar posibles cavidades, se debe considerar dos aspectos clave (Victoria, 2006):

- La generación de isolíneas es un proceso evolutivo, de forma que la generación de un conjunto de cavidades reorganiza la distribución del criterio sobre la cual se determinaron, lo que puede dar lugar a la generación de nuevas cavidades. Resaltar que, algunas de estas isolíneas son cruciales para la evolución de la estructura, mientras que otras influyen desfavorablemente en la optimalidad del diseño.
- La generación continua de isolíneas es un proceso altamente dinámico e interactivo. De este modo, la creación o eliminación de alguna de las isolíneas implica grandes cambios en la distribución del campo y por tanto en la forma y localización de las posteriores isolíneas.

##### 4.3.1.1. Criterio de referencia para la extracción de las isolíneas

Woon (2002) obtiene el valor de referencia  $v_{ref}$  a partir del valor máximo  $v_{max}$  y del valor mínimo  $v_{min}$  y un porcentaje de referencia  $v_{\%,ref}$  de las tensiones de von Mises o de la energía de deformación, Ec. (4.1).

$$v_{ref} = \frac{v_{\%,ref}}{100} (v_{max} - v_{min}) + v_{min} \quad (4.1)$$

donde  $v_{\%,ref}$  se elige en función de la experiencia del usuario o del estudio de la distribución inicial del criterio. Valores habituales para  $v_{\%,ref}$ , caso de estimar la rigidez estructural, alrededor del 1% y del 10% en caso de tensión.

Victoria y Marti (2004) obtienen el valor de referencia de la isolínea, a través del promedio de las tensiones de von Mises  $\sigma_{vm}$  correspondientes a los  $n_n$  nodos incluidos en el diseño, y un coeficiente  $C_m$  que permite modular el resultado final.

$$v_{ref} = \frac{C_m}{100} \frac{1}{n_n} \sum_{i=1}^{n_p} \sigma_{vm,i} \quad (4.2)$$

En Victoria y Marti (2005) se presenta otra expresión para obtener el valor de referencia. Esta expresión depende de un coeficiente definido por el usuario  $RR$ , del número de puntos de

control que definen la forma exterior del contorno de la estructura  $n_p$ , y del valor de la tensión de von Mises  $\sigma_{vm,i}$  en el punto clave  $i$ .

$$v_{ref} = \frac{RR}{100} \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \sigma_{vm,i} \quad (4.3)$$

En Victoria (2006) se presenta una nueva expresión para establecer el valor de la isolínea de referencia.

$$v_{ref} = \sigma_{min} + \alpha \sigma_{med} \quad (4.4)$$

donde  $\sigma_{min}$  y  $\sigma_{med}$  son el valor mínimo y el valor medio respectivamente, obtenidos a partir de los nodos en el interior o sobre el contorno de la estructura y  $\alpha$  es un ratio mayor que cero cuyo valor depende de la variación de volumen entre dos iteraciones consecutivas.

Abdi et al. (2014) establecen el valor para la isolínea de referencia como:

$$v_{ref} = SED_{min} \quad (4.5)$$

donde  $SED_{min}$  es la densidad de energía de deformación mínima.

Tras estudiar las diferentes alternativas encontradas en la bibliografía, el criterio utilizado, en esta tesis, para determinar el valor de referencia  $v_{ref}$  ha sido:

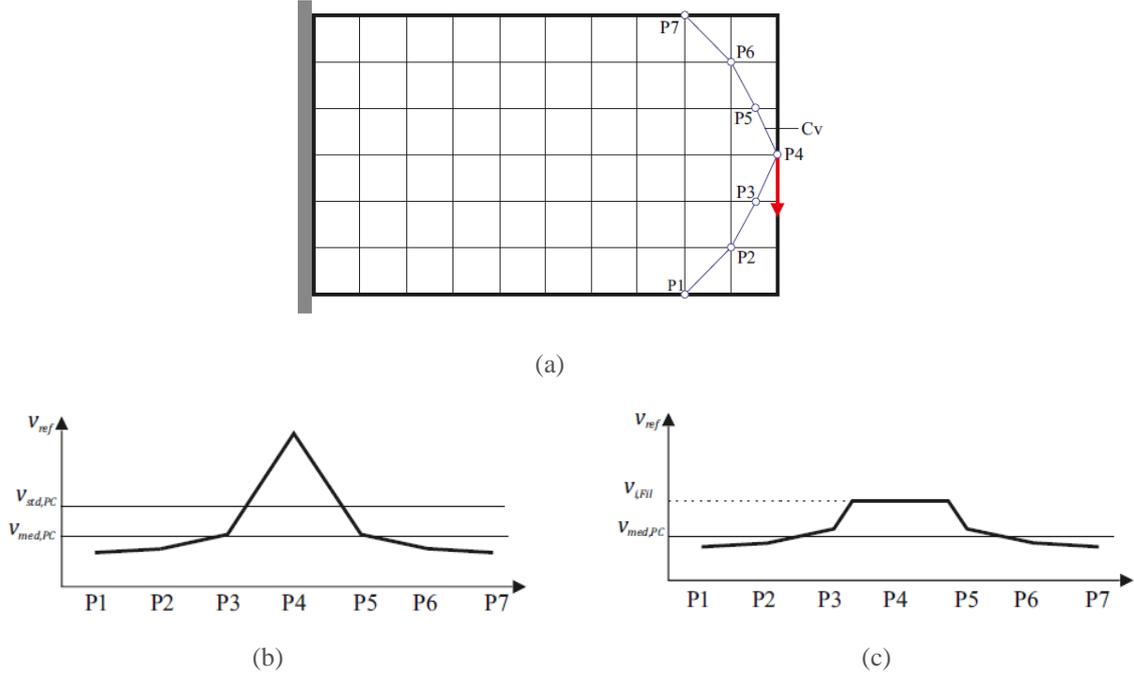
$$v_{ref} = v_{med,PC} = \frac{1}{N_{PC}} \sum_{i=1}^{N_{PC}} v_i \quad (4.6)$$

donde  $v_{med,CV}$  es la media aritmética de los valores (tensiones de von Mises o energía de deformación) de los  $N_{PC}$  puntos de control, donde  $v_i$  son los valores del criterio en dichos PC. Sin embargo, el valor obtenido para extraer la isolínea de referencia usando este criterio puede ser inadecuado si existe una elevada dispersión entre los valores de los PC. Este hecho, ocurre sobre todo, cuando existen cargas concentradas aplicadas sobre el contorno y la optimización está en las primeras iteraciones. Para contrarrestar este inconveniente, se propone el siguiente filtro para reducir los valores extremos:

$$v_i = \begin{cases} v_{i,Fil} = v_{med,PC} + v_{std,PC} & \text{si } v_i > v_{med,PC} + v_{std,PC} \\ v_i & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $v_{i,Fil}$  es el valor del criterio filtrado en el punto de control  $i$ ;  $v_{med,PC}$  es la media aritmética de los valores en los PC; y  $v_{std,PC}$  es la desviación estándar de los valores de los puntos de control (Ec. 4.8). En la figura 4.6, se ilustra gráficamente el funcionamiento del filtro propuesto.

$$v_{std,PC} = \sqrt{\frac{1}{N_{PC}} \sum_{i=1}^{N_{PC}} (v_i - v_{med,PC})^2} \quad (4.8)$$



**Figura 4.6:** Filtrado de valores del criterio. (a) Dominio y posición PC. (b) Valores anteriores a la aplicación del filtro. (c) Valores filtrados.

#### 4.3.1.2. Tipos de isolíneas de referencia

La extracción de las isolíneas se puede realizar usando criterios como: las tensiones de von Mises, la energía de deformación o la densidad de energía de deformación.

Las isolíneas de las tensiones de von Mises pueden determinarse fácilmente sobre un estado bidimensional a partir de la expresión

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (4.9)$$

en un sistema de ejes principales, o mediante

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (4.10)$$

en un sistema de ejes no principales.

Las isolíneas de la energía de deformación o compliance  $C$ , en el caso de un análisis elástico lineal, se pueden determinar a partir de la expresión

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{u}$  son el vector de fuerzas y de desplazamientos.

En el caso de que el dominio se divida con elementos de diferentes tamaños o espesores, debería utilizarse la densidad de energía de deformación (Strain Energy Density, SED) como criterio en lugar de la energía de deformación. Para ello, solo es necesario dividir la energía de deformación entre el volumen.

$$SED = \frac{C}{V} \tag{4.12}$$

### 4.3.2. Recorte

Una vez determinado el valor de la isolínea de referencia del criterio seleccionado, la forma y topología de la estructura se obtiene usando un algoritmo de recorte para el valor de la isolínea de referencia (IR). En esta tesis, se ha utilizado el algoritmo *Marching Triangles* (MT) (Hinton y Illingworth, 1997).

El algoritmo MT se basa en el principio de “divide y vencerás”, resolviendo una serie de sub-problemas sencillos que al combinarse proporcionan la solución del problema global. Para ello, divide los elementos cuadrados en cuatro celdas triangulares mediante la introducción de un nuevo punto en el centroide del elemento  $C_d^{(e)}$ . Dicho centroide se determina mediante la localización del lugar geométrico cuyo valor es el promedio de los valores de los cuatro nodos del elemento original.

En función del valor de referencia de la isolínea y de los valores del criterio en los vértices del triángulo, se presenta uno de los cuatro estados topológicos recogidos en la figura 4.7. Un vértice se etiqueta con un valor igual a “1” si el valor del criterio en el vértice es mayor que el valor para la IR, mientras que un vértice se etiqueta con un valor de “0” si el valor en el vértice es menor que el valor para la IR. Si todos los vértices son etiquetados con un valor igual “1” ó “0”, la IR no intersecta al triángulo (figuras. 4.7a y 4.7d). Por el contrario, si se tienen etiquetas con diferentes valores, la IR intersecta al triángulo (figuras. 4.7b y 4.7c). La intersección entre el triángulo y la IR se determina mediante interpolación (p.ej.: lineal) de aquellas aristas que presentan diferentes etiquetas en sus extremos.

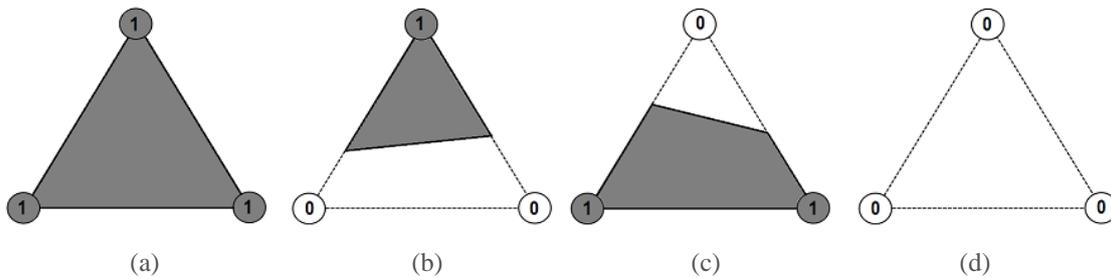


Figura 4.7: Estados topológicos de recorte posibles.

Tras aplicar el algoritmo de recorte, los elementos son clasificados como interiores (In, I), exteriores (Out, O) o de borde (Boundary, B). Un elemento se clasifica como interior si todos los nodos del elemento son etiquetados con “1”. Un elemento es exterior si todos los nodos son etiquetados con “0” y de borde si tiene nodos con ambos tipos de etiquetas.

Como se describió en el capítulo 2, los elementos clasificados como I ó O obtienen directamente sus valores de ratio de área normalizados  $\zeta = 1$  y  $\zeta = 0$ , respectivamente. En el caso de un elemento de B,  $\zeta$  adopta un valor comprendido entre  $0 < \zeta < 1$ .

Para determinar el ratio de área normalizado de los elementos de B, se recurre al algoritmo de recorte para determinar la región del elemento que es interior. En la figura 4.8, se muestra

un ejemplo, en donde el área de la región interior del elemento  $A_I^{(e)}$  se obtiene a partir de la Ec. (4.13)

$$A_I^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_C} A_I^{(C_i)} = A_I^{(C_1)} + A_I^{(C_2)} + A_I^{(C_3)} + A_I^{(C_4)} \quad (4.13)$$

donde  $A_I^{(C_i)}$  es el área interior de cada uno de los triángulos en los que se ha dividido el elemento. Por tanto, el ratio de área normalizado de los elementos de borde se obtiene como el cociente entre el área recortada  $A_I^{(e)}$  y el área total del elemento  $A^{(e)}$ .

$$\xi = \frac{A_I^{(e)}}{A^{(e)}} = \frac{A_I^{(C_1)} + A_I^{(C_2)} + A_I^{(C_3)} + A_I^{(C_4)}}{a \times b} \quad (4.14)$$

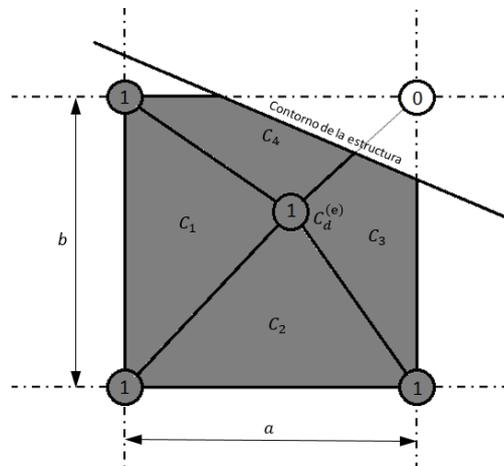


Figura 4.8: Área interior encerrada por la isolínea de referencia en el caso de un elemento de borde.

#### 4.4. Análisis con malla fija

El método de elementos finitos usando una malla fija (Fixed Grid-Finite Element Method FG-FEM) conlleva las siguientes ventajas con respecto al análisis de elementos finitos tradicional: (1) la disociación entre la malla de elementos finitos y el contorno estructural (García et al., 1999); (2) no es necesario regenerar la malla durante la optimización, por lo que el tiempo computacional es significativamente reducido (García y Steven, 2000); y (3) no genera soluciones con formas que recuerdan a un tablero de ajedrez (Maan et al., 2007).

El método FG-FEM es capaz de adaptarse a los nuevos contornos y a la formación de nuevas cavidades mediante la modificación de las propiedades mecánicas de los elementos finitos de la malla fija.

Para obtener la respuesta estructural el análisis se realiza utilizando el programa ANSYS MECHANICAL APDL v16.1. Cabe pensar que un programa de análisis integrado en el propio programa utilizado para llevar a cabo la optimización (Matlab R2014a) podría ser más rápido, pero no es el caso. Además, aunque existen librerías de elementos finitos para Matlab, estas no son tan extensas y eficaces como el programa utilizado. No obstante, apuntar que el algoritmo

desarrollado es independiente del programa de análisis utilizado, por lo que resulta sencillo incorporar otros programas mediante un simple reajuste en las variables de entrada y salida.

## 4.5. Función de aptitud

Otro de los aspectos cruciales en un GA es la correcta elaboración de una función de aptitud ( $F_{apt}$ ), ya que esta determina el espacio de soluciones en el cual el GA busca el óptimo del problema. A continuación, se describen las funciones de aptitud estudiadas.

### 4.5.1. Función de aptitud basada en la compliance estructural

Maximizar la rigidez es uno de los criterios clave a la hora de obtener estructuras óptimas y es equivalente a minimizar la inversa de la compliance. La compliance de una estructura se relaciona con la energía de deformación que se encuentra acumulada en el interior de un sólido. Por tanto, un problema de minimización de la compliance es equivalente a un problema de optimización donde se minimiza la energía de deformación para un volumen dado.

La función de aptitud basada en criterios de rigidez es la propuesta por Woon (2002) o Victoria (2006), la cual minimiza la inversa del producto de la compliance estructural  $C$  por el volumen  $V$ :

$$F = \frac{1}{C V} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_n} C_i A^{(e)} t \sum_{j=1}^{n_e} \xi_j} \quad (4.15)$$

donde  $C_i$  es la compliance en un nodo  $i$ ,  $A^{(e)}$  es el área del elemento,  $t$  el espesor del elemento,  $\xi_j$  el ratio de área normalizado del elemento  $j$ , y  $n_n$  y  $n_e$  el número de nodos y de elementos respectivamente.

### 4.5.2. Función de aptitud basada en la tensión

El concepto de un diseño totalmente tensionado (*Fully Stressed Design*, FSD) es uno de los criterios de optimalidad más utilizados en el ámbito de la ingeniería.

En esta tesis se utiliza la función de aptitud propuesta por Woon (2002) o Victoria (2006), para optimizar la uniformidad del nivel de tensión, como

$$F = \frac{1}{S_\sigma V} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{N_{PC}} \sum_{i=1}^{N_{PC}} (\sigma_i - \sigma_{med})^2 A^{(e)} t \sum_{j=1}^{n_e} \xi_j}} \quad (4.16)$$

donde  $S_\sigma$  es la desviación estándar asociada a las tensiones de von Mises en los PC, con la diferencia de que, en este trabajo se considera sobre el  $C_v$  y no sobre el contorno real.

## 4.6. Características del algoritmo genético implementado

A continuación se detallan las características y los operadores utilizados en el GA:

- Inicialización: en todos los casos es de tipo uniforme, para cada uno de los bits que componen el cromosoma se genera un número aleatorio comprendido entre el valor superior

e inferior que puede tomar el bit. El número generado pertenece al dominio binario o real dependiendo del tipo de codificación.

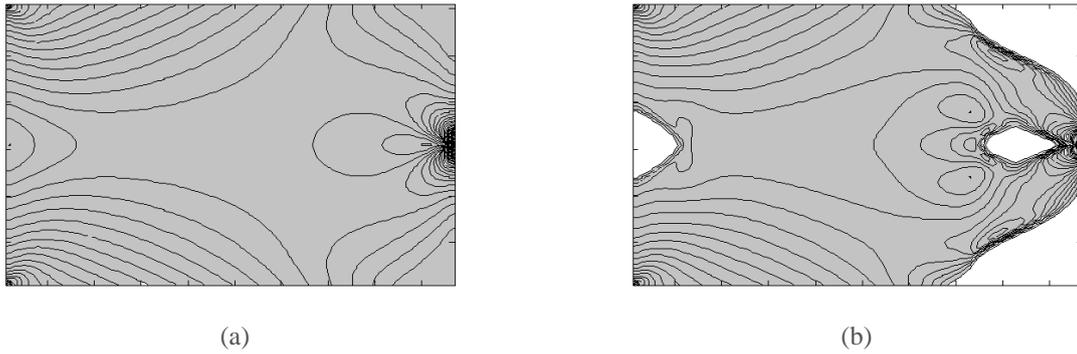
- Selección: se han implementado tres operadores diferentes: (1) muestreo universal estocástico, (2) muestreo por ruleta, y (3) selección por torneo.
- Cruce: Para representaciones binarias: (1) cruce por un punto simple, (2) cruce por múltiples puntos, y (3) cruce uniforme. Para representaciones reales, los operadores de cruce posibles son: (1) cruce aritmético simple, (2) cruce aritmético completo, (3) cruce lineal extendido, (4) cruce intermedio extendido, y (5) cruce binario simulado.
- Mutación: Para representaciones binarias: (1) mutación por bit, o (2) mutación de intercambio. Para representaciones reales, los operadores son: (1) mutación uniforme, o (2) mutación no-uniforme.
- Micro-algoritmo genético ( $\mu$ -GA): Es el término usado para referirse a aquellos algoritmos genéticos que usan pequeñas poblaciones con reinicialización. Debido al uso de pequeñas poblaciones, la convergencia del método puede ocurrir de forma prematura, por lo que es necesario una reinicialización de la población para mantener la diversidad en la misma. El método se considera que converge cuando el número de individuos con el mismo alelo para un determinado bit es superior al 80% del tamaño de la población. Una vez detectada la convergencia del método, se origina una nueva población aleatoria donde el cromosoma con la mejor aptitud de la población anterior se incorpora a la nueva población.
- Elitismo: Debido al uso de poblaciones de pequeño tamaño, los individuos mejor adaptados pueden desaparecer de la población, provocando una pérdida de información, lo que dificulta su convergencia. Por ello, el individuo mejor adaptado de la generación anterior se copia directamente a la generación actual.

#### 4.7. Proceso de estabilización.

Cuando se define la nueva topología a partir de una isolínea, la distribución del criterio a partir de la cual se generó puede verse modificada. Por lo que, antes de continuar con una nueva generación, se lleva a cabo un proceso de estabilización si el cambio de volumen entre la iteración anterior y la actual es mayor a un volumen de cambio máximo permitido  $\Delta V\%$  (Ec. 4.17). Valores típicos de  $\Delta V\% = 1 \div 2\%$ .

$$\Delta V\% = \left( \frac{V_i}{V_{i-1}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (4.17)$$

En la figura 4.9, se muestra como se readapta el valor de las tensiones de von Mises después de modificar la topología al realizar un recorte a partir de las isolíneas de tensión de valor 15 MPa.

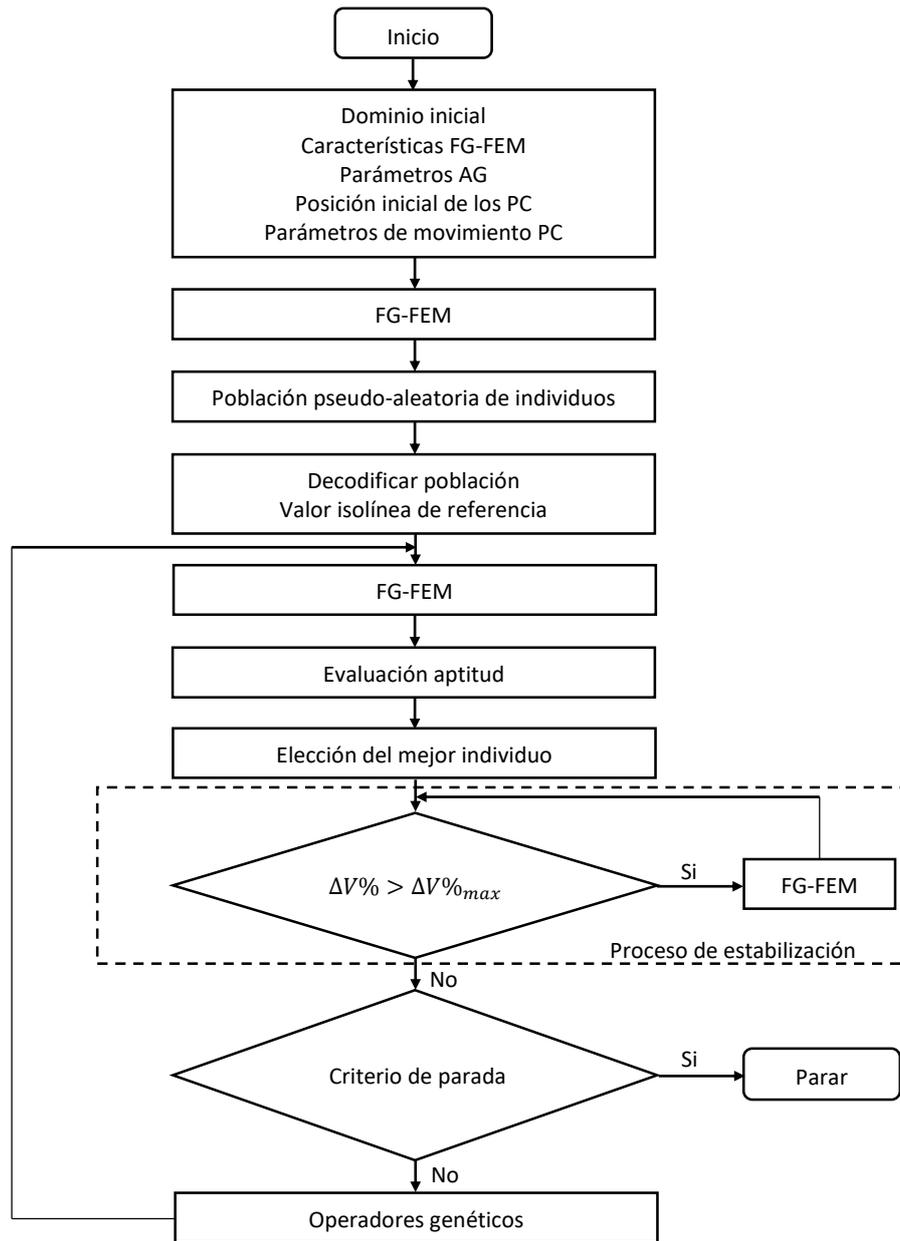


**Figura 4.9:** Alteración de la distribución de tensiones de von Mises. (a) Dominio inicial. (b) Dominio recortado para un valor de tensión de 15MPa.

## 4.8. Metodología para la optimización de topología con malla fija y algoritmos genéticos

En el diagrama de flujo representado en la figura 4.10, se muestra de forma esquemática el proceso de optimización de topología mediante el uso de un GA y el análisis con una malla fija de elementos finitos. A continuación, se describen los principales pasos del algoritmo planteado:

1. Definir las características del dominio inicial de la estructura: longitud, altura, espesor, regiones optimizables, regiones no optimizables, etc.
2. Definir los parámetros del GA:  $\mu$ -GA, codificación, tamaño de la población, tipo de selección, tipo de cruce, tipo de mutación, probabilidad de cruce y mutación, elitismo, función de aptitud, y número máximo de generaciones.
3. Establecer los parámetros de la malla fija: número de elementos en ambas direcciones, módulo de Young para material real y virtual, coeficiente de Poisson, tipo de elementos, orden de integración, condiciones de carga, condiciones de diseño, etc.
4. Situar los PC que define el  $C_v$ .
5. Establecer los parámetros de movimiento (dirección, sentido, y magnitud de movimiento de los PC, en función de la codificación utilizada).
6. Analizar la respuesta estructural.
7. Generar una población pseudo-aleatoria de  $N_P$  individuos.
8. Descodificar cada uno de los cromosomas, obteniendo el nuevo  $C_v$  para cada uno de los individuos.
9. Determinar el valor de la IR para cada uno de los individuos.
10. Analizar la respuesta estructural para cada uno de los individuos. En el caso de que un elemento se encuentre intersectado por la IR, utilizar el algoritmo de recorte para determinar la parte proporcional del elemento que se encuentra en el interior de la estructura.



**Figura 4.10:** Diagrama de flujo para la optimización de topología con isolíneas, malla fija y algoritmos genéticos.

11. Evaluar la función de aptitud para cada uno de los individuos.
12. Identificar el individuo con mejor aptitud.
13. Si el cambio de volumen es mayor al volumen de cambio máximo permitido, ir a al paso 14. En caso contrario, ir al paso 15.
14. Analizar la respuesta estructural para el mismo valor IR del individuo mejor adaptado. Obtener la nueva topología y continuar en el paso 13.
15. Comprobar si se ha alcanzado el número máximo de iteraciones o la fracción de volumen mínima. Si se cumple alguno de los dos criterios ir al paso 17. En caso contrario, ir al paso 16.

16. Aplicar los operadores genéticos: selección, cruce, mutación, elitismo y  $\mu$ -GA. Aumentar el número de generación en uno y volver al paso 8.
17. Detener el proceso de optimización.

En los apartados siguientes se describe el plan de trabajo llevado a cabo para seleccionar y configurar los parámetros del GA de modo que se obtengan los mejores resultados. Uno de los aspectos clave cuando se resuelve un problema de optimización mediante GA es utilizar una codificación adecuada para el problema, por ello, en el apartado 4.9 se estudia y selecciona la mejor codificación entre las cuatro descritas anteriormente a través de la optimización de tres ejemplos tipo. A continuación, en el apartado 4.10, se optimiza de nuevo uno de los ejemplos utilizando una curva B-spline para definir el contorno virtual en vez de una curva poligonal. Las curvas B-spline permiten describir curvas de una elevada precisión con un menor número de puntos de control. Por ello, en este apartado primero se estudia el efecto del número de puntos de control para definir la curva B-spline y a continuación se hace un estudio paramétrico del tamaño de la población, ya que el tamaño de la población está relacionado implícitamente con tamaño del cromosoma. Por tanto, una reducción en el número de puntos de control supone una reducción: del tamaño de la población y por ende del número de análisis por iteración y del tiempo computacional. En el apartado 4.11 se optimizan y comparan los resultados obtenidos mediante el uso de diferentes tipos de funciones de aptitud. Finalmente, en el apartado 4.12, se hace un estudio paramétrico para un ajuste fino de los parámetros del GA (probabilidad de cruce, tipo de operador de selección, tipo de operador de cruce y convergencia del  $\mu$ -GA) ya que estos afectan a los procesos de exploración y explotación, pudiendo conducir a convergencias lentas o prematuras.

## 4.9. Influencia de la codificación

En este apartado se pretende estudiar el efecto de la codificación sobre la topología óptima. Para ello, se han optimizado tres ejemplos: el voladizo corto de Michell, la viga biapoyada de Michell y la viga de Messerschmidt-Bölkow-Blohm (MBB), utilizando las codificaciones 1, 2, 3 y 4 descritas en el apartado 4.2.

En todos los ejemplos, el elemento finito utilizado es el elemento plano rectangular para tensión plana de cuatro nodos, utilizando cuatro puntos de Gauss para su integración numérica. El criterio seleccionado es la isolínea de energía de deformación (Ec. 4.11) y la función de aptitud utilizada está basada en la compliance (Ec. 4.15).

Los valores de los parámetros que definen las dimensiones del dominio de diseño (longitud, altura y espesor), y el análisis de elementos finitos con malla fija (número de elementos en dirección longitudinal y transversal, módulo de elasticidad real, relación entre módulo de elasticidad real y virtual, coeficiente de Poisson, el volumen de cambio máximo permitido y la fracción de volumen) usados se muestran en la tabla 4.1.

Los parámetros que gobiernan el algoritmo genético (tamaño de la población, operadores selección, cruce y mutación, probabilidad de cruce y mutación, longitud del cromosoma, función de aptitud, elitismo y convergencia  $\mu$ -GA) se encuentran recogidos en la tabla 4.2 en función del tipo de codificación, y los cuales son los mismos para todos los ejemplos

**Tabla 4.1:** Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, y el análisis de elementos finitos con malla fija.

Ejemplo	$L$ (mm)	$h$ (mm)	$e$ (mm)	Malla	$E$ (MPa)	$E/E_0$	$\nu$	$\Delta V\%$	$V/V_0$
Voladizo de Michell	16	10	1	96x60	$210 \cdot 10^5$	$10^4$	0,3	1	0,20
Viga de Michell	200	80	1	110x44	$210 \cdot 10^3$	$10^4$	0,3	1	0,20
Viga MBB	900	150	1	180x30	$210 \cdot 10^3$	$10^4$	0,3	1	0,25

**Tabla 4.2:** Parámetros del algoritmo genético.

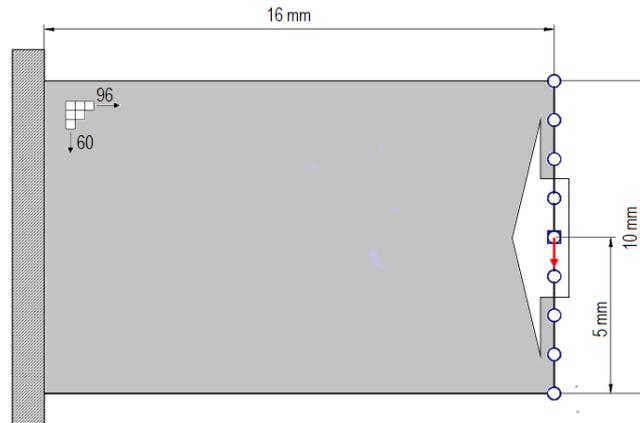
Ejemplo	Cod. 1	Cod. 2	Cod. 3	Cod. 4
Número de individuos, $N_p$	20	20	20	20
Operador selección	ST	ST	ST	ST
Operador de cruce	CU	CU	CU	RAC
Operador de mutación	MB	MB	MB	MU
Probabilidad cruce $p_c$	0,8	0,8	0,8	0,8
Probabilidad de mutación $p_m$	0,1	0,1	0,1	0,1
Longitud cromosoma	20	40	60	20
Elitismo	1	1	1	1
$\mu$ -GA	80%	80%	80%	80%

ST = Selección por torneo; CU = Cruce uniforme; RAC = Recombinación aritmética completa; MB = Mutación por bit; MU = Mutación uniforme

#### 4.9.1. Voladizo corto de Michell con carga centrada en el borde libre

El primer ejemplo optimizado es el voladizo corto de Michell. Este voladizo está sometido a una fuerza vertical de 1000 N en el centro del extremo libre. Las dimensiones del dominio de diseño son de 16 mm de longitud, 10 mm de altura y 1 mm de espesor. Para realizar el análisis se ha utilizado una malla fija de 96x60 (5760) elementos. En todos los casos, se ha considerado la estructura completa sin tratar la simetría estructural.

Sobre el extremo libre del voladizo se han dispuesto un total de 9 puntos de control uniformemente distribuidos. Los puntos de control se mueven en dirección perpendicular al contorno inicial salvo el punto de control situado sobre la fuerza que se considera como punto de no diseño. El tamaño de paso para la codificación 1 y 2 es de  $\delta = 0,15$  mm. Para la codificación 3, los tamaños de paso considerados son  $\delta_{min} = 0,15$  mm y  $\delta_{max} = 0,3$  mm. Para la codificación 4, los puntos de control pueden presentar movimientos dentro del intervalo comprendido entre -0,5 y 0,5 mm.



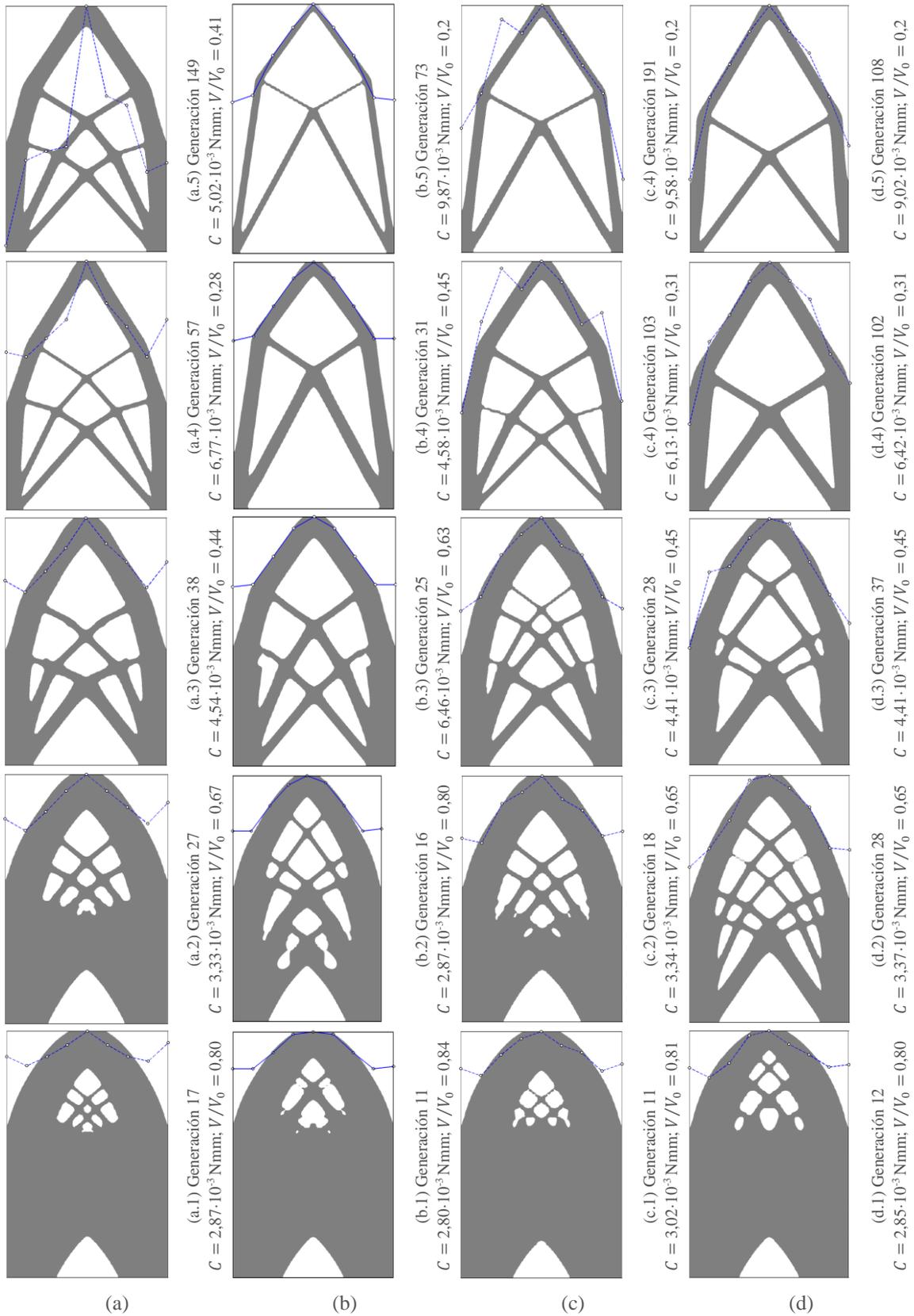
**Figura 4.11:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Dominio de diseño.

En la figura 4.12, se muestran algunas de las topologías que han ido surgiendo durante el proceso de optimización para las codificaciones 1, 2, 3, y 4. En el caso de la codificación 1, no se consigue alcanzar la fracción de volumen deseada, sin embargo la menor fracción de volumen se obtiene en la generación 57, con un valor para la compliance de  $C = 6,77 \cdot 10^{-3} \text{ Nmm}$  y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,28$ . Para la codificación 2, el óptimo se obtiene en la generación 73, con un valor para la compliance de  $C = 9,87 \cdot 10^{-3} \text{ Nmm}$  y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,20$ . Para la codificación 3, el óptimo se obtiene en la generación 191, con un valor para la compliance de  $C = 9,58 \cdot 10^{-3} \text{ Nmm}$  y fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,20$ . Y usando la codificación 4, el óptimo se obtiene en la generación 108, con un valor para la compliance de  $C = 9,02 \cdot 10^{-2} \text{ Nmm}$  y fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,2$ .

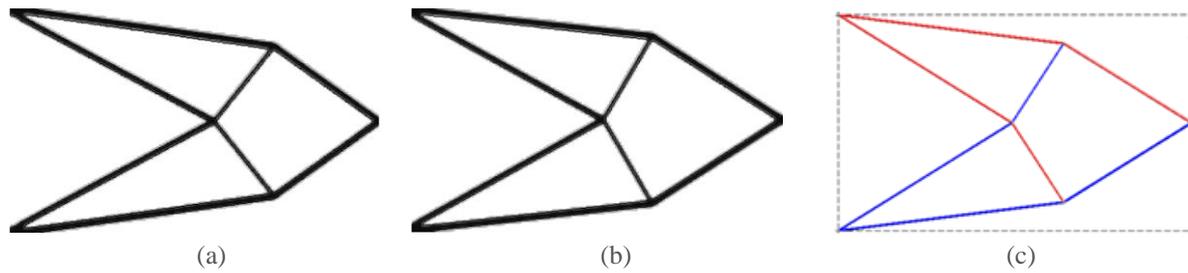
Como se puede apreciar, los diseños óptimos para las codificaciones 2, 3 y 4 (soluciones con la misma fracción de volumen) presentan la misma topología pero con diferentes geometrías. Estas diferencias en la geometría se pueden encontrar en la literatura (figura 4.13a y b). Si se compara dichas topologías con la solución óptima utilizando elementos de barras obtenida con el programa TTO (Truss Topology Optimization) (figura 4.13c) se aprecia como la topología obtenida mediante la codificación 3 se ajusta de forma más precisa al diseño óptimo de barras articuladas. Sin embargo, la topología obtenida con la codificación 4 es la más rígida.

También, se puede apreciar como el  $C_v$  se va adaptando al contorno exterior de la estructura, definido por las isolíneas, conforme aumenta el número de generaciones, sin ser necesario que se adapte de forma completa para alcanzar la fracción de volumen deseada. Además, aunque los puntos de control no se muevan simétricamente, la topología obtenida en todo momento es siempre simétrica, ya que el contorno exterior de la estructura depende del valor de la isolínea de referencia y no del contorno virtual.

En la tabla 4.3, se muestran los valores correspondientes a las tensiones de von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la compliance, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo acumulado en distintas generaciones para las cuatro codificaciones.



**Figura 4.12:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Codificación 1. (b) Codificación 2. (c) Codificación 3. (d) Codificación 4.

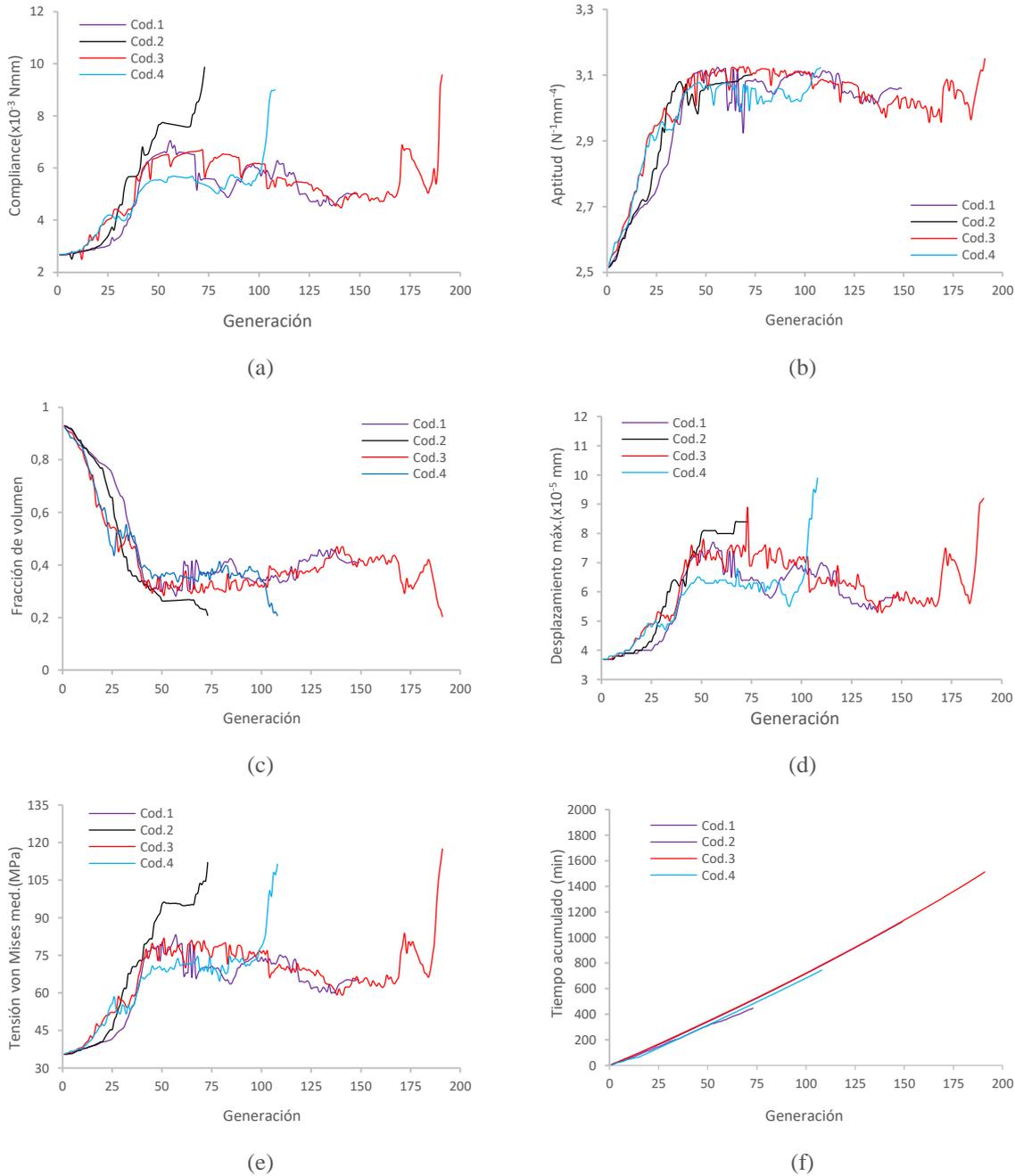


**Figura 4.13:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-i. (Victoria, 2006). (c) Diseño óptimo para 6 nudos mediante TTO (Castejón, 2003).

**Tabla 4.3:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Resultados para diferentes generaciones y codificaciones.

Cod	g	$\sigma_{VM}^{max}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{med}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{min}$ (MPa)	$D_{max}$ (mm)	Compliance (N·mm)	$\frac{V}{V_0}$	Aptitud (N <sup>-1</sup> mm <sup>-4</sup> )	Tiempo (s)
Codificación 1	17	173,53	39,10	4,81	3,9E-05	2,87E-03	0,80	2,69	109,40
	27	173,77	43,59	7,14	4,2E-05	3,33E-03	0,69	2,79	175,99
	38	213,73	61,41	12,27	5,4E-05	4,54E-03	0,45	3,00	253,08
	57	297,49	83,18	20,95	7,5E-05	6,77E-03	0,28	3,14	391,98
	149	237,78	65,03	14,69	5,8E-05	5,02E-03	0,41	3,05	1123,52
Codificación 2	11	173,45	37,91	5,41	3,9E-05	2,80E-03	0,84	2,64	64,57
	16	173,53	39,14	5,93	3,9E-05	2,87E-03	0,80	2,69	90,78
	25	173,82	44,27	6,55	4,2E-05	6,46E-03	0,63	2,80	135,06
	31	215,77	61,87	10,69	5,5E-05	4,58E-03	0,45	3,01	187,81
	73	335,14	112,08	28,62	8,8E-05	9,07E-03	0,20	3,10	446,75
Codificación 3	11	173,54	39,28	6,74	3,9E-05	2,84E-03	0,80	2,67	70,67
	18	173,97	46,69	4,15	4,4E-05	3,34E-03	0,63	2,79	118,20
	28	216,20	58,50	9,44	5,3E-05	4,41E-03	0,45	2,97	188,59
	103	289,55	76,72	9,25	7,2E-05	6,13E-03	0,31	3,09	744,24
	191	370,56	117,56	8,58	9,2E-05	9,58E-03	0,20	3,15	1512,27
Codificación 4	12	173,47	39,26	5,72	4,0E-05	2,85E-03	0,8	2,68	53,86
	28	196,28	52,36	9,37	4,9E-05	4,10E-03	0,51	2,97	156,10
	37	207,41	58,98	11,99	5,3E-05	4,41E-03	0,46	3,01	220,15
	102	270,44	83,58	19,43	6,8E-05	6,45E-03	0,31	3,06	697,35
	108	344,69	111,40	28,00	9,5E-05	9,02E-03	0,20	3,12	744,77

En la figura 4.14, se muestra la evolución de la compliance, la aptitud, la fracción de volumen, los desplazamientos máximos, las tensiones de von Mises media y el tiempo acumulado para las cuatro codificaciones. En la figura 4.14a, se puede apreciar como las topologías óptimas obtenidas con las codificaciones 2 y 3 son menos rígidas (9,42%; 6,20% respectivamente) que la obtenida con la codificación 4.



**Figura 4.14:** Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la aptitud. (c) Evolución de la fracción de volumen. (d) Evolución del desplazamiento máximo. (e) Evolución de la tensión de von Mises media. (f) Evolución del coste computacional.

En la figura 4.14c, se aprecia como la fracción de volumen para las codificaciones 2, 3 y 4 son iguales a la fracción de volumen establecida ( $V/V_0 = 0,20$ ). Sin embargo, el uso de la codificación 1 no permite alcanzar la fracción de volumen deseada. Ello se debe a que al fijar un único sentido de movimiento para los puntos de control, estos no pueden corregir su posición una vez alcanzado el contorno exterior.

En la figura 4.14d, se aprecia que los diseños óptimos finales con la codificación 3, y 4, presentan desplazamientos máximos mayores (4,54% y 7,95% respectivamente) que los

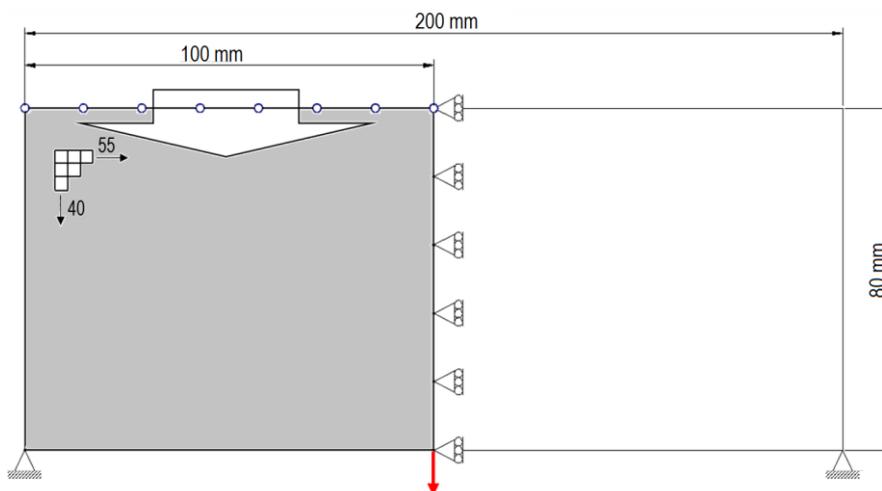
obtenidos con la codificación 2. Sin embargo, los diseños óptimos finales obtenidos con las codificaciones 2 y 3, presentan tensiones de von Mises medias mayores (0,6% y 5,40% respectivamente) que la obtenida usando la codificación 4 (figura 4.14e).

En la figura 4.14f se muestra la evolución del tiempo computacional con respecto al número de generación. Como se puede apreciar, la codificación 3 es la que mayor tiempo computacional necesita para lograr el diseño óptimo final, debido a que realiza un mayor número de generaciones. Cabría pensar que el tiempo computacional para obtener el diseño óptimo final usando la codificación 3 debería ser menor al de la codificación 2, ya que en la codificación 3, los puntos de control se pueden mover el doble de distancia. Pero no es así, ya que al utilizar un algoritmo genético para dirigir la búsqueda, el número de generaciones necesario puede variar significativamente, ya que la secuencia (PC que se han movido por iteración) para obtener el óptimo puede cambiar en caso de repetirse la optimización. Además, se puede apreciar como la tendencia de las curvas es prácticamente lineal. Los cambios en la pendiente de estas curvas son debidos a los análisis realizados en el proceso de estabilización.

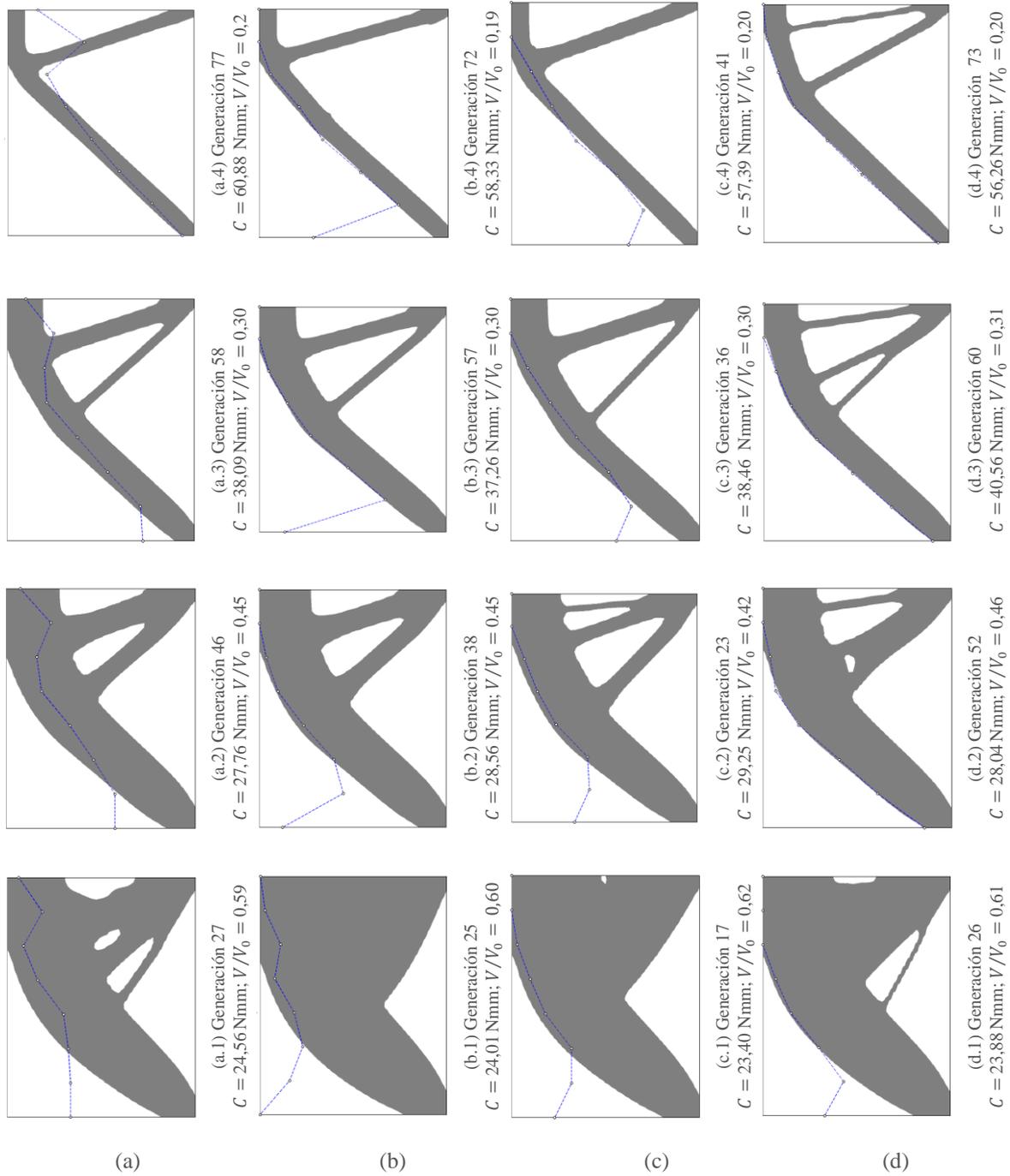
#### 4.9.2. Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en el borde inferior

El segundo ejemplo optimizado es una viga con apoyos fijos en las esquinas inferiores y sujeto a una carga vertical de 1 kN centrada en el borde inferior. Debido a las condiciones de simetría estructural, se considera un dominio de diseño de 100 mm de longitud, 80 mm de altura y 1mm de espesor. El dominio de diseño se ha dividido en 2420 elementos, 55 en la dirección longitudinal y 44 en la transversal (ver figura 4.15).

Sobre el borde superior se han dispuesto un total de 8 puntos de control uniformemente espaciados, los cuales se moverán en todo momento de forma perpendicular al contorno inicial. El tamaño de paso para las codificaciones 1 y 2 es de  $\delta = 0,8$  mm. Para la codificación 3, los tamaños de paso son  $\delta_{min} = 0,8$  mm y  $\delta_{max} = 1,6$  mm. Para la codificación 4, los puntos de control pueden moverse dentro del intervalo -2 a +2 mm.



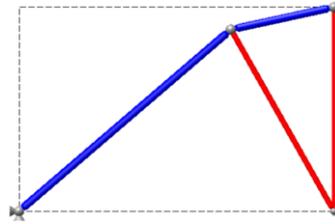
**Figura 4.15:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Dominio de diseño.



**Figura 4.16:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Codificación 1. (b) Codificación 2. (c) Codificación 3. (d) Codificación 4.

En la figura 4.16, se muestran las topologías más interesantes, para las cuatro codificaciones, que han ido surgiendo durante el proceso de optimización. Los diseños óptimos se obtienen en las generaciones 77, 72, 41, y 73 con valores para la compliance de  $C = 65,28$  Nmm;  $58,83$  Nmm;  $57,39$  Nmm; y  $56,26$  Nmm y fracciones de volumen de  $V/V_0 = 0,20$ ;  $0,19$ ;  $0,20$ ; y  $0,20$  para las codificaciones 1, 2, 3, y 4, respectivamente. En la figura 4.16, se pueden

distinguir dos tipos de topologías óptimas, una obtenida con las codificaciones 1, 2 y 3; y otra con la codificación 4. Si se comparan dichas topologías con la solución óptima utilizando elementos barras (Castejón, 2003) obtenida con el programa TTO (ver figura 4.17), se aprecia como la topología obtenida mediante la codificación 4 presenta una geometría que se ajusta de forma más precisa al diseño óptimo de barras. Además, esta cuenta con una energía de deformación menor y por tanto una mayor rigidez.



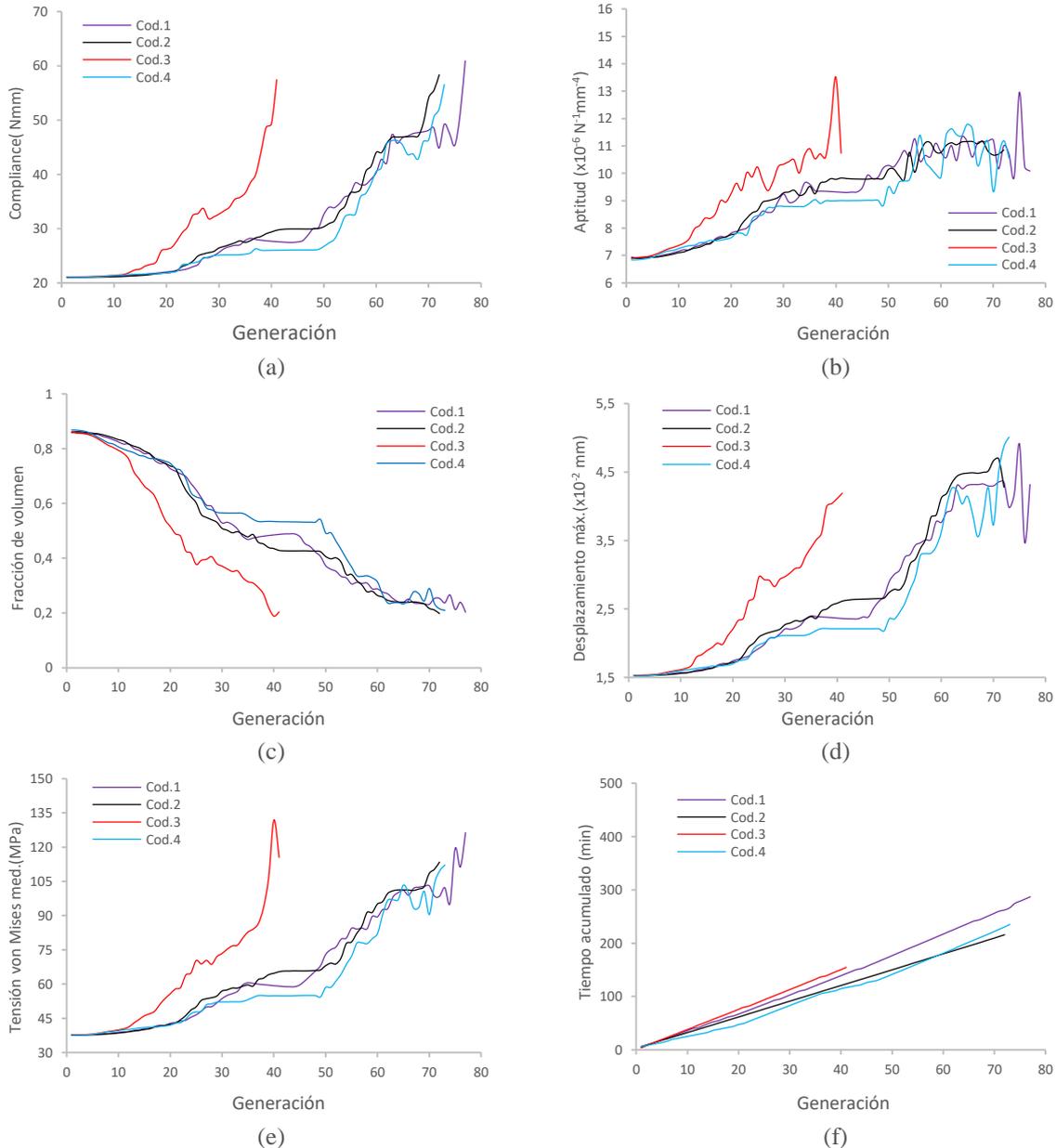
**Figura 4.17:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Diseño óptimo para 6 nudos (Castejon, 2003).

**Tabla 4.4:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Resultados para diferentes codificaciones y generaciones.

Cod,	g	$\sigma_{VM}^{max}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{med}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{min}$ (MPa)	$D_{max}$ (mm)	Compliance (N·mm)	$\frac{V}{V_0}$	Aptitud (N <sup>-1</sup> mm <sup>-4</sup> )	Tiempo (min)
Codificación 1	2	741,14	37,76	4,22	1,53E-2	21,00	0,85	6,94E-6	7,67
	27	763,86	49,98	9,39	2,07E-2	24,56	0,59	8,57E-6	92,87
	46	779,27	61,45	17,38	2,38E-2	27,76	0,45	9,93E-6	160,35
	58	783,16	84,23	19,48	3,51E-2	38,09	0,30	10,60E-6	208,75
	77	816,41	126,26	30,93	4,31E-2	60,88	0,20	10,08E-6	286,90
Codificación 2	2	741,09	37,70	4,77	1,53E-2	21,05	0,86	6,90E-6	8,87
	25	769,44	49,97	4,20	2,09E-2	24,01	0,60	8,64E-6	76,35
	38	775,37	62,55	11,87	2,49E-2	28,56	0,45	9,68E-6	114,75
	57	782,07	85,30	18,25	3,52E-2	37,26	0,30	11,10E-6	171,15
	72	791,76	113,39	25,21	4,27E-2	58,05	0,19	11,56E-6	216,12
Codificación 3	2	741,06	37,74	4,55	1,52E-2	21,08	0,86	6,88E-6	7,89
	17	767,76	48,14	7,74	2,00E-2	23,40	0,62	8,52E-6	64,47
	23	770,04	64,01	11,41	2,61E-2	29,25	0,42	10,02E-6	85,94
	36	777,14	84,13	19,48	3,50E-2	38,46	0,30	10,52E-6	136,66
	41	815,33	115,51	26,06	4,18E-2	57,39	0,20	10,73E-6	154,76
Codificación 4	2	740,87	37,52	3,00	1,52E-2	0,86	21,03	6,84E-6	7,95
	26	772,84	47,99	5,79	2,00E-2	23,88	0,61	8,49E-6	68,16
	52	781,52	61,36	12,74	2,45E-2	28,04	0,46	9,67E-6	149,15
	60	786,00	82,13	18,51	3,62E-2	40,56	0,31	9,85E-6	181,10
	73	803,63	112,13	30,95	4,87E-2	56,56	0,20	10,55E-6	235,17

En la tabla 4.4 se muestran los valores, para las cuatro codificaciones, correspondientes para las tensiones de von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la compliance, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo acumulado en distintas generaciones.

En la figura 4.18 se muestra la evolución de la compliance, la aptitud, la fracción de volumen, los desplazamientos máximos, las tensiones de von Mises media y el tiempo acumulado para las cuatro codificaciones. En la figura 4.18a se puede apreciar como las topologías óptimas obtenidas con la codificación 1, 2, y 3 son menos rígidas (7,63%; 2,63%; y 1,46% respectivamente) que la obtenida con la codificación 4.



**Figura 4.18:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la aptitud. (c) Evolución del desplazamiento máximo. (d) Evolución de la tensión de von Mises media. (e) Evolución de la fracción de volumen. (f) Evolución del coste computacional.

En la figura 4.18d, se aprecia como los diseños óptimos finales obtenidos con las codificaciones 1, 3 y 4 presentan desplazamientos máximos mayores (0,92%, 12,07% y 14,05% respectivamente) al obtenido con la codificación 2. De la misma forma, en la figura 4.18e, se aprecia como las topologías óptimas finales con las codificaciones 1, 2 y 3 presentan tensiones de von Mises medias mayores (12,43%, 1,12% y 3,01% respectivamente) a la obtenida con la codificación 4.

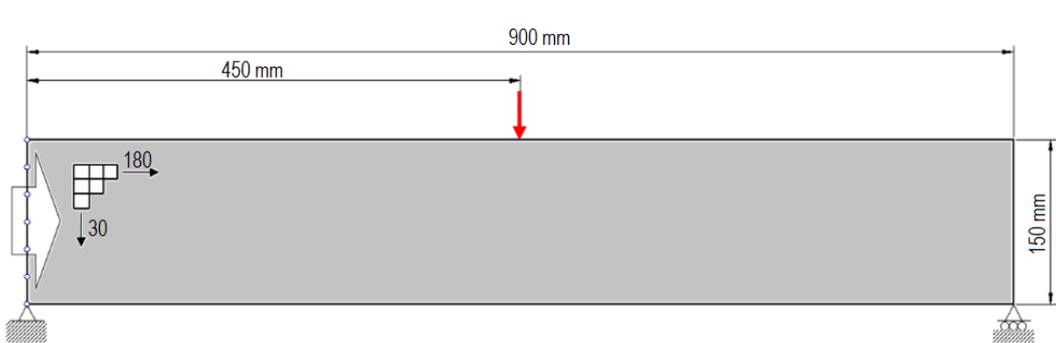
En la figura 4.18f se observa como el tiempo computacional es prácticamente lineal y con pendientes similares.

### 4.9.3. Viga MBB con carga vertical centrada en borde superior

El tercer ejemplo optimizado es una viga con una carga vertical de 1kN aplicada en el centro del borde superior, la cual está soportada por dos apoyos en las esquinas inferiores, siendo uno de ellos de tipo deslizante. La longitud del dominio de diseño es de 900 mm, la altura de 150mm, y el espesor de 1mm. Sobre el extremo izquierdo se han colocado 7 puntos de control, los cuales se mueven perpendicularmente al dominio de diseño inicial. El dominio de diseño se ha dividido mediante una malla de 5400 (180×30) elementos.

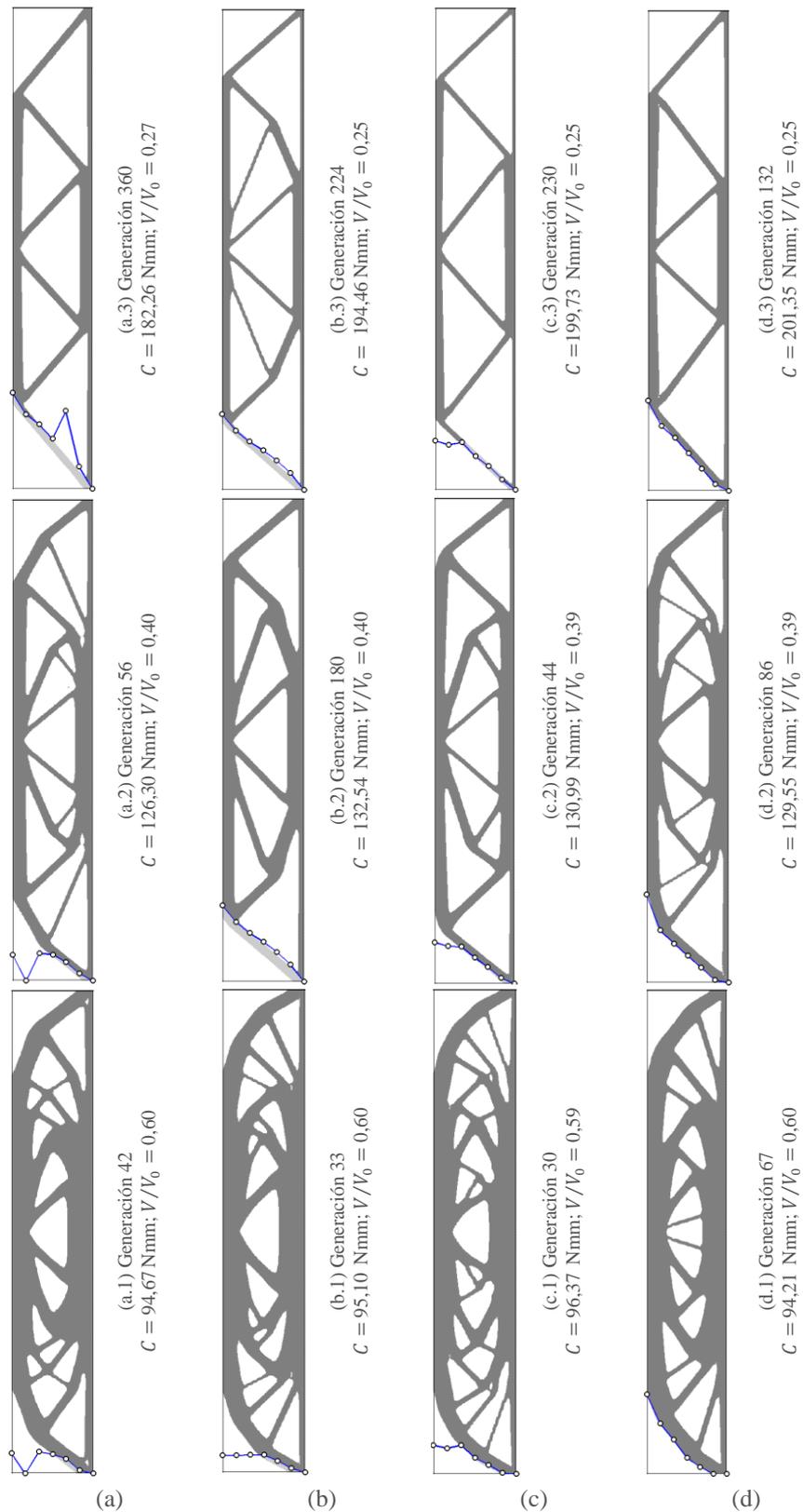
El tamaño de paso para las codificaciones 1 y 2 es de  $\delta = 1$  mm. Para la codificación 3, se consideran los tamaño de paso  $\delta_{min} = 1$  mm y  $\delta_{max} = 2$  mm. Para la codificación 4, los puntos de control pueden moverse dentro del intervalo -2 a +2 mm.

Apuntar que, aunque el ejemplo tratado es una estructura simétrica sujeto a un estado de carga también simétrico, en todos los casos el análisis se realiza para la estructura completa.



**Figura 4.19:** Viga de MBB con apoyos fijo y móvil y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde superior. Dominio de diseño.

En la figura 4.20 se muestran algunas de las topologías más interesantes que se han obtenido durante la optimización para las cuatro codificaciones. Los diseños óptimos con las codificaciones 1, 2, 3 y 4 se obtienen en las generaciones 360, 224, 230 y 132, con valores de compliance de  $C = 182,26$ ; 194,46; 199,73; y 201,33 Nmm y fracciones de volumen de  $V/V_0 = 0,27$ ; 0,25; 0,25; y 0,25 respectivamente, aunque hay que destacar que con la codificación 1 no se ha llegado a la fracción de volumen deseada. Además, se puede observar como la codificación 4 es la única en la que el contorno virtual se adapta de forma más precisa al contorno exterior de la estructura.



**Figura 4.20:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Codificación 1. (b) Codificación 2. (c) Codificación 3. (d) Codificación 4.

En la tabla 4.5 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la compliance, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo acumulado en distintas generaciones para las cuatro codificaciones.

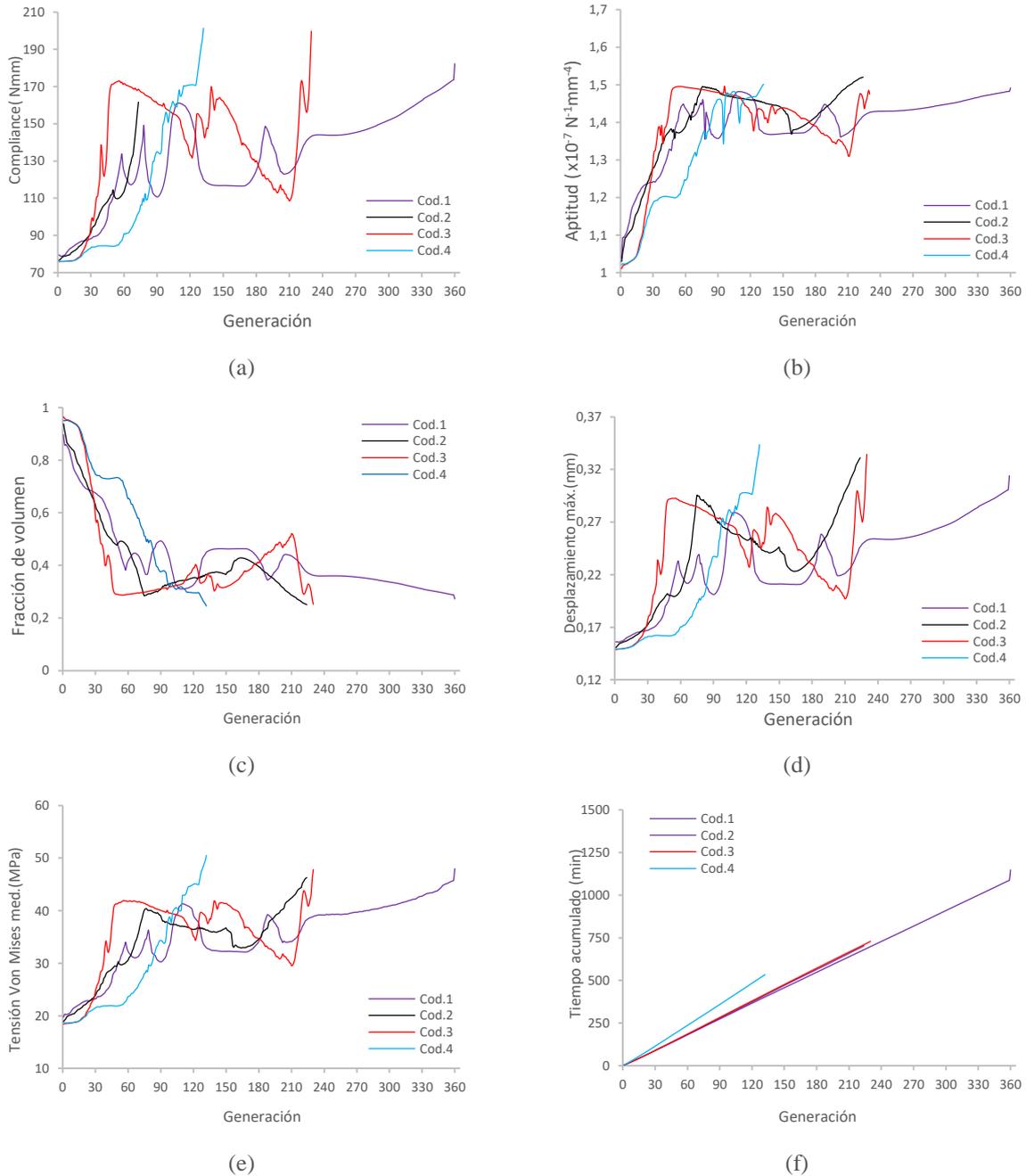
**Tabla 4.5:** Viga de MBB con apoyos fijo y móvil y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo superior. Resultados para diferentes codificaciones y generaciones.

Cod,	g	$\sigma_{VM}^{max}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{med}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{min}$ (MPa)	$D_{max}$ (mm)	Compliance (N·mm)	$\frac{V}{V_0}$	Aptitud (N <sup>-1</sup> mm <sup>-4</sup> )	Tiempo (min)
Codificación 1	2	139,79	20,28	2,35	0,16	79,04	0,86	1,09E-7	5,58
	42	140,08	25,20	4,63	0,17	94,67	0,60	1,29E-7	124,31
	56	152,33	32,73	6,99	0,22	126,81	0,40	1,44E-7	167,78
	180	152,93	34,05	6,68	0,22	124,910	0,42	1,40E-7	547,89
	360	174,63	47,98	11,37	0,27	182,26	0,27	1,49E-7	1148,13
Codificación 2	2	139,66	19,18	2,19	0,15	77,01	0,91	1,05E-7	336,86
	33	139,97	24,88	4,42	0,17	95,10	0,60	1,29E-7	98,62
	84	172,58	39,64	10,20	0,28	166,68	0,29	1,49E-7	259,59
	179	156,04	34,38	7,32	0,23	131,74	0,39	1,41E-7	561,07
	224	186,02	46,30	12,07	0,33	194,46	0,25	1,52E-7	703,00
Codificación 3	2	139,61	18,52	1,67	0,14	76,004	0,95	1,02E-7	339,24
	30	140,17	24,57	3,45	0,17	96,37	0,59	1,29E-7	88,72
	44	155,10	34,29	7,77	0,23	130,99	0,39	1,41E-7	133,84
	137	180,96	39,33	7,73	0,25	151,62	0,34	1,41E-7	435,04
	230	198,25	47,81	11,41	0,33	199,73	0,25	1,47E-7	730,07
Codificación 4	2	139,63	18,64	1,58	0,15	76,14	0,95	1,02E-7	434,38
	67	140,20	25,00	4,78	0,17	94,21	0,60	1,30E-7	265,18
	86	154,63	33,01	7,85	0,22	129,55	0,39	1,43E-7	342,62
	113	152,13	43,13	10,04	0,29	167,43	0,30	1,45E-7	454,55
	132	168,76	50,52	12,74	0,34	201,35	0,24	1,50E-7	533,86

En la figura 4.21, se muestra la evolución de la compliance, la aptitud, la fracción de volumen, los desplazamientos máximos, las tensiones de von Mises media y el tiempo acumulado para las cuatro codificaciones.

Si nos centramos en las codificaciones que alcanzan la fracción de volumen deseada (codificaciones 2,3 y 4), en la figura 4.21a se puede apreciar como las topologías óptimas obtenidas con las codificaciones 3 y 4 son menos rígidas (2,71%; y 3,54%) que la obtenida con la codificación 2.

En la figura 4.21d se puede apreciar que el diseño obtenido con la codificación 4 presenta un desplazamiento máximo un 3,03% mayor a los obtenidos con las codificaciones 2 y 3. Por el contrario, la topología óptima final con la codificación 4 presenta una tensión de von Mises media mayores a las obtenidas con las codificaciones 2 y 3 (10,22% y 16,49% respectivamente). Además, en la figura 4.21f se puede apreciar como la evolución del tiempo computacional es prácticamente lineal y con pendientes parecidas.



**Figura 4.21:** Viga de MBB con apoyos fijo y móvil y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo superior. (a) Evolución compliance. (b) Evolución aptitud. (c) Evolución fracción de volumen. (d) Evolución deformación máxima. (e) Evolución tensiones de von Mises medias. (f) Evolución del coste computacional.

#### 4.9.4. Análisis de los resultados atendiendo al tipo de codificación

Analizando los resultados obtenidos en los tres ejemplos anteriores, se puede concluir que las codificaciones de tipo binario al contar con un tamaño de paso preestablecido, dificulta el correcto ajuste de los PC al contorno real, lo que impide llegar a las fracciones de volumen objetivo. Por otro lado, la codificación 4 (codificación real) es la que mejores resultados proporciona ya que: (1) permite la mejor adaptación del  $C_v$  al contorno exterior de la estructura;

(2) no cuenta con un tamaño de paso preestablecido, por lo que el movimiento de los PC se puede adaptar según la evolución de la optimización; (3) la evolución de la compliance y fracción de volumen ocurren de forma más progresiva; y (4) permite una exploración del espacio más completa.

## 4.10. Representación del contorno virtual mediante B-Spline

Hasta el momento, la definición del contorno virtual se ha efectuado a través de líneas poligonales o polilineal. Este tipo de representación destaca por su sencillez, pero representa con menor precisión curvas de tipo circular, elíptico o hiperbólico.

Gordon y Riesenfeld (1974) fueron los primeros en utilizar las curvas B-spline para modelar curvas geométricas en ordenador. Actualmente, las curvas *B-spline* se han convertido en el estándar para describir y modelar curvas y superficies usando el diseño asistido por ordenador.

Braibant y Fleury (1984) introdujeron las curvas B-spline en la optimización de forma permitiendo definir el contorno con solo un reducido número de variables. Lee y Kwak (2007) utilizaron curvas B-splines para representar el contorno de la estructura considerando sus puntos de control como variables de diseño.

Más recientemente las curvas B-spline no uniformes (*Non-uniform B-spline*, NURBS) se han utilizado para la optimización de forma y de topología ya que resultan más flexibles que las B-splines (Seo et al.2010; Clune et al. 2014). La principal ventaja proviene de añadir el peso de los puntos de control al conjunto de las variables de diseño. Por lo que, el número de posibles modificaciones en la estructura es mucho mayor.

A continuación, y de forma resumida, se realiza una introducción acerca de la teoría de las curvas B-spline. Se optimiza de nuevo el ejemplo de la viga de Michell (apartado 4.9.2), utilizando para definir el  $C_v$  una curva B-spline, y finalmente se estudia el efecto del número de puntos de control y el tamaño de la población sobre el diseño óptimo.

### 4.10.1. Curvas B-spline

Las curvas B-spline son funciones paramétricas definidas por un polinomio a trozos cuyos vértices (puntos de control) son usados como variables de diseño (Piegl y Tiller, 1997).

Una curva B-spline de grado  $p$  se define por

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad a \leq u \leq b \quad (4.18)$$

donde  $\mathbf{P}_i$  son los puntos de control y  $N_{i,p}(u)$  son las funciones bases B-spline de grado  $p$  que definen el polinomio a trozos y las cuales son obtenidas de forma recursiva como

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.19a)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (4.19b)$$

donde  $u_i$  son los *nudos* o *puntos de ruptura* que forman el *vector de nudos*  $\mathbf{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ . Este relaciona la variable paramétrica  $u$  con los puntos de control  $\mathbf{P}_i$ . El grado  $p$ , el número de puntos de control ( $n + 1$ ), y el número de nudos ( $m + 1$ ) se relacionan mediante

$$m = n + p + 1 \quad (4.20)$$

Una curva B-spline puede ser uniforme o no uniforme, periódica o no periódica. Si el vector de nudos está uniformemente espaciado como  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  la B-spline es *uniforme*. En caso contrario, se dice que es *no uniforme*. Por otro lado, se dice que una curva B-spline es *periódica* si el final de la curva coincide con el inicio, creando una curva cerrada. En caso contrario, se dice que es *no periódica*. Para una curva B-spline no uniforme y no periódica, el vector de nudos se caracteriza por

$$\mathbf{U} = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (4.21)$$

donde los nudos  $a$  y  $b$  se repiten con multiplicidad  $p$ , para interpolar los puntos de control inicial y final. La configuración más práctica y común es parametrizar la curva con un intervalo unitario siendo  $a = 0$  y  $b = 1$ .

Las propiedades más significativas de las curvas B-spline son:

1. Localidad:  $N_{i,p}(u) = 0$  si  $u$  está fuera del intervalo  $[u_i, u_{i+p+1})$ .
2. No negatividad:  $N_{i,p}(u) \geq 0$  para todo  $i, p$ , y  $u$ .
3. Partición de la unidad:  $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) = 1$  para cualquier intervalo de nudos  $[u_i, u_{i+p+1})$ .
4. Diferenciabilidad: todas las derivadas de un  $N_{i,p}(u)$  existen en el intervalo de nudos. En un nudo,  $N_{i,p}(u)$  es  $p-k$  veces diferenciable, siendo  $k$  la multiplicidad del nudo. Por lo tanto, aumentando el grado aumenta la continuidad y aumentando la multiplicidad del nudo disminuye la continuidad.
5. Un vector de nudos  $\mathbf{U} = \{a, \dots, a, b, \dots, b\}$  produce el polinomio de Bernstein de grado  $p$ .
6. Si  $n = p$  y  $\mathbf{U} = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  entonces  $C(u)$  es una curva Bezier.
7. Interpolación de punto final:  $C(0) = P_0$  y  $C(1) = P_n$ .
8. Invariancia afín:  $f(C(P_1, \dots, P_n)) = C(f(P_1), \dots, f(P_n))$ .
9. La curva está contenida en la zona convexa de su polígono de control, de hecho, si  $u \in [u_i, u_{i+p+1})$  y  $p \leq i \leq m - p - 1$ , entonces  $C(u)$  se encuentra dentro de la zona convexa de los puntos de control  $P_{i-p}, \dots, P_i$ .
10. Esquema de modificación local: si se mueve un punto de control  $P_i$ , este cambiará la curva en el intervalo  $[u_i, u_{i+p+1})$ .
11. El *polígono de control* (polígono definido por los puntos de control) representa una aproximación lineal de la curva. Esta aproximación puede ser mejorada mediante la inserción de nudos o la elevación del grado. Generalmente, contra más bajo sea el grado,

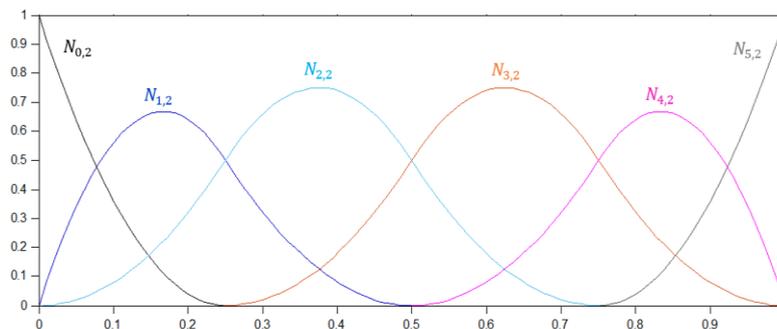
más próxima se encuentra la curva al polígono de control. El caso extremo es  $p = 1$ , para el cual la curva es una interpolación lineal entre dos puntos de control. En este caso, la curva es el polígono de control.

12. Moviéndonos a lo largo de la curva de  $u = 0$  a  $u = 1$ , las funciones bases  $N_{i,p}(u)$  actúan como interruptores. Cuando  $u$  supera un valor de nodo  $u_i$ , un  $N_{i,p}(u)$  y su correspondiente  $P_i$  se desactiva y se activa el siguiente.
13. Propiedad de disminución de la variación: ninguna línea tiene más intersecciones con la curva que con el polígono de control.
14. La continuidad y diferenciabilidad de la curva  $C(u)$  sigue a la de las funciones base, ya que la curva es una combinación lineal de las funciones base. Así,  $C(u)$  es infinitamente diferenciable en el intervalo de los nodos y es al menos  $p-k$  veces continuamente diferenciable.

**Tabla 4.6:** Continuidad C para diferentes grados  $p$  y multiplicidad  $k$ .

$p-k$	Continuidad
0	Puntos no unidos
1	$C^0$ (segmentos lineales conectados)
2	$C^1$ (tangente continua)
3	$C^2$ (curvatura continua)

A continuación, se muestra un ejemplo para ilustrar el funcionamiento de este tipo de curvas. Para ello, se establece un grado  $p = 2$ , se utilizan seis puntos de control, y se establece un vector de nudos no uniforme  $\mathbf{U} = \{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\}$ . Mediante las Ecs. (4.19a) y (4.19b) se obtienen las funciones bases  $N_{i,2}(u)$  (ver figura 4.22).



**Figura 4.22:** Funciones bases no uniforme para  $p = 2$  y  $n = 5$

Aplicando las funciones bases de la figura 4.22 a los seis puntos de control  $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$  y usando la Ec. 4.18, se obtiene la curva B-spline  $C(u)$ . El resultado es una curva compuesta por 4 segmentos  $\{C_1(u), C_2(u), C_3(u), C_4(u)\}$ , conectados mediante continuidad  $C^1$  (ver figura 4.23). Como se puede observar, la curva solo pasa a través de los puntos de control inicial y final.

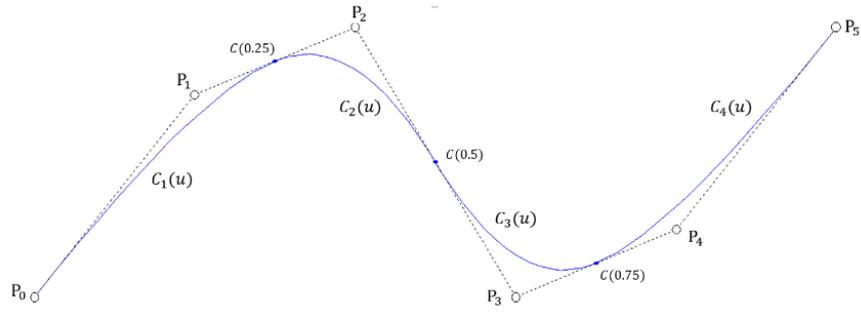


Figura 4.23: Curva B-spline inicial.

Si el punto  $P_2$  se mueve a  $P'_2$ , la curva  $C(u)$  se ve alterada causando  $C'(u)$ . Como se puede observar en la figura 4.24, el movimiento del punto de control solo afecta a 3 segmentos de la curva  $C(u)$ . De modo general, cada segmento de una B-spline se ve solo influenciado por  $p + 1$  puntos de control, e inversamente, cada punto de control solo influye en  $p + 1$  segmentos.

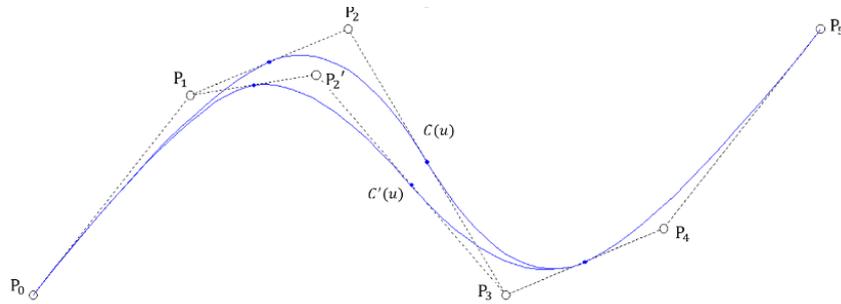


Figura 4.24: Movimiento del punto  $P_2$  a  $P'_2$ .

En la figura 4.25 se muestra la independencia del grado  $p$  con respecto al número de puntos de control. En esta figura se muestran tres curvas B-spline definidas por los mismos puntos de control pero con diferentes valores de  $p$ . Cuando  $p = 1$ , la curva es lineal y coincide con el polígono de control. Cuando  $p = 2$ , la curva es cuadrática. Esta pasa por los puntos de control inicial y final y por los puntos medios de los segmentos intermedios. Finalmente, si  $p = 3$ , la curva solo pasa por los puntos de control inicial y final y se aleja más de los puntos intermedios.

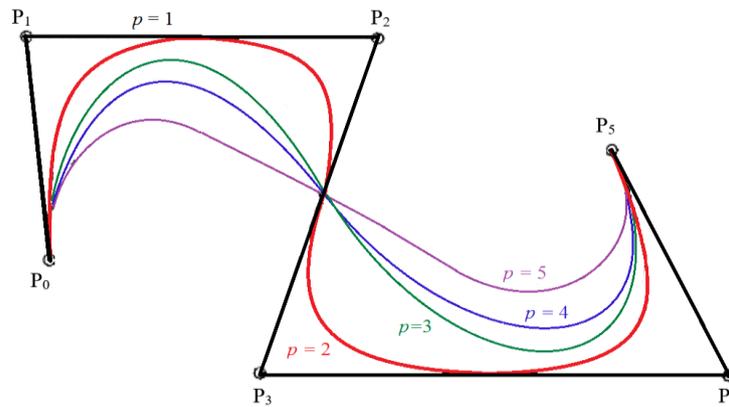


Figura 4.25: Curvas B-spline de diferentes grados usando el mismo polígono de control (Piegl y Tiller, 1997)

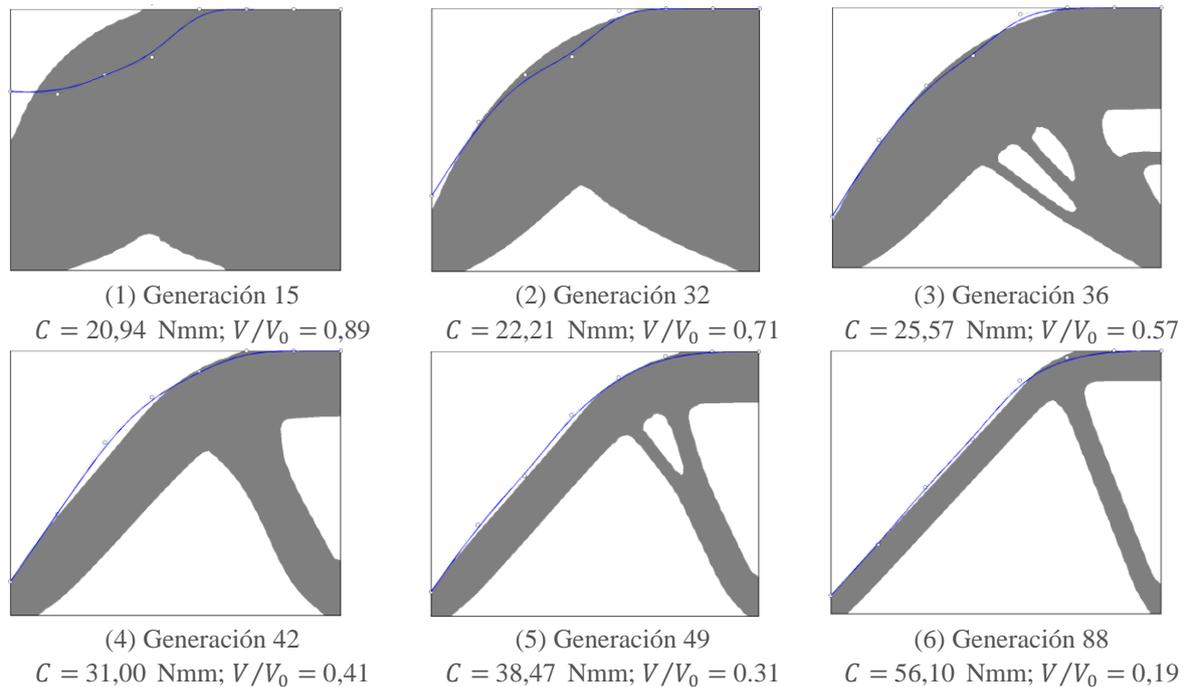
### 4.10.2. Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en borde inferior

En este ejemplo se optimiza de nuevo la viga de Michell definida en el apartado 4.9.2 (figura 4.15) utilizando una curva B-spline de grado  $p = 2$  para describir el contorno virtual.

Sobre el extremo superior se han dispuesto un total de 8 puntos de control uniformemente distribuidos, pudiendo moverse en dirección perpendicularmente al dominio de diseño inicial. La codificación utilizada es la del tipo 4, el tamaño de paso está limitado por  $\delta_{min} = -2$  mm y  $\delta_{max} = 2$  mm, y los parámetros del GA son los reflejados en la tabla 4.2.

Al utilizar una curva B-spline para definir el contorno virtual, el valor de referencia (Ec. 4.6) no puede ser evaluado a partir del valor del criterio seleccionado (tensiones de von Mises o energía de deformación) en los  $N_{PC}$  puntos de control, ya que estos no tienen por qué estar situados sobre el contorno virtual, sino que sirven para definir dicho contorno. Por ello, la evaluación de la Ec. (4.6) se realiza sobre todo el contorno virtual, el cual se define por medio de 20 puntos por segmento.

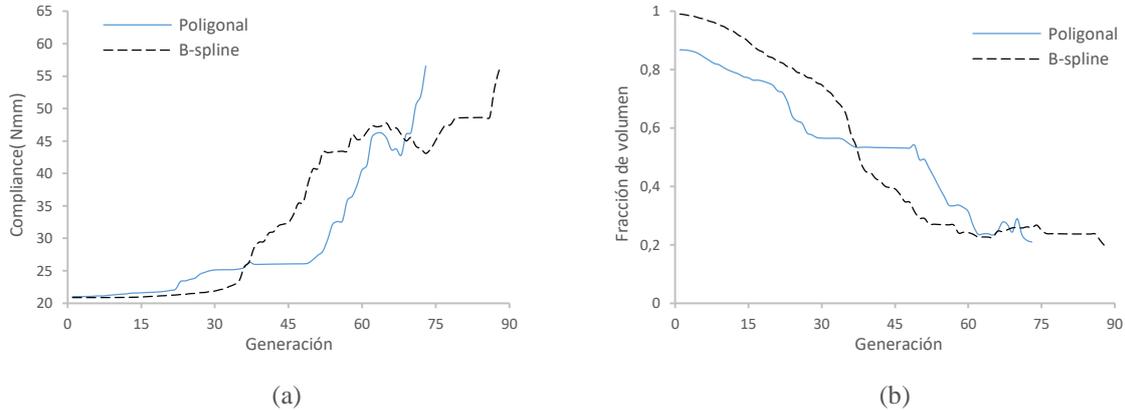
En la figura 4.26 se muestran algunas de las topologías más interesantes que han ido surgiendo durante la optimización. El diseño óptimo se obtiene en la generación 88 con un valor para la compliance de  $C = 56,10$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,19$ .



**Figura 4.26:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones utilizando un contorno virtual descrito mediante una curva B-spline de orden 2.

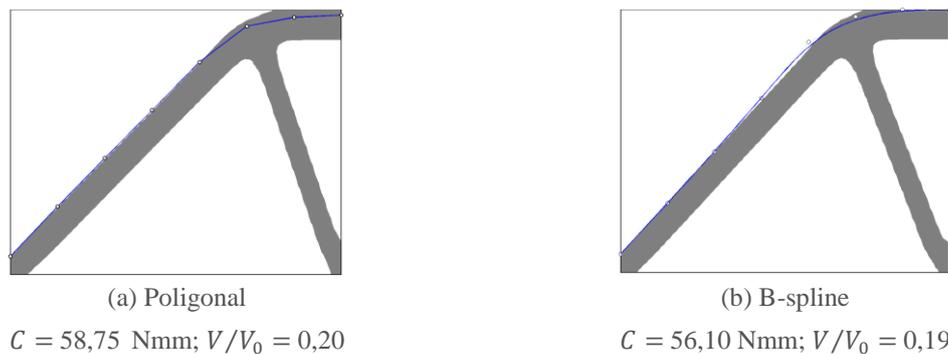
En la figura 4.27 se compara la evolución de la compliance, la fracción de volumen y la aptitud utilizando una curva B-spline y una curva poligonal (apartado 4.9.2) para describir el contorno virtual. En la figura 4.27a se muestra como los valores de la compliance para las primeras generaciones son prácticamente los mismos, pero a partir de la generación 20, la

evolución de la compliance se produce de forma más progresiva si se utiliza una curva B-spline para definir el contorno virtual. En la figura 4.27b se aprecia como utilizando una curva B-spline, la fracción de volumen se reduce de forma más suave. Además, la eliminación de material en las primeras iteraciones es mucho menor. Esto se debe a que al utilizar una curva B-spline, la isolíneas de referencia se obtiene evaluando la Ec. (4.6) en toda la curva B-spline y no solo en los PC, por lo que se obtiene un valor más representativo.



**Figura 4.27:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución de la: (a) Compliance. (b) Fracción de volumen.

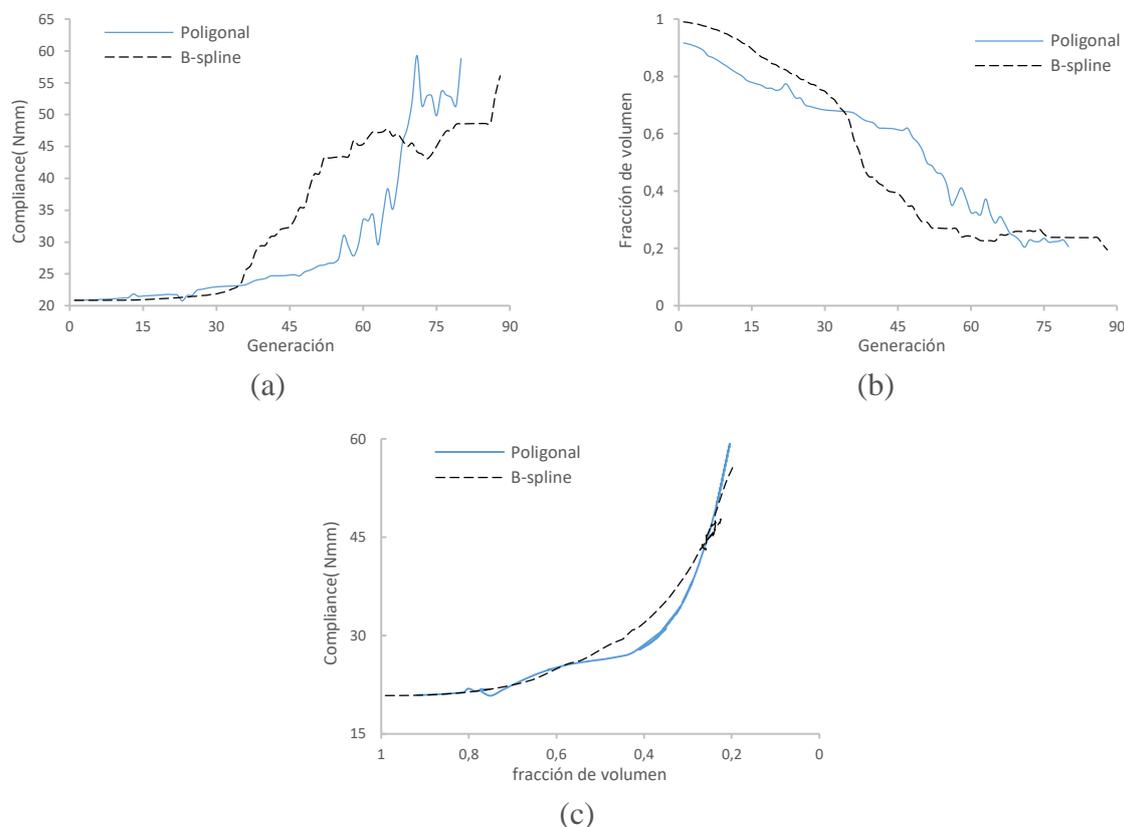
En la figura 4.28 se comparan las topologías óptimas obtenidas usando una curva poligonal y una curva B-spline donde la isolínea de referencia se ha obtenido evaluando la Ec. (4.6) con el mismo tamaño de muestra (20 puntos por segmento). Ambos casos presentan la misma topología óptima, pero la topología óptima obtenida con la curva B-spline es un 6,09% más rígida que la obtenida con la curva poligonal.



**Figura 4.28:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el extremo inferior. (a) Topología óptima obtenida usando una poligonal. (b) Topología óptima usando una curva B-spline para definir el  $C_v$ .

En la figura 4.29 se muestra la evolución de la compliance, la evolución de la fracción de volumen, y la relación de la compliance con respecto a la fracción de volumen usando una poligonal y una curva B-spline con el mismo tamaño de muestra. En las figuras 4.29a y 4.29b se observa que tanto la evolución de la compliance y la fracción de volumen usando una curva B-Spline ocurre de un modo más suave sin sufrir cambios bruscos. En la figura 4.30c se observa como la compliance usando la curva B-spline es ligeramente inferior para los mismos valores

de fracción de volumen, lo que demuestra que, el diseño obtenido con la poligonal es ligeramente menos rígido que el obtenido utilizando una curva B-spline.



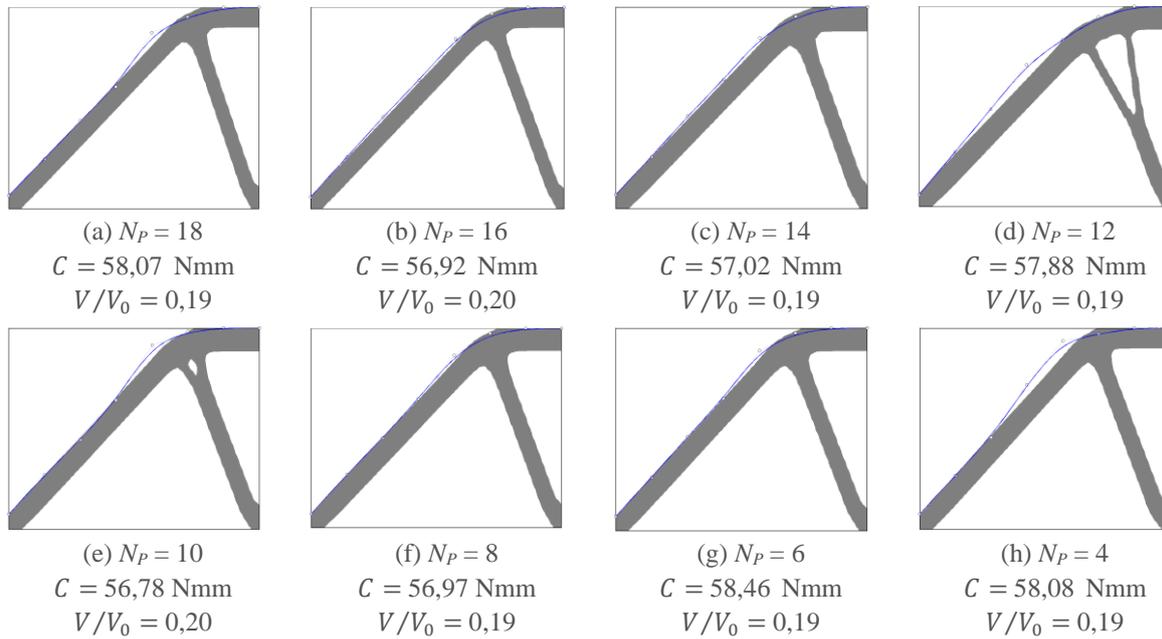
**Figura 4.29:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. (a) Relación entre la compliance y la generación. (b) Relación entre la compliance y la fracción de volumen. (c) Detalle para las últimas generaciones.

Una de las principales características de una curva B-spline es que permite trazar curvas con un reducido número de puntos de control. En nuestro caso, este hecho afecta al tamaño de los cromosomas y por tanto al tamaño recomendado de la población.

Desde los inicios, los investigadores han invertido un gran esfuerzo en establecer reglas empíricas o analíticas sobre el tamaño de la población de un algoritmo genético. William y Crossley (1997) establecieron una relación entre el tamaño de la población y el tamaño del cromosoma igual a  $4s$  siendo  $s$  la longitud del cromosoma. Chen y Rajan (1998) probaron que se podían obtener resultados razonables con tamaños de población comprendidos entre  $s$  y  $2s$ . Posteriormente, Goldberg (1989) estableció que se podían utilizar poblaciones de tamaño menor utilizando el concepto de  $\mu$ -GA. Posteriormente, Woon et al. (2001) fijaron como tamaño de población recomendable, si se emplea  $\mu$ -GA, aquel comprendido entre  $0,6s$  y  $0,9s$ .

En la figura 4.30 se muestran las topologías óptimas que se han obtenido para tamaños de población igual a 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6 y 4. En esta figura se puede apreciar como prácticamente todos los óptimos presentan la misma topología, la cual coincide con la obtenida para un tamaño de población igual a 20 (figura 4.28b). Todos los óptimos se han obtenido haciendo uso de un  $\mu$ -GA, el cual genera una nueva población cuando se detecta la convergencia

prematura de la misma y al uso de tamaños de paso pequeños, los cuales impiden que los cambios sean de carácter significativo.



**Figura 4.30:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas para un tamaño de población de: (a) 18, (b) 16, (c) 14, (d) 12, (e) 10, (f) 8, (g) 6 y (h) 4

En la tabla 4.7 se recogen los valores de la compliance, la fracción de volumen, el número de generaciones, el tiempo computacional hasta alcanzar el óptimo ( $t_T$ ), el tiempo computacional por generación sin proceso de estabilización ( $t_g$ ) y el tiempo medio por generación ( $t_{med}$ ) para los diferentes tamaños de población.

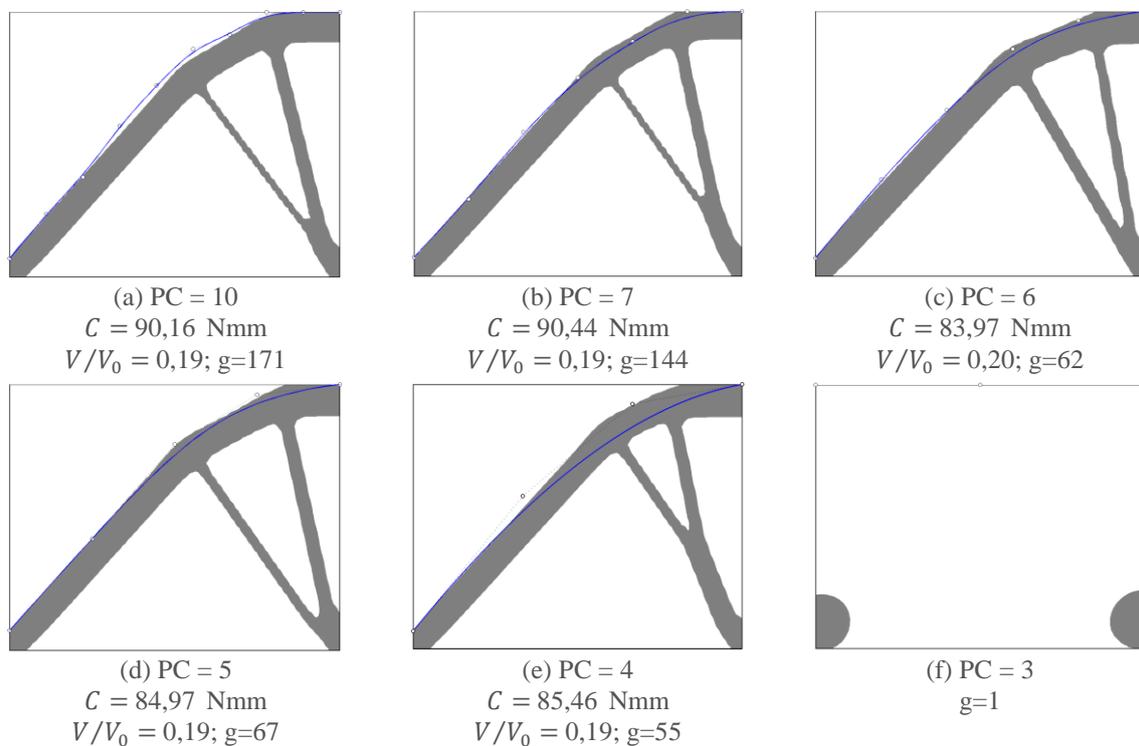
**Tabla 4.7:** Resultados para diferentes tamaños de población.

$N_P$	Compliance (N·mm)	$\frac{V}{V_0}$	$g$	$t_T$ (min)	$t_g$ (min)	$t_{med}$ (min)
20	58,10	0,19	88	225,43	1,91	2,56
18	58,07	0,19	116	193,54	1,43	1,66
16	56,92	0,20	124	163,34	1,31	1,317
14	57,02	0,19	94	113,59	1,10	1,20
12	57,78	0,19	88	90,47	0,98	1,02
10	56,78	0,20	88	78,99	0,80	0,89
8	56,97	0,19	96	73,92	0,76	0,77
6	58,46	0,19	102	95,57	0,50	0,93
4	58,08	0,19	153	101,87	0,38	0,66

Teniendo en cuenta que al disminuir el tamaño de la población, el tiempo por generación sin proceso de estabilización ( $t_g$ ) debe disminuir y que el número de generaciones necesarias para conseguir el óptimo varía según cómo evolucione el GA, se puede apreciar en la tabla como para tamaños de población menores a 8 no supone una mejora apreciable con respecto al tiempo computacional. Por lo que, a partir de este momento, el tamaño de la población y la

longitud del cromosoma se relacionan mediante  $1s$ . Además se puede observar como para tamaños de población de 20, 18, 6 y 4, el tiempo medio por generación ( $t_{med}$ ) difiere significativamente del tiempo por generación sin proceso de estabilización ( $t_g$ ), lo que sugiere que en estas optimizaciones el proceso de estabilización desempeña un papel muy importante.

En la figura 4.31 se muestran las topologías óptimas obtenidas usando 10, 7, 6, 5, 4 y 3 puntos de control con tamaños de población de 10, 7, 6, 5, 4, y 3, respectivamente. Se puede observar cómo cuanto mayor es el número de puntos de control, mejor se adapta el contorno virtual al real. Sin embargo, un aumento en el número de PC puede suponer un aumento en el número de generaciones, ya que aumenta el número de posibles movimientos. Apuntar que para  $PC = 3$  (figura 4.31f) no se obtiene ninguna topología, esto se debe a que para definir una curva B-spline de grado  $p = 2$ , es necesario como mínimo 4 puntos de control, ya que el movimiento de 1 punto de control influye en 3 segmentos ( $p+1$ ).

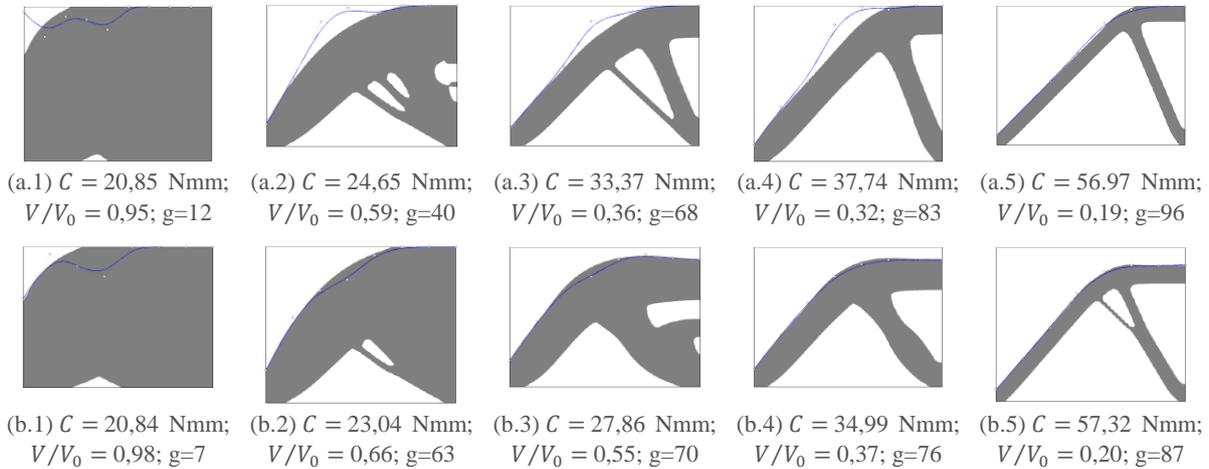


**Figura 4.31:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. (a) PC = 10. (b) PC = 7. (c) PC = 6. (d) PC = 5. (e) PC = 4. (f) PC = 3.

## 4.11. Influencia de la función de aptitud

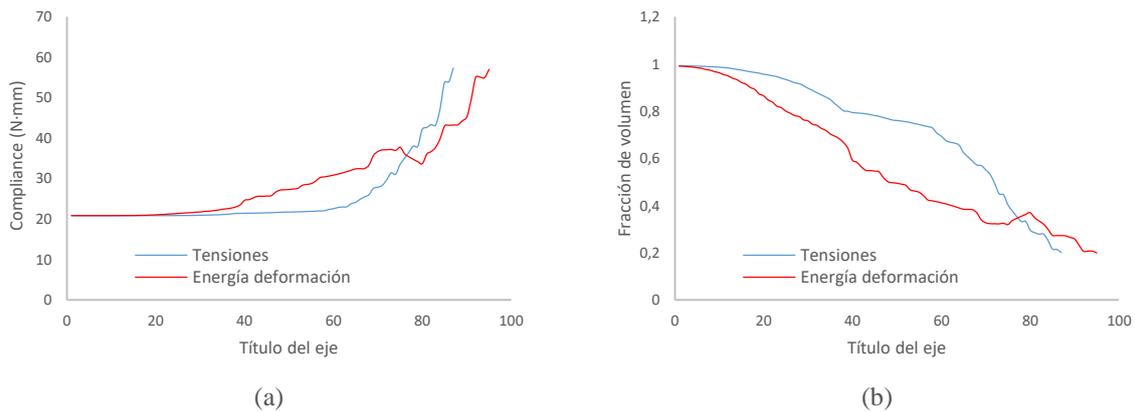
En este apartado se estudia la influencia de la función de aptitud sobre la topología óptima para el problema de la viga de Michell. Las dimensiones, número de elementos y los parámetros que controlan el algoritmo genético son los utilizados en el apartado 4.9.2 (ver tablas 4.1 y 4.2), a excepción del tamaño de la población que para este caso es igual al número de puntos de control. El contorno virtual se define por medio de una curva B-spline de 8 puntos de control. El criterio para la extracción de las isolíneas de referencia es la energía de deformación (Ec. 4.11) o las tensiones de von Mises (Ec. 4.9) según se utilice una función de aptitud basada en la compliance (Ec. 4.15) o en la tensión de von Mises (Ec. 4.16).

En la figura 4.32, se muestran las topologías óptimas más representativas, que han ido surgiendo para las dos funciones de aptitud utilizadas. Como se puede observar, la evolución de la optimización se desarrolla de modo diferente, aunque obteniendo en ambos casos la misma topología pero con geometrías diferentes.



**Figura 4.32:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones. (a) Función de aptitud basada en compliance. (b) Función de aptitud basada en tensión.

En la figura 4.33 se muestra la evolución de la compliance y la fracción de volumen para la optimización de topología usando ambas funciones de aptitud. Como se puede observar, la evolución de la compliance y la fracción de volumen usando una función de aptitud basada en la compliance ocurre de una forma más progresiva. Por ejemplo, la fracción de volumen usando una función de aptitud basada en tensión prácticamente no cambia hasta la generación 61 y luego lo hace rápidamente hasta la generación 108.

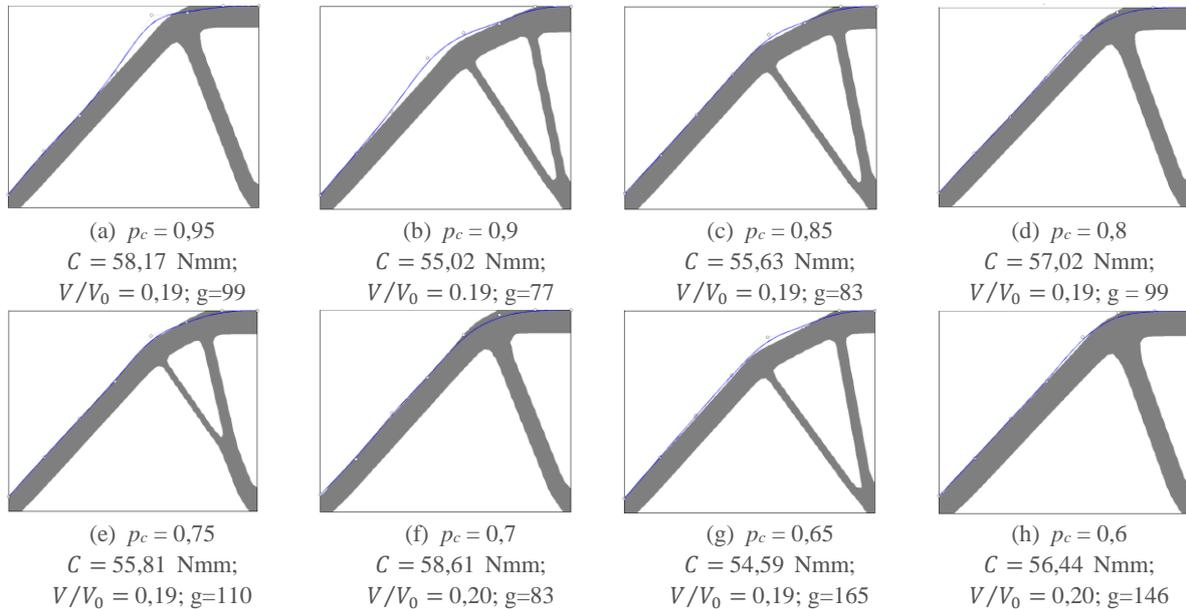


**Figura 4.33:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución compliance y fracción de volumen. (a) Función de aptitud basada en compliance. (b) Función de aptitud basada en tensión.

## 4.12. Influencia de los parámetros del GA

En este apartado se hace un estudio paramétrico para analizar la influencia de los parámetros del algoritmo genético en el diseño óptimo. Para ello, en el apartado 4.12.1 se estudia la influencia de la probabilidad de cruce, en el apartado 4.12.2 se estudia la influencia del tipo de operador de selección, en el apartado 4.12.3 se estudia la influencia del tipo de operador de cruce y en el apartado 4.12.4 se estudia la influencia de la probabilidad de convergencia del  $\mu$ -GA. La influencia del operador de mutación se considera que no tiene relevancia por utilizarse un  $\mu$ -GA.

El estudio paramétrico se realiza para el ejemplo de la viga de Michell, utilizando una curva B-spline con 8 puntos de control para definir el contorno virtual. La función de aptitud utilizada está basada en la compliance (Ec. 4.15). La codificación utilizada es la número 4 (codificación real) y los parámetros iniciales para el GA son los recogidos en la tabla 4.2.



**Figura 4.34:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia de la probabilidad de cruce. (a)  $p_c = 0,95$ . (b)  $p_c = 0,9$ . (c)  $p_c = 0,85$ . (d)  $p_c = 0,8$ . (e)  $p_c = 0,75$ . (f)  $p_c = 0,7$ . (g)  $p_c = 0,65$ . (h)  $p_c = 0,6$ .

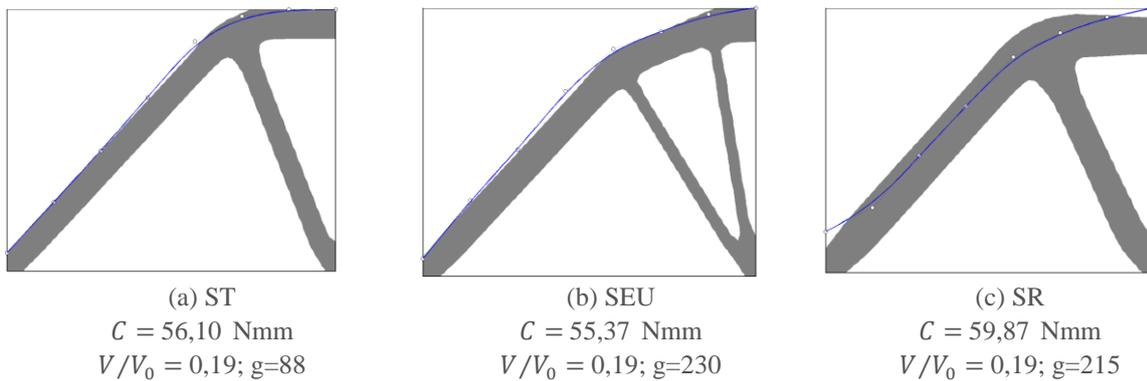
### 4.12.1. Influencia de la probabilidad de cruce

En la figura 4.34 se muestran las topologías óptimas que se han obtenido para diferentes valores de probabilidad de cruce. Las topologías óptimas se obtienen en las generaciones 99, 77, 83, 99, 110, 83, 165, y 146 con valores de la compliance de  $C = 58,17; 55,02; 55,63; 57,02; 55,81; 58,61; 54,59; y 56,44$  Nmm y fracciones de volumen de  $V/V_0 = 0,19; 0,19; 0,19; 0,19; 0,19; 0,20; 0,19; y 0,20$  para probabilidades de cruce de 0,95; 0,9; 0,85; 0,8; 0,75; 0,7; 0,65; y 0,6. Como se puede observar, se obtienen dos topologías diferentes, una con dos cavidades y la otra con tres cavidades. Las topologías con tres cavidades son ligeramente más resistentes que las obtenidas con dos. Además, se observa que para probabilidades de cruce inferiores a 0,8, el

número de generaciones necesarias para obtener el óptimo es mayor. Para probabilidades de cruce comprendidas entre 0,95 y 0,8 el número de generaciones está comprendido entre 77 y 99.

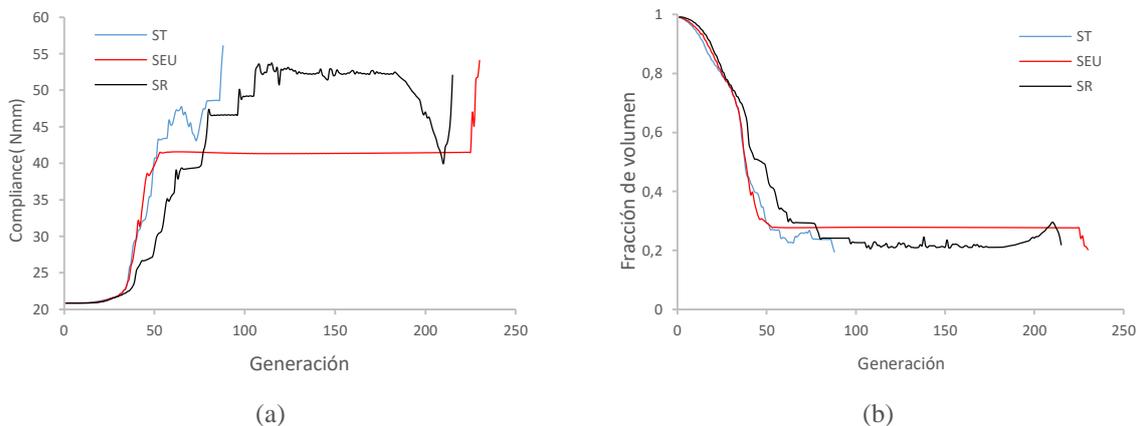
### 4.12.2. Influencia del tipo de operador de selección

En la figura 4.35 se muestran las topologías óptimas que se han obtenido con los operadores de selección: torneo determinista (ST), estocástica universal (SEU) y por ruleta (SR) y en la figura 4.36 se muestra la evolución de la compliance y de la fracción de volumen con dichos operadores de selección.



**Figura 4.35:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia del tipo de operador de selección. (a) Selección por torneo. (b) Selección estocástica universal. (c) Selección por ruleta.

Como se puede apreciar, si se utiliza la selección por ruleta se obtiene una topología constituida por dos cavidades con una altura menor a la obtenida usando la selección por torneo. Este diseño es ligeramente menos rígido que los otros dos. Por otro lado, se observa como utilizando los operadores SEU y SR se produce un aumento considerable en el número de generaciones necesarias para alcanzar el óptimo, con respecto al operador ST.

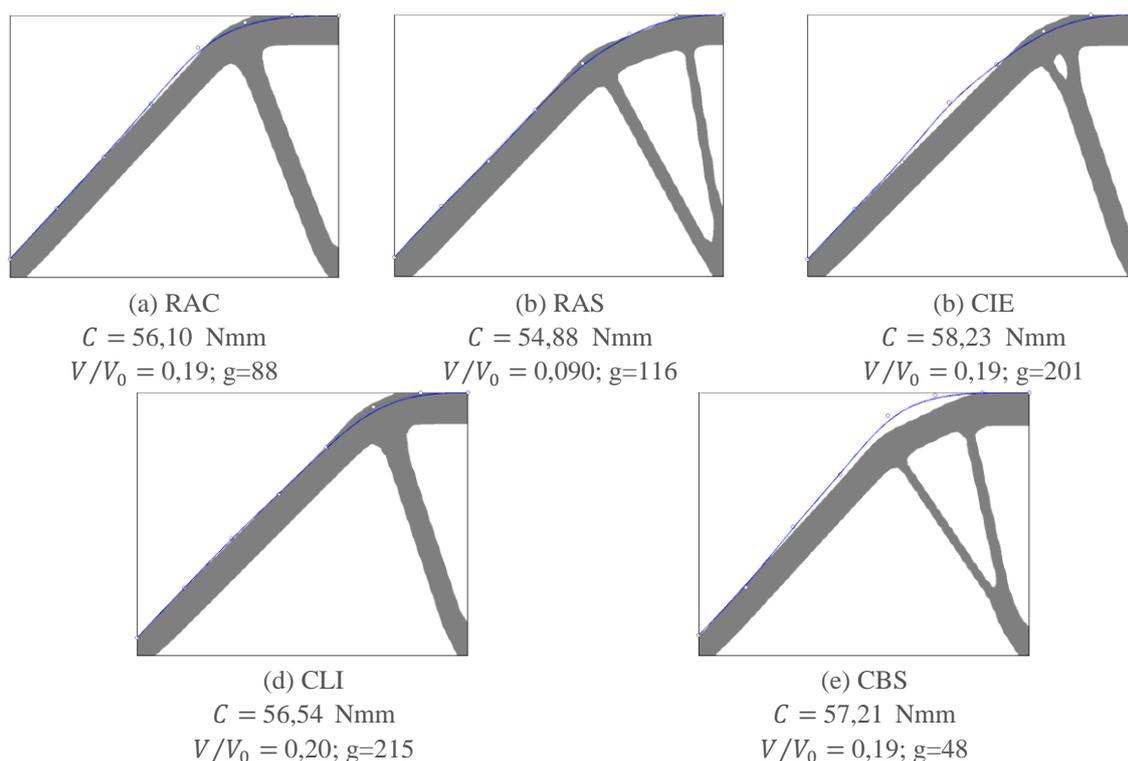


**Figura 4.36:** Viga de Michell con apoyos fijos y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo inferior. Influencia del tipo de operador de selección. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la fracción de volumen.

En la figura 4.37 se puede observar como la evolución de la compliance y la fracción de volumen hasta la generación 50 con los operadores ST y SEU ocurre de forma similar, a partir de la cual la fracción de volumen se estabiliza hasta la generación 225.

### 4.12.3. Influencia del tipo de operador de cruce

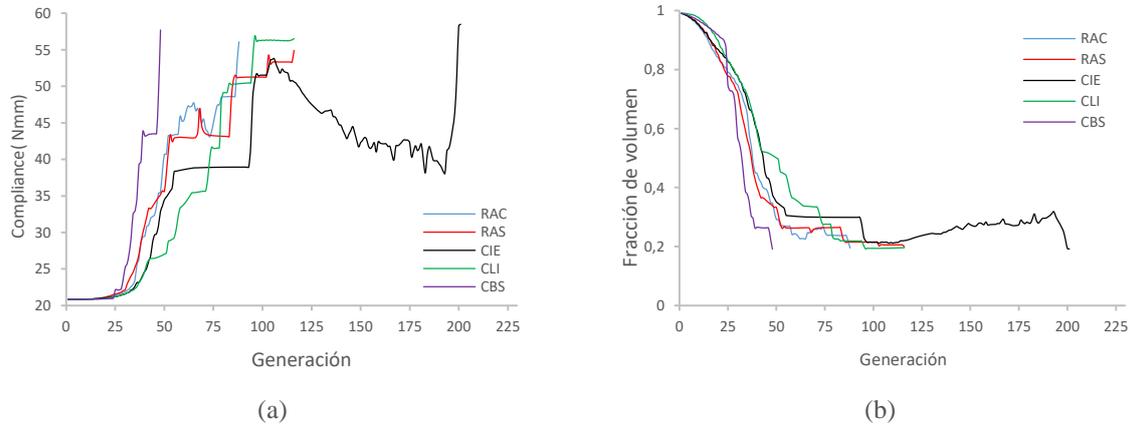
En la figura 4.37 se muestran las topologías óptimas obtenidas con diferentes operadores de cruce. Las topologías óptimas se obtienen en las generaciones 88, 116, 201, 215, y 48 con valores para la compliance de  $C = 56,10$ ;  $54,88$ ;  $58,23$ ;  $56,54$ ; y  $57,21$  Nmm y fracciones de volumen de  $V/V_0 = 0,19$ ;  $0,19$ ;  $0,19$ ;  $0,20$ ; y  $0,19$  con los operadores de recombinación aritmética completa (RAC); recombinación aritmético simple (RAS); cruce intermedio extendido (CIE), cruce lineal extendido (CLE) y cruce binario simulado (CBS). Se ha podido demostrar que los operadores RAS, CIE y CBS: (1) necesitan un mayor número de generaciones que usando el operador RAC para alcanzar el óptimo; y (2) el operador CBS es el que menor número de generaciones necesita para alcanzar el óptimo. Esto se debe a que los genes de los hijos pueden localizarse dentro o fuera de los genes de los padres, lo que supone una mayor exploración.



**Figura 4.37:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia del tipo de operador de cruce. (a) Cruce aritmético completo. (b) Cruce aritmético simple. (c) Cruce lineal extendido (d) Cruce lineal intermedio. (e) Cruce binario simulado ( $\eta=1$ ).

En la figura 4.38 se muestra la evolución de la compliance y la fracción de volumen para los distintos operadores de cruce. En la figura se puede observar como la eliminación de material de forma más progresiva y rápida ocurre con el operador CBS. La evolución de la

fracción de volumen con RAC y RAS ocurren de un modo muy similar, y los mayores periodos estacionarios se producen con CIE.



**Figura 4.38:** Viga de Michell con apoyos fijos y fuerza vertical de 1000 N centrada sobre el extremo inferior. Influencia del tipo de operador de cruce. (a) Evolución de la compliance. (b) Evolución de la fracción de volumen.

#### 4.12.4. Influencia de la convergencia del $\mu$ -GA

El operador  $\mu$ -GA, mantiene la diversidad mediante la reinicialización de la población cuando se detecta la convergencia prematura en poblaciones pequeñas. Hasta ahora se ha considerado que existe convergencia cuando el número de individuos con el mismo alelo para un determinado bit sea mayor al 80%. En este apartado se estudia cómo afecta este porcentaje sobre el diseño óptimo.

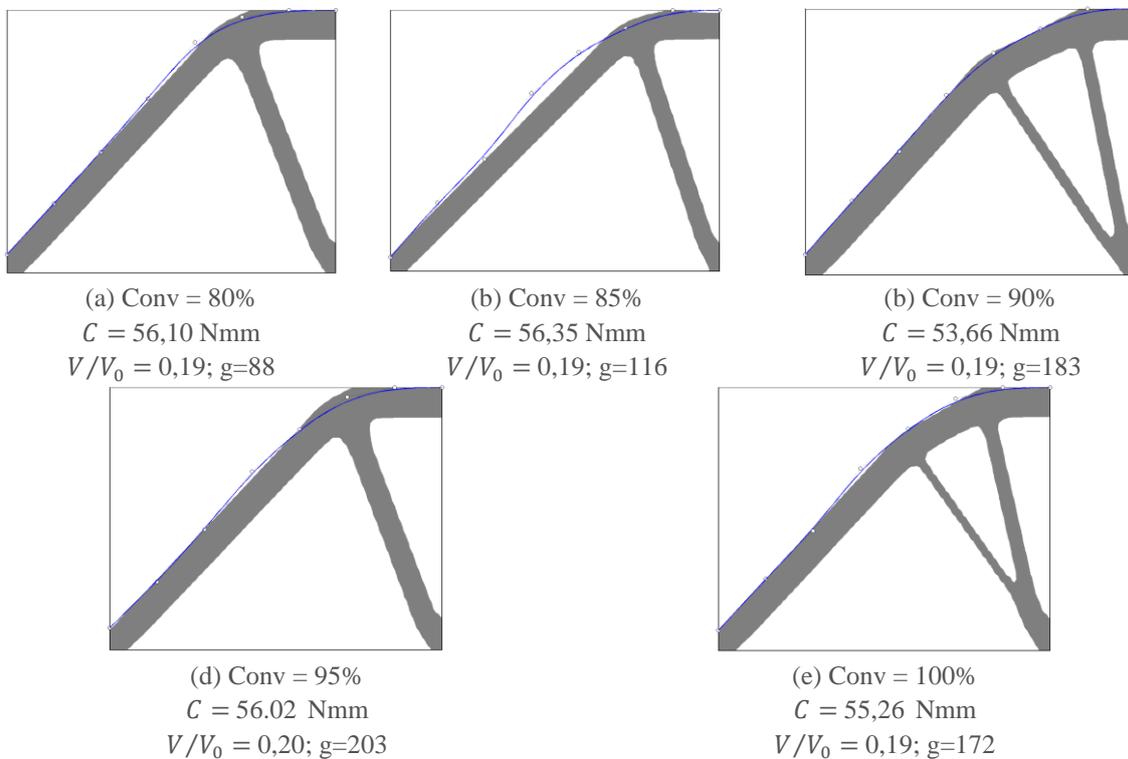
En las figura. 4.39 se muestran las topologías óptimas obtenidas para diferentes valores de la convergencia. Para valores de convergencia superiores al 80%, el número de generaciones necesarias para obtener la topología óptima es excesivamente elevado. Este hecho se debe a la convergencia prematura del método.

#### 4.12.5. Análisis de los resultados del estudio paramétrico

Analizando los resultados del estudio paramétrico realizado se puede concluir que:

1. La probabilidad de cruce no afecta de forma significativa a la hora de obtener el diseño óptimo pero si puede suponer un aumento en el número de generaciones. Para probabilidades de cruce comprendidas entre 0,95 y 0,8, el número de generaciones está entre 77 y 99, siendo la probabilidad de cruce igual a 0,9 con la que se obtiene el mínimo número de generaciones (77).
2. El operador de selección que mejores resultados proporciona es la selección por torneo, suponiendo una gran diferencia en el número de generaciones con respecto a la selección estocástica universal y a la selección por ruleta. Esto se debe a que estos dos últimos operadores seleccionan a los padres en función de su aptitud, por lo que los individuos con mejor aptitud tienen una mayor probabilidad de ser elegidos. Esto provoca una falta de exploración la cual origina los estancamientos en la evolución de la compliance y la fracción de volumen que se pueden observar en la figura 4.36.

3. Todos los operadores de cruce analizados conllevan la eliminación de material hasta una fracción de volumen de forma similar. El cruce binario simulado es el que elimina material de una forma más rápida. Ello se debe a que los genes de los hijos con este operador se pueden encontrar localizados dentro o fuera de los genes de los padres, suponiendo una mayor exploración. Sin embargo, la generación de los hijos fuera de los genes de los padres puede ser contraproducente cuando se requiere un tamaño de paso pequeño para los puntos de control.
4. Para porcentajes de convergencia superiores al 85%, el mayor número de generaciones necesarias para alcanzar el óptimo aumenta. Además, el hecho de utilizar un  $\mu$ -GA hace que no sea necesario utilizar un operador de mutación, ya que este actúa como tal, manteniendo la diversidad de la población.



**Figura 4.39:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Influencia de la convergencia del  $\mu$ -GA. (a) 80%. (b) 85%. (c) 90%. (d) 95%. (e) 100%.

---

# CAPÍTULO 5:

## OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

---

En este capítulo se presenta una metodología alternativa para la optimización de topología con isolíneas usando programación matemática. El procedimiento desarrollado se asemeja al descrito en el capítulo anterior pero con las siguientes diferencias:

1. Los puntos de control definen el contorno exterior de la estructura y no uno virtual.
2. El movimiento de los puntos de control está controlado mediante programación matemática.

Este procedimiento está organizado en dos etapas. En la primera etapa se desarrolla la optimización de forma y en la segunda se desarrolla la optimización de topología. Antes de proceder a estas etapas, se realiza un resumen de los principales conceptos sobre programación matemática necesarios para una mejor comprensión del procedimiento desarrollado. Una descripción más detallada y rigurosa acerca de la programación matemática se puede encontrar en textos como Luenberger (1989) y Hafka y Gürdal (1992).

## 5.1. Programación matemática

La *programación matemática* (Mathematical Programming, MP) es un conjunto de métodos que tratan de buscar la solución del problema (1.1) mediante el uso de métodos numéricos, de tal forma que un conjunto de variables de diseño minimice o maximice la función objetivo satisfaciendo las restricciones impuestas. La función objetivo junto al conjunto de restricciones que limitan el espacio de diseño se conoce como programa matemático o problema de programación matemático.

La mayoría de estos métodos, son procesos iterativos en los que se genera una secuencia de puntos que se espera que converjan al óptimo. El procedimiento consiste en realizar una estimación inicial para el conjunto de las variables de diseño e ir actualizando iterativamente estas variables a partir del punto actual  $\mathbf{x}^k$  según la expresión

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d} \quad (5.1)$$

donde  $k$  representa la iteración actual,  $\alpha$  el tamaño de paso y  $\mathbf{d}$  la dirección de búsqueda. La actualización de las variables  $\mathbf{x}$  se lleva a cabo en dos etapas. La primera etapa consiste en determinar la dirección de búsqueda de cada una de las variables y la segunda en determinar el tamaño de paso a dar en la dirección de búsqueda. La búsqueda termina cuando no se puede mejorar el valor de la función objetivo sin violar alguna de las restricciones.

Los problemas de programación matemática se pueden clasificar en varias categorías dependiendo de la naturaleza y forma de las variables de diseño (variables discretas, enteras o continuas), y número y naturaleza de las funciones objetivos y restricciones (multiobjetivo, lineales y no lineales). Sin embargo, solo se centrará la atención en el problema restringido no lineal. Una revisión detallada acerca de los diferentes métodos existentes se puede encontrar en Hafka y Gürdal (1992).

### 5.1.1. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

El objeto de la programación matemática es encontrar un conjunto de variables de diseño que minimicen o maximicen la función objetivo. Sin embargo, el problema (1.1) puede presentar muchos mínimos locales. Solo bajo ciertas circunstancias se puede asegurar la existencia de un mínimo global. El *método del multiplicador de Lagrange* permite determinar los mínimos de un problema restringido. La función de Lagrange del problema (1.1) se define como

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n_d} \lambda_k g_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_i} \mu_j h_j(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\boldsymbol{\mu}$  son los vectores multiplicadores de Lagrange de las restricciones de desigualdad e igualdad, respectivamente. Una solución  $\mathbf{x}'$  del problema de optimización (1.1) debe de satisfacer las *condiciones de optimalidad* o de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) enunciadas como:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n_d} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0; & i=1 \dots n_x \\
 \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= g_k(\mathbf{x}) = 0; & k=1 \dots n_d \\
 \frac{\partial L}{\partial \mu_j} &= h_j(\mathbf{x}) = 0; & j=1 \dots n_i \\
 \lambda_k g_k &= 0; & k=1 \dots n_d \\
 \lambda_k g_k &\geq 0; & k=1 \dots n_d
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Las condiciones de KKT son también conocidas como condiciones estacionarias de primer orden, puesto que se basan en las derivadas de primer orden de la función Lagrangiana (Ec. 5.2). Las dos últimas condiciones KKT proporcionan información sobre que restricciones se encuentran activas o inactivas. Una restricción está activa si  $g_k = 0$  y  $\lambda_k > 0$ , e inactiva si  $g_k < 0$  y  $\lambda_k = 0$ .

Las condiciones KKT son condiciones necesarias para la determinación de una solución óptima global. Sin embargo, en algunos métodos de MP tales como programación lineal o programación cuadrática, las condiciones KKT son suficientes para la determinación de un óptimo global.

### 5.1.2. Análisis de sensibilidad

Se conoce como *análisis de sensibilidad de diseño* al proceso por el cual se determinan los gradientes de una función con respecto a las variables de diseño. Aunque el término correcto es “gradiente”, se ha adoptado el término de “sensibilidad” ya que este fue el utilizado por la Mac-Neal Schwendler Corporation (MSC) cuando se añadieron los cálculos de gradientes en el programa NASTRAN por primera vez.

La mayoría de los métodos de MP requieren del cálculo de los gradientes o sensibilidades de la función objetivo ( $\nabla f$ ) y de las restricciones ( $\nabla g_k$ ) para determinar la dirección de búsqueda.

Los métodos de análisis de sensibilidad se pueden agrupar en tres categorías generales: *métodos aproximados*, *métodos discretos* y *métodos continuos*. En los métodos aproximados, la sensibilidad se calcula de forma aproximada mediante *diferencias finitas*. En los métodos discretos, la sensibilidad se obtiene derivando la función objetivo y las restricciones respecto a las variables de diseño. En este proceso es necesario derivar la matriz de rigidez con respecto a las variables de diseño. Si dicha derivada se obtiene de forma analítica, a este método se le denomina *método analítico*. En muchos problemas de optimización estructural, no es posible determinar analíticamente  $\nabla f$  y  $\nabla g_k$ , sobre todo si tanto la función objetivo como las restricciones dependen implícitamente de las variables de diseño. Por ello, a menudo se utiliza un *método semianalítico* donde la derivada de la matriz de rigidez con respecto a las variables de diseño se obtiene de forma aproximada utilizando diferencias finitas. Los métodos continuos, tratan de obtener la sensibilidad realizando la diferenciación de la ecuación variacional (modelo continuo de la estructura) antes que la discretización. Este método se ha

utilizado sobre todo para el análisis de sensibilidad en optimización de forma utilizando la derivada material.

**Tabla 5.1:** Métodos de análisis de sensibilidad (Celorrio, 2013).

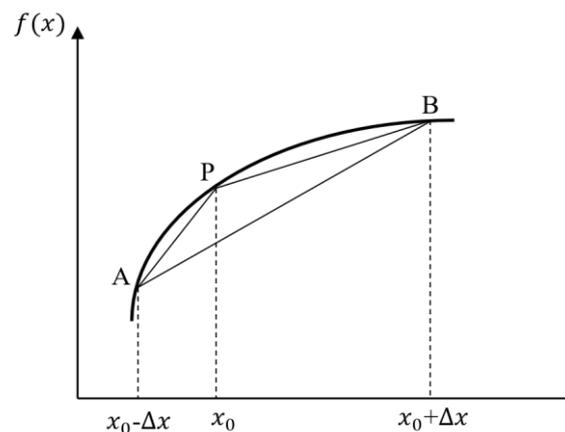
Método aproximado	Método de diferencias finitas hacia adelante
	Método de diferencias finitas hacia atrás
	Método de diferencias finitas centrales
Método discreto	Método analítico
	Método semianalítico
Método continuo	Método continuo-discreto
	Método continuo-continuo

En esta tesis únicamente se considerarán los métodos basados en diferencias finitas.

### 5.1.2.1. Diferencias finitas

El método de las diferencias finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de derivadas definidas en espacios finitos. Es un método sencillo y fácil de implementar, aunque normalmente requiere de un alto coste computacional.

A continuación se describen los esquemas de diferencias finitas más comunes.



**Figura 5.1:** Esquema de diferencias finitas.

**Diferencias finitas hacia adelante:** en este esquema, dada la función mostrada en la figura 5.1, la aproximación de la derivada de la función con respecto a la variable de diseño viene determinada por la pendiente del arco PB y se obtiene mediante la expresión:

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.4)$$

donde  $\Delta x$  es el tamaño de paso de la variable de diseño  $x$ ,  $x_0$  es el punto en donde se desea obtener la derivada y  $f(*)$  es el valor de la función para el parámetro  $*$ .

**Diferencias finitas hacia atrás:** en este esquema, la aproximación de la derivada de la función con respecto a la variable de diseño viene determinada por la pendiente del arco AP y se obtiene mediante la expresión:

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (5.5)$$

**Diferencias finitas centrales:** en este esquema, la derivada se determina mediante la pendiente AB, la cual se puede expresar como:

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (5.6)$$

Esta ecuación proporciona una aproximación más precisa de la derivada que las Ecs. (5.4 y 5.5), pero de forma menos eficiente. El número de evaluaciones necesarias para determinar el vector gradiente de la función es de  $2n + 1$ , mientras que con diferencias finitas hacia delante o hacia atrás son necesarias  $n + 1$ , siendo  $n$  el número de variables de diseño.

### 5.1.3. Algoritmos para la optimización con restricciones

Los problemas sin restricciones son muy escasos en optimización estructural. Por lo que, los problemas de optimización estructural son habitualmente restringidos. Los métodos de optimización no restringidos son importantes, ya que en muchos de los métodos de optimización con restricciones se transforma el problema en una serie de subproblemas no restringidos.

Los métodos de optimización restringidos pueden clasificarse en función del tipo de variables que utilicen (variables primales o variables duales) en:

**Métodos Primales:** estos trabajan directamente en el espacio  $n$ -dimensional de las variables de diseño  $\mathbf{x}$ . Estos métodos no utilizan ni los multiplicadores de Lagrange ni las condiciones de KKT y son muy útiles para manejar variables discretas. Los métodos primales más importantes son el *Método de las Direcciones Factibles* y el *Método del Gradiente Conjugado*.

**Métodos de Penalización:** estos métodos trabajan también en el espacio  $n$ -dimensional de las variables de optimización. Estos métodos transforman el problema restringido en una serie de sub-problemas no restringidos mediante la incorporación de funciones de penalización de las restricciones en la función objetivo para, finalmente, obtener una solución cercana al óptimo, pero no exactamente el óptimo. Por ello, estos métodos son considerados relativamente ineficientes. Uno de estos métodos es el *Método de Puntos Interiores*.

**Métodos duales:** estos métodos trabajan en el espacio dual  $m$ -dimensional de los multiplicadores de Lagrange (conjunto de  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\boldsymbol{\mu}$ ). Los métodos duales dividen el problema de optimización en dos problemas parciales que tienen que resolverse secuencialmente. Uno de ellos, es no restringido y se formula en función de  $\mathbf{x}$ , y el otro es restringido y se formula en función de  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\boldsymbol{\mu}$ .

**Métodos de Lagrange:** estos trabajan en el espacio  $(n+m)$ -dimensional de las variables primales y duales (conjunto de  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\boldsymbol{\mu}$ ). Estos métodos resuelven una secuencia de sub-problemas mediante la aplicación de las condiciones KKT. Estos sub-problemas son

caracterizados por una función objetivo cuadrática y restricciones de tipo lineal, por ello, son conocidos como *Métodos de Programación Cuadrática Secuencial* (Sequential Quadratic Programming, SQP). Los métodos SQP son considerados como uno de los métodos más sofisticados desde el punto de vista matemático, han sido aplicados con éxito en muchos problemas de optimización estructural y forman parte de casi todos los paquetes de optimización.

### 5.1.3.1. Programación Cuadrática Secuencial

Uno de los métodos de programación matemática más eficaces para la optimización de problemas restringidos no lineales es el método SQP. Este método se basa en el teorema de los conjuntos activos (active-sets), el cual especifica que el óptimo corresponde al punto mínimo de la función de Lagrange en el sub-espacio constituido por los vectores ortogonales de los gradientes de las restricciones activas. Para ello, se linealiza el problema mediante el método de Newton y se resuelve en cada paso un problema de programación cuadrática.

Por simplicidad, se considera en primer lugar el problema de optimización con restricciones de igualdad

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a:} && h_j(\mathbf{x}) = 0; && j = 1, \dots, n_i \\ &&& x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}; && i = 1, \dots, n_x \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para este problema, las condiciones de KKT son

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

La linealización de estas ecuaciones en la iteración actual  $\mathbf{x}^k$  y  $\boldsymbol{\lambda}^k$  mediante el método de Newton proporciona

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}^k + \nabla^2 f(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) + \boldsymbol{\lambda}^{kT} \nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) \\ + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)(\boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k) = 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde  $\mathbf{x}^k$  y  $\boldsymbol{\lambda}^k$  son el vector de variables y el vector de parámetros de Lagrange en la iteración actual. Estas ecuaciones se pueden escribir en notación matricial como

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L^k & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \\ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

donde  $\mathbf{d}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$  y  $\nabla^2 L^k = \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \boldsymbol{\lambda}^{kT} \nabla^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$ . Este problema es equivalente a resolver el siguiente subproblema de programación cuadrática

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k + \frac{1}{2} \mathbf{d}^{kT} \nabla^2 L(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}^k \\ &\text{sujeto a:} && h_j(\mathbf{x}^k) + \nabla h_j(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k = 0; && j = 1, \dots, n_i \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para el caso generalizado donde se incluyen las restricciones de desigualdad, la dirección de búsqueda  $\mathbf{d}^k$  y los nuevos multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}^k$  se obtienen a partir del siguiente sub-problema de programación cuadrática

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k + \frac{1}{2} \mathbf{d}^k \nabla^2 L(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}^k \\ \text{sujeto a:} \quad & g_k(\mathbf{x}^k) + \nabla g_k(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k = 0; \quad k = 1, \dots, n_d \\ & h_j(\mathbf{x}^k) + \nabla h_j(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}^k = 0; \quad j = 1, \dots, n_i \end{aligned} \quad (5.16)$$

el cual puede ser resuelto mediante alguno de los algoritmos para programación cuadrática descritos en Nocedal y Wright (2006).

Como se puede apreciar en la Ec. (5.16), para determinar la dirección de búsqueda es necesario determinar la matriz Hessiana de la función de Lagrange  $\nabla^2 L(\mathbf{x}^k)$ , la cual se compone de las segundas derivadas de la función objetivo y de las restricciones. En muchas ocasiones, esta no es fácil de calcular, por lo que es habitual calcular la matriz Hessiana mediante una aproximación cuasi-Newton, generalmente BFGS (Nocedal y Wright, 2006). Según el método BFGS la matriz Hessiana en la siguiente iteración se determina como

$$\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + \frac{\mathbf{q}^k \mathbf{q}^{kT}}{\mathbf{q}^{kT} \mathbf{d}^k} - \frac{\mathbf{H}^k \mathbf{d}^k \mathbf{d}^{kT} \mathbf{H}^k}{\mathbf{d}^{kT} \mathbf{H}^k \mathbf{d}^k} \quad (5.17)$$

donde  $\mathbf{q}^k = \nabla L(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1})^T - \nabla L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)^T$  y  $\mathbf{H}^k$  es la matriz Hessiana en la iteración actual.

Como consecuencia de usar una aproximación BFGS, es necesario realizar una búsqueda unidimensional para poder determinar el valor de las variables en la siguiente iteración ( $\mathbf{x}^{k+1}$ ). Una manera de realizar esta búsqueda unidimensional, es tratar de encontrar un tamaño de paso  $\boldsymbol{\alpha}$  que minimice la siguiente función de penalización, de modo que se imponga un alto coste a la violación de las restricciones

$$\psi(\boldsymbol{\alpha}) = f(\mathbf{x}) + \rho \left[ \sum_{j=1}^{n_i} |h_j(\mathbf{x})| + \sum_{k=1}^{n_d} \max\{0, g_k(\mathbf{x})\} \right] \quad (5.18)$$

siendo  $\rho$  es un coeficiente de penalización.

El algoritmo SQP se puede dividir en los siguientes pasos:

1. Dado el valor de las variables de diseño en la iteración actual  $\mathbf{x}^k$  y la Hessiana aproximada actual  $\mathbf{H}^k$ , se resuelve el sub-problema de programación cuadrática (Ec. 5.16) para obtener la dirección de búsqueda  $\mathbf{d}^k$  y los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}^k$ .
2. Dado  $\mathbf{d}^k$ , determinar el tamaño de paso  $\boldsymbol{\alpha}$  que minimice la función de penalización (Ec. 5.18) y a partir de esta actualizar las variables de diseño en la siguiente iteración  $\mathbf{x}^{k+1}$  según la Ec. (5.1).
3. Actualizar la matriz Hessiana  $\mathbf{H}^{k+1}$  utilizando la Ec. (5.17).
4. Comprobar si se satisface el criterio de convergencia. En caso contrario,  $k = i + 1$  y volver al paso 1.

El método SQP está implementado en la “Optimization Toolbox” de Matlab, el cual se ejecuta mediante la función “fmincon”.

## 5.2. Primera etapa: Optimización de forma

La primera etapa consiste en realizar una optimización de forma mediante programación matemática y el análisis de elementos finitos mediante una malla fija, de modo que se obtenga la geometría de mínima energía de deformación o compliance  $C(\mathbf{u})$  para una fracción de volumen dada:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & C(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ \text{sujeto a:} \quad & V(\mathbf{x}) = A^{(e)} t \sum_{j=1}^{n_e} \xi_j \leq V_{max} \quad ; j = 1, \dots, n_e \\ & x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup} \quad ; i = 1, \dots, n_x \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de desplazamientos,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global,  $V_{max}$  el volumen máximo admisible,  $A^{(e)}$  es el área del elemento,  $t$  el espesor del elemento,  $\xi_j$  el ratio de área normalizado del elemento  $j$  y  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas de los  $n_x$  puntos de control.

Para esto, el contorno exterior de la estructura se representa mediante una curva poligonal o una curva B-spline y sus puntos de control se consideran las variables de diseño. La optimización se realiza mediante el algoritmo SQP integrado en la función “fmincon” de Matlab. La función “fmincon” permite encontrar el mínimo (o máximo) de un problema multivariable con restricciones no lineales.

### 5.2.1. Metodología para la optimización de forma con malla fija y programación matemática

En el diagrama de flujo representado en la figura 5.2 se muestra de forma esquemática el proceso de optimización de forma usando programación matemática y el análisis con malla fija de elementos finitos. A continuación, se describen los principales pasos del algoritmo.

1. Definir las características del dominio inicial de la estructura: longitud, altura, espesor, etc.
2. Definir los parámetros de la programación matemática: tipo de diferencias finitas, tamaño de paso mínimo y máximo, número máximo de iteraciones, valores máximos y mínimos para las variables de diseño, dirección de movimiento, etc.
3. Establecer los parámetros de la malla fija: número de elementos en ambas direcciones, módulo de Young para material real y virtual, coeficiente de Poisson, tipo de elementos, orden de integración, condiciones de carga, condiciones de apoyo, etc.
4. Situar los puntos de control que definen el contorno exterior de la estructura.
5. Establecer la nueva posición de los puntos de control mediante el algoritmo SQP.

6. Analizar la respuesta estructural. En el caso de que un elemento se encuentre sobre el contorno de la estructura, utilizar el algoritmo de recorte para determinar la parte proporcional del elemento que se encuentre en el interior de la estructura.
7. Comprobar si se ha alcanzado la fracción de volumen. Si se cumple, ir al paso 8. En caso contrario, ir al paso 5.

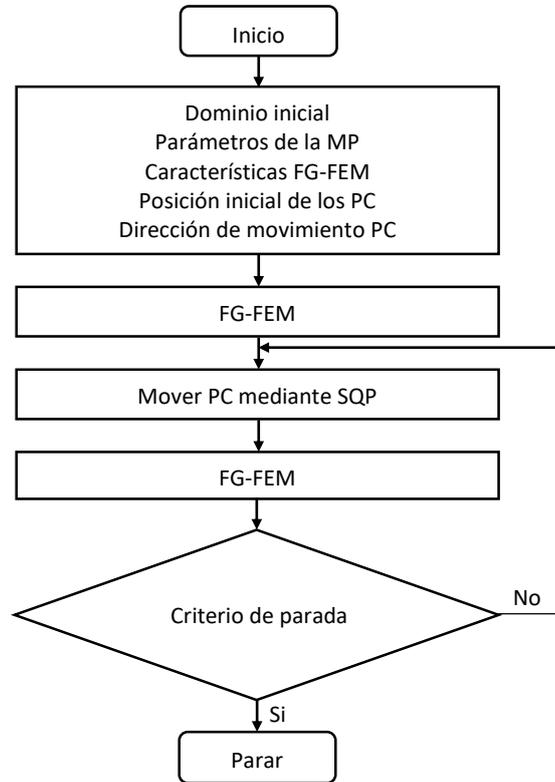


Figura 5.2: Diagrama de flujo para la optimización de forma con malla fija y programación matemática.

### 5.2.2. Voladizo corto de Michell con carga centrada en el borde libre.

El ejemplo estudiado es el voladizo corto de Michell. Este voladizo está sometido a una fuerza vertical de 100 N en el centro del extremo libre. Las dimensiones del dominio de diseño son de 16 mm de longitud, 10 mm de altura y 1 mm de espesor. Para realizar el análisis se ha utilizado una malla fija de 96×60 (5760) elementos. El elemento utilizado es el elemento plano rectangular para tensión plana de cuatro nodos, utilizándose cuatro puntos de Gauss para su integración numérica.

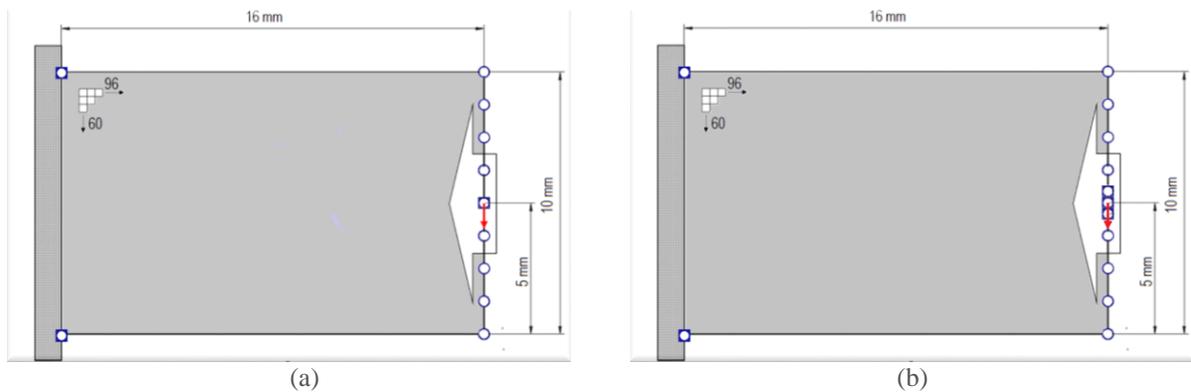
Los valores de los parámetros que definen las dimensiones del dominio de diseño (longitud, altura y espesor), y el análisis de elementos finitos con malla fija (número de elementos en dirección longitudinal y transversal, módulo de elasticidad real, relación entre módulo de elasticidad real y virtual, y coeficiente de Poisson) se encuentran recogidos en la tabla 4.1.

Los parámetros que controlan el algoritmo de programación matemática (tipo de diferencias finitas, tamaño de paso para las diferencias finitas, límites superiores e inferiores de las variables, fracción de volumen) son mostrados en la tabla 5.2.

**Tabla 5.2:** Parámetros que controlan la programación matemática.

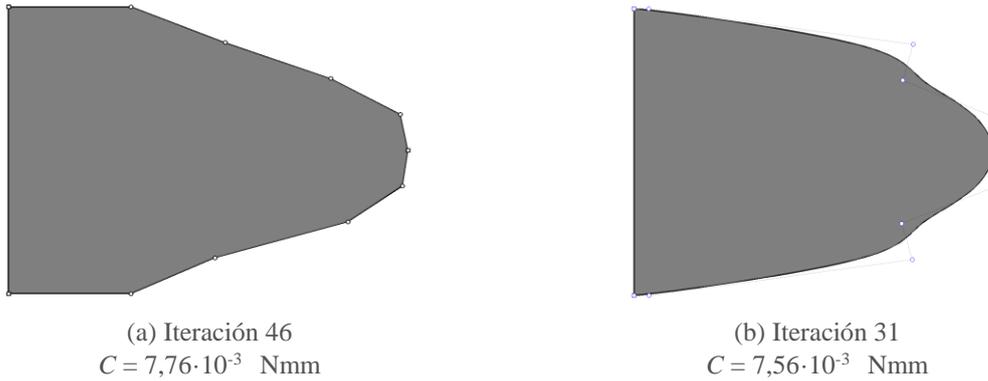
Ejemplo	Tipo de diferencias finitas	Tamaño de paso	$x^{inf}$ (mm)	$x^{sup}$ (mm)	$V/V_0$
Voladizo de Michell	centrales	1 elemento	0	16	0,75
Viga de Michell	centrales	1 elemento	0	80	0,8

En este ejemplo se estudian dos configuraciones. En la primera configuración el contorno estructural se define mediante una curva poligonal, mientras que en la segunda, el contorno estructural se define mediante una curva B-spline. En la figura 5.3 se muestra el dominio y la posición inicial de los puntos de control usando una curva poligonal y una curva B-spline. En esta figura, se pueden distinguir dos tipos de puntos de control: fijos y móviles. Los puntos de control fijos son representados por un círculo contenido en un cuadrado  $\square$ , en cambio, los puntos móviles son representados por un círculo  $\circ$ . Los puntos de control móviles únicamente pueden moverse en la dirección x. Como se puede observar en la figura, en el caso de utilizar una curva B-spline es necesario definir 2 puntos de control fijos más en el entorno de la carga para obligar a que el contorno pase por esta. Sin embargo, en ambos casos el número de variables es el mismo e igual a 8.



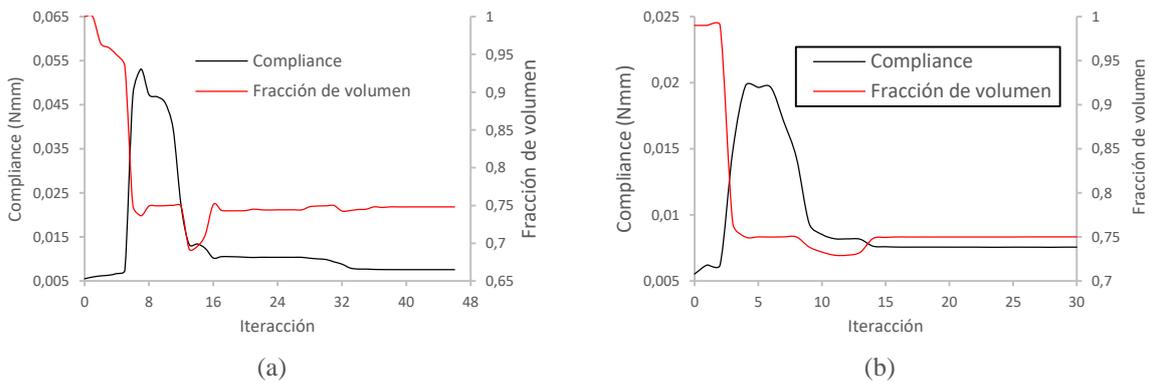
**Figura 5.3:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Disposición y dirección de movimiento de los puntos de control. (a) Curva poligonal. (b) Curva B-spline.

En la figura 5.4 se muestran las formas óptimas obtenidas con ambas configuraciones. La formas óptimas son obtenidas en las iteraciones 46 y 31 con valores de compliance de  $C = 7,76 \cdot 10^{-3}$  Nmm y  $C = 7,56 \cdot 10^{-3}$  Nmm y fracciones de volumen de  $V/V_0 = 0,748$  y  $V/V_0 = 0,749$  para una curva poligonal y una curva B-spline, respectivamente. La forma obtenida con una curva B-spline es un 2,64% más rígida a la forma obtenida con una curva poligonal.

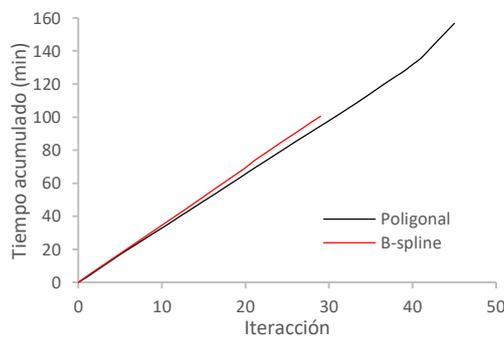


**Figura 5.4:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Formas óptimas. (a) Curva poligonal. (b) Curva B-spline.

En la figura 5.5 se muestra la evolución de la compliance y la fracción de volumen de ambas configuraciones. En estas se puede observar como los puntos de control se mueven inicialmente para satisfacer la restricción de volumen y una vez cumplida esta, se centran en minimizar la compliance.



**Figura 5.5:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Evolución de la aptitud y de la fracción de volumen. (a) Curva poligonal. (b) Curva B-spline.



**Figura 5.6:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Evolución del tiempo computacional.

En la figura 5.6 se muestra la evolución del tiempo computacional. Se puede observar como la evolución del tiempo computacional de ambas disposiciones siguen una tendencia lineal. Ello se debe, a que tanto en el caso de utilizar una curva poligonal para definir el contorno

estructural como en el caso de utilizar una curva B-spline, el número de análisis como los grados de libertad del modelo de simulación por iteración son los mismos. Por un lado, el número de análisis por iteración no varía ya que este depende del número de variables y por otro, los grados de libertad son los mismos por utilizar una malla fija de elementos finitos. Además, se observa como la pendiente utilizando la curva B-spline es ligeramente superior a la obtenida con la curva poligonal y el número de iteraciones necesarias para conseguir la forma óptima es menor.

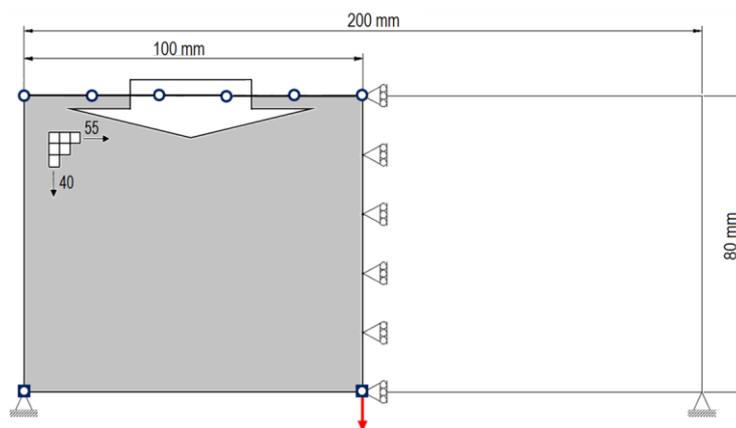
### 5.2.3. Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en el borde inferior

El segundo ejemplo es una viga con apoyos fijos en las esquinas inferiores y sujeto a una carga vertical de 1 kN centrada en el borde inferior. Debido a condiciones de simetría, se considera un dominio de diseño de 100 mm de longitud, 80 mm de altura y 1mm de espesor. El dominio de diseño se ha dividido en 2200 elementos, 55 en la dirección longitudinal y 40 en la transversal.

Los valores de los parámetros que definen las dimensiones del dominio de diseño (longitud, altura y espesor), y el análisis de elementos finitos con malla fija (número de elementos en dirección longitudinal y transversal, módulo de elasticidad real, relación entre módulo de elasticidad real y virtual, y coeficiente de Poisson) se encuentran recogidos en la tabla 4.1.

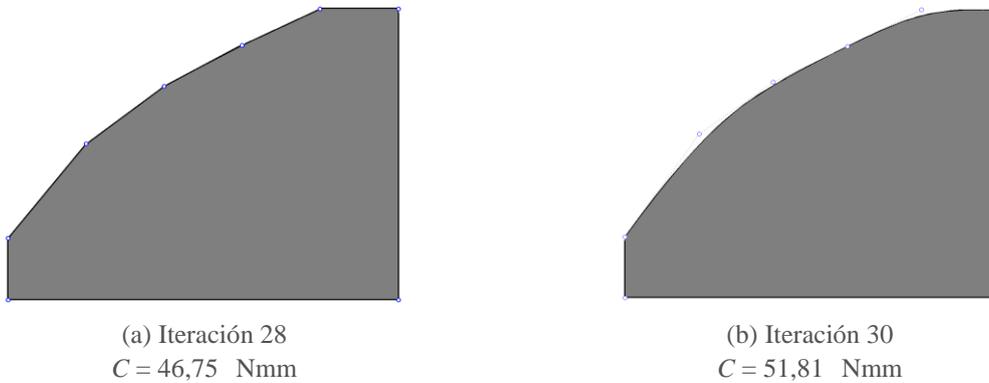
Los parámetros que gobiernan la programación matemática (tipo de diferencias finitas, tamaño de paso para las diferencias finitas, límites superiores e inferiores de las variables, fracción de volumen) son mostrados en la tabla 5.2.

En la figura 5.7, se muestra el dominio y la posición inicial de los puntos de control. Como se puede observar, el contorno exterior se define por medio de 8 puntos de control de los cuales 2 son fijos.



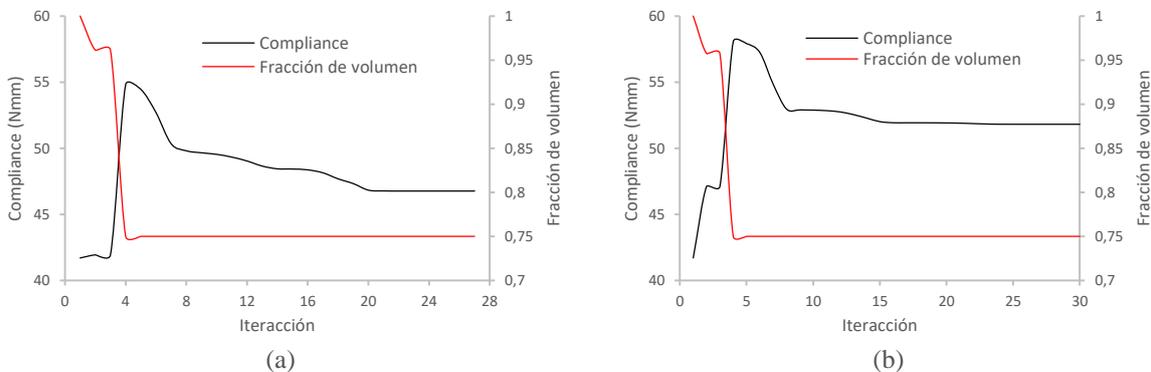
**Figura 5.7:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Disposición y dirección de movimiento de los puntos de control usando una poligonal. Optimización de forma.

En la figura 5.8, se muestran las formas óptimas obtenidas para un contorno definido mediante una curva poligonal y un curva B-spline. La formas óptimas son obtenidas en las iteraciones 28 y 30 con valores de compliance de  $C = 46,75\text{Nmm}$  y  $C = 51,81\text{ Nmm}$  y fracciones de volumen de  $V/V_0 = 0,75$  y  $V/V_0 = 0,7482$  para una curva poligonal y una curva B-spline, respectivamente. La geometría definida mediante una curva B-spline es un 9,87% menos rígida.



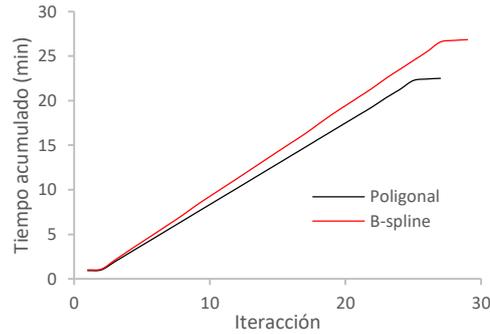
**Figura 5.8:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Formas óptimas. a) Curva poligonal. B) Curva B-spline.

En la figura 5.9, se muestra la evolución de la compliance y la fracción de volumen usando una curva poligonal y una B-spline. Al igual que en el voladizo corto de Michel, la optimización se centra primero en cumplir la restricción de volumen y una vez satisfecho se centra en minimizar el valor de la función objetivo.



**Figura 5.9:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución de la aptitud y de la fracción de volumen. (a) Curva Poligonal. (b) Curva B-Spline.

En la figura 5.10, se puede observar como mediante una curva poligonal el tiempo computacional por iteración (pendiente de la curva) es ligeramente inferior a la obtenida con la B-spline. Además, el número de iteraciones también es menor con la curva poligonal.



**Figura 5.10:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Comparación de la evolución del tiempo computacional usando una curva poligonal y una curva B-spline.

### 5.2.4. Conclusiones

Un factor clave a la hora de realizar una optimización es el tiempo computacional, el cual está relacionado con el número de análisis por iteración y el número de iteraciones para conseguir el óptimo.

Al utilizar un método de diferencias finitas para determinar el gradiente de la función objetivo ( $\nabla f$ ) y de las restricciones ( $\nabla g_k$ ), el número de análisis por iteración es de  $2n_x(n_F+n_R)+1$ , donde  $n_x$  es el número de variables o puntos de control móviles,  $n_F$  es el número de funciones objetivo y  $n_R$  el número de restricciones. Como se ha podido observar, el tiempo computacional por iteración no varía significativamente por el hecho de usar una curva poligonal o una B-spline, ya que en estas se ha utilizado el mismo número puntos de control. Sin embargo, las curvas B-spline permiten definir curvas, con un reducido número de puntos de control, de mayor precisión, con la consiguiente reducción en el tiempo computacional.

Por otro lado, no se puede asegurar que el uso de una curva B-spline implique un menor número de iteraciones para obtener el óptimo, ya que en el ejemplo del voladizo de Michell el número de iteraciones es menor al utilizar una curva B-spline con respecto a una poligonal, mientras que para el ejemplo de la viga de Michell ocurre el efecto contrario.

### 5.3. Segunda etapa: Optimización de topología.

La segunda etapa ha consistido en la realización de una metodología para la optimización de topología mediante programación matemática y el análisis de elementos finitos con malla fija. El objetivo es encontrar la estructura con menor energía de deformación que satisfaga la restricción de volumen deseada. Para ello, usando la programación matemática se controla el movimiento de una serie de PC que definen el contorno exterior de la estructura, método descrito en el apartado 5.2. A partir de este contorno, se extrae las isolíneas de un cierto valor de referencia ( $v_{ref}$ ). Una vez obtenidas las isolíneas, las cavidades interiores son obtenidas mediante la eliminación y redistribución de material en aquellas zonas donde se obtenga un valor de energía de deformación o compliance inferior y superior al valor de referencia respectivamente.

### 5.3.1. Función objetivo

En este capítulo únicamente se considera el problema de optimización que minimice la energía de deformación que satisfaga la restricción de volumen (Ec. 5.19), aunque puede ser fácilmente extensible al problema de minimización de la desviación estándar de las tensiones de von Mises en el contorno sujeto a una restricción de volumen.

### 5.3.2. Isolíneas de referencia

El valor de referencia para la extracción de las isolíneas es el valor medio filtrado de la energía de deformación sobre la curva (poligonal o B-spline) constituida por los PC descrita en el capítulo anterior y que se puede expresar como

$$v_{ref} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{i,fil} \quad (5.20)$$

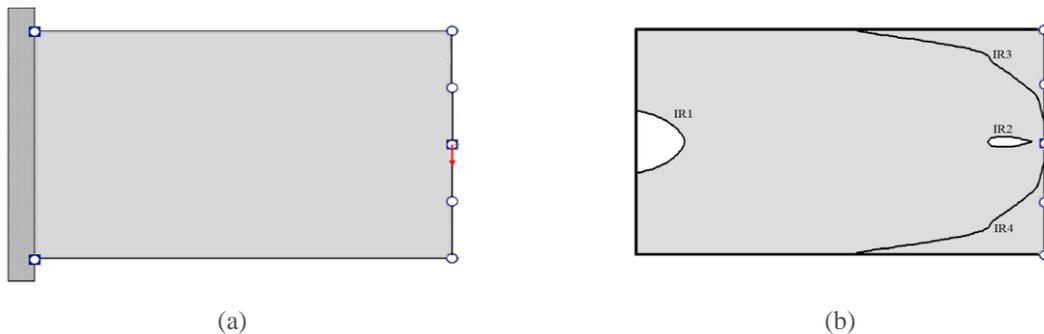
donde  $N$  es el número de puntos tomados sobre la curva poligonal o B-spline y  $C_{i,fil}$  es la energía de deformación filtrada sobre el punto  $i$ , la cual se define por la expresión

$$C_{i,fil} = \begin{cases} C_i & \text{si } C_i \leq \mu_C + \sigma_C \\ \mu_C + \sigma_C & \text{si } C_i > \mu_C + \sigma_C \end{cases} \quad (5.21)$$

donde  $\mu_C$  y  $\sigma_C$  son el valor medio y la desviación estándar de la energía de deformación, respectivamente.

### 5.3.3. Extracción de cavidades

Una vez determinado el valor de referencia de las isolíneas, es necesario determinar cuáles de las isolíneas para dicho valor son de interés. En la figura 5.11b se muestra cuatro isolíneas (IR1, IR2, IR3 y IR4) de un cierto valor de referencia para el dominio mostrado en la figura 5.11a. Como se puede apreciar, únicamente interesa realizar el recorte por aquellas isolíneas que definan nuevas cavidades (IR1 e IR2), ya que si se realiza el recorte por las isolíneas IR3 e IR4, este modifica el contorno exterior, el cual debe ser únicamente modificado por el movimiento de los puntos de control.

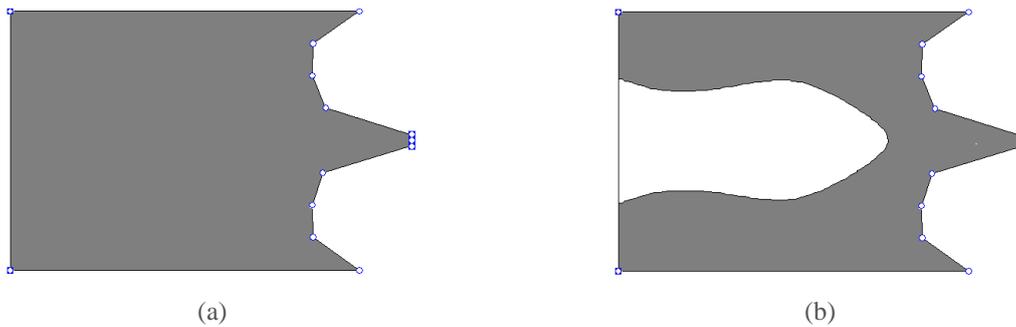


**Figura 5.11:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. (a) Dominio. (b) Definición de regiones a partir de las isolíneas para un valor de referencia.

Una vez determinada las isolíneas de interés, la nueva topología se obtiene utilizando el algoritmo de recorte descrito en el apartado 4.3.2, clasificando los elementos como interiores, exteriores o de borde.

### 5.3.4. Proceso de reducción de volumen

Al determinar la posición y la forma de las cavidades mediante las isolíneas de un cierto valor de referencia, hay que realizar la reducción de volumen de forma fragmentada, estableciendo fracciones de volúmenes intermedias hasta llegar a la fracción de volumen objetivo. Ello se debe, como se ha visto en el apartado 5.2, a que el método SQP primero busca cumplir la restricción de volumen y a continuación reducir la fracción de volumen. Este hecho, puede provocar cambios importantes en la posición de los puntos de control, lo que implica valores de referencia elevados para la isolínea de recorte, impidiendo la readaptación de la distribución de la energía de deformación. En la figura 5.12 se muestra el cambio de posición de los PC en la primera optimización para el problema (5.9) con una fracción de volumen igual a 0,2. La figura 5.12b muestra el recorte para el valor de referencia determinado mediante la Ec. (5.20). Como se puede observar, en esta primera iteración la cavidad originada es excesiva.



**Figura 5.12:** Recorte excesivo. (a) Posición de los PC en la primera iteración. (b) Extracción de cavidades.

Por ello, se cree necesario establecer una reducción de volumen iterativa hasta llegar a la fracción de volumen deseada. La cantidad de volumen a reducir en cada iteración viene determinada por la expresión

$$AV^k = \frac{(FV^{k-1} - FV_{obj}) * \Delta V_{max}}{(1 - FV_{obj})} + \Delta V_{min} \quad (5.21)$$

donde  $FV^{k-1}$  es la fracción de volumen de la iteración anterior,  $FV_{obj}$  es la fracción de volumen objetivo,  $\Delta V_{max}$  es el máximo cambio de volumen permitido y  $\Delta V_{min}$  es el mínimo cambio de volumen permitido. Con esta función se establece una relación lineal entre el cambio de volumen a realizar en la iteración actual respecto a la fracción de volumen en la iteración anterior. De este modo, se controla el cambio de posición de los PC sobre todo en las iteraciones iniciales, evitando que se produzcan cambios significativos de los PC. Además, de esta forma se alternan etapas que buscan satisfacer la reducción de volumen con etapas que buscan reducir el valor de la función objetivo

### **5.3.5. Metodología para la optimización de topología con malla fija y programación matemática**

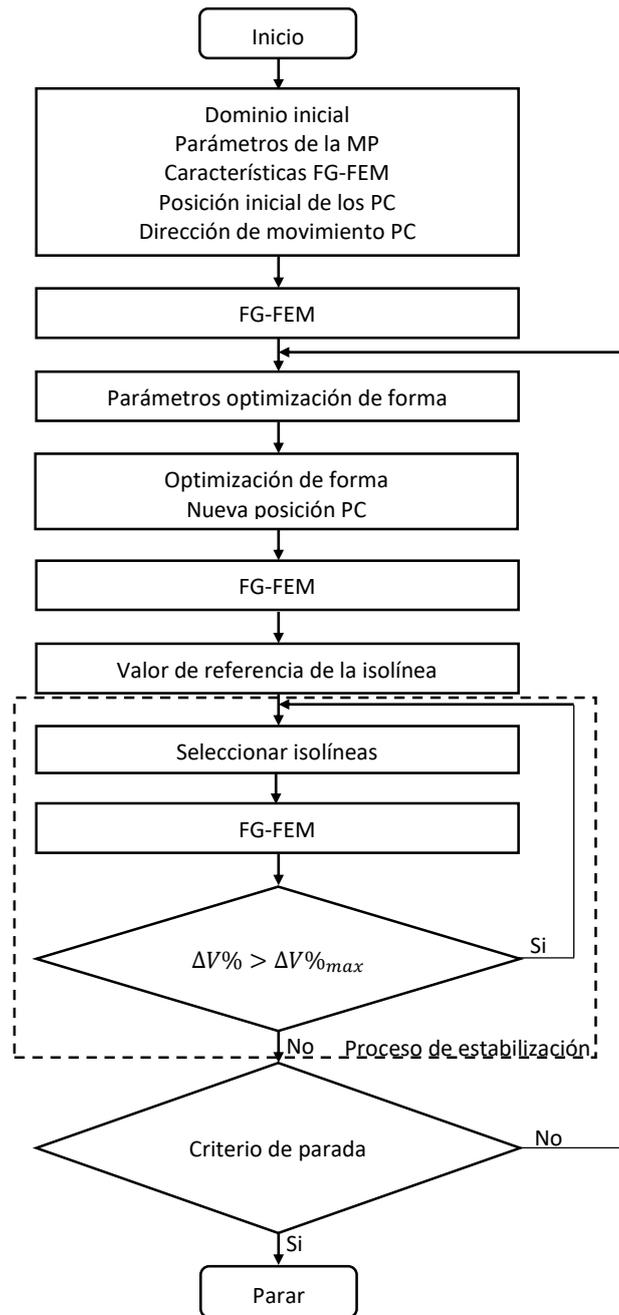
En el diagrama de flujo representado en la figura 5.13 se muestra de forma esquemática el proceso de optimización de topología mediante programación matemática y el análisis con una malla fija de elementos finitos. A continuación, se describen los principales pasos del algoritmo planteado.

1. Definir las características del dominio inicial de la estructura: longitud, altura, espesor, etc.
2. Establecer los parámetros de la malla fija: número de elementos en ambas direcciones, módulo de Young para el material real y el virtual, coeficiente de Poisson, tipo de elementos, orden de integración, condiciones de carga, condiciones de diseño, etc.
3. Situar los puntos de control que definen el contorno exterior de la estructura.
4. Establecer los parámetros que controlen la optimización de forma: tipo de diferencias finitas, tamaños de paso mínimos y máximos permitidos, número máximo de iteraciones, valores máximos y mínimos permitidos que pueden tomar las variables, dirección de movimiento, volumen a reducir en esta iteración.
5. Realizar la optimización de forma hasta la fracción de volumen objetivo fijada para la iteración mediante SQP.
6. Analizar la respuesta de la estructura.
7. Determinar el valor de referencia de la IR.
8. Seleccionar las isolíneas adecuadas para el valor de referencia.
9. Analizar la respuesta estructural. En el caso de que un elemento se encuentre intersectado por una isolínea, utilizar el algoritmo de recorte para determinar la parte proporcional del elemento que se encuentra en el interior de la estructura.
10. Si el cambio de volumen es mayor que el volumen de cambio máximo permitido, ir a al paso 8. En caso contrario ir al paso 11.
11. Comprobar si se alcanza la fracción de volumen mínima. Si no se alcanza ir al paso 4. En caso contrario ir al paso 12.
12. Detener el proceso de optimización

### **5.3.6. Voladizo corto de Michell con carga centrada en el borde libre.**

El primer ejemplo optimizado es el voladizo corto de Michell con una carga centrada en el borde libre. El dominio de diseño, la posición inicial y la dirección de movimiento de los puntos de control se muestran en la figura 5.3.

Los valores de los parámetros que definen las dimensiones del dominio de diseño (longitud, altura y espesor), y del análisis de elementos finitos con malla fija (número de elementos en dirección longitudinal y transversal, módulo de elasticidad real, relación entre módulo de elasticidad real y virtual, y coeficiente de Poisson) se encuentran recogidos en la tabla 4.1.



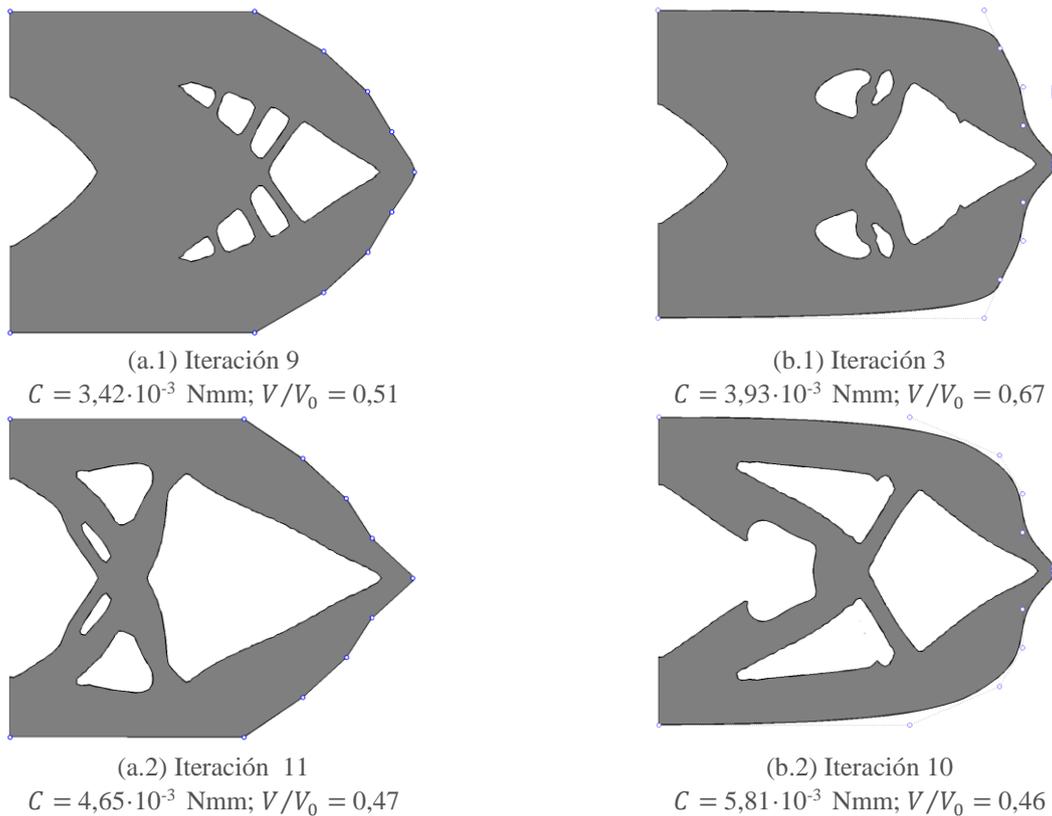
**Figura 5.13:** Diagrama de flujo para la optimización de topología con isolíneas, malla fija y programación matemática.

Los parámetros que controlan la optimización de forma (tipo de diferencias finitas, tamaño de paso en las diferencias finitas, límites superiores e inferiores de las variables, fracción de volumen objetivo, máximo y mínimo cambio de volumen permitido por iteración) se muestra en la tabla 5.3.

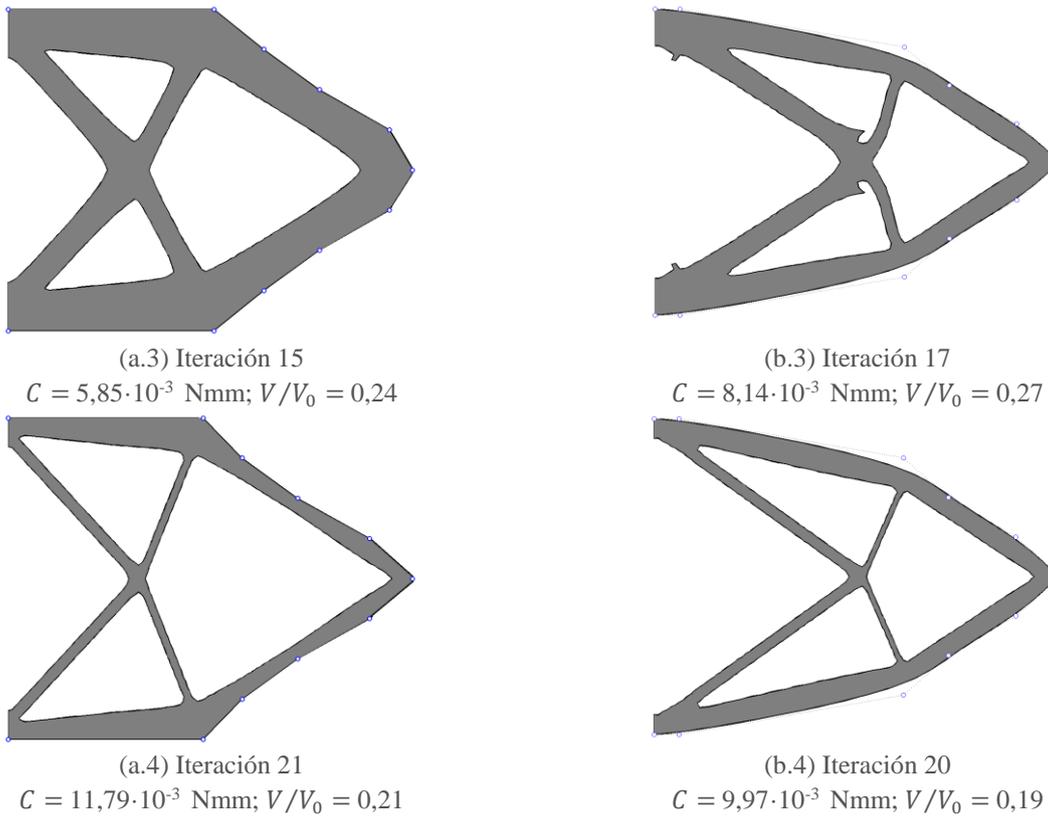
**Tabla 5.3:** Parámetros que controlan la optimización de forma.

Ejemplo	Tipo de diferencias finitas	Tamaño de paso	$x^{inf}$ (mm)	$x^{sup}$ (mm)	$V/V_0$	$\Delta V_{max}$	$\Delta V_{min}$
Voladizo de Michell	centrales	1 elemento	0	2	0,25	0,5	0,05
Viga de Michell	centrales	1 elemento	0	10	0,25	0,5	0,05

En la figura 5.14 se muestran algunas de las topologías que han ido surgiendo durante el proceso de optimización utilizando una curva poligonal y una B-spline para definir el contorno estructural. La topología óptima utilizando una curva poligonal se obtiene en la iteración 21, con un valor para la compliance de  $C = 11,79 \cdot 10^{-3}$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,21$ . La topología óptima utilizando una curva B-spline se obtiene en la iteración 20, con un valor para la compliance de  $C = 9,97 \cdot 10^{-3}$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,19$ . Como se puede observar, se obtiene la misma topología pero con geometrías completamente diferentes, siendo la topología obtenida mediante la curva B-spline un 18,5% más rígida que la obtenida usando la curva poligonal.



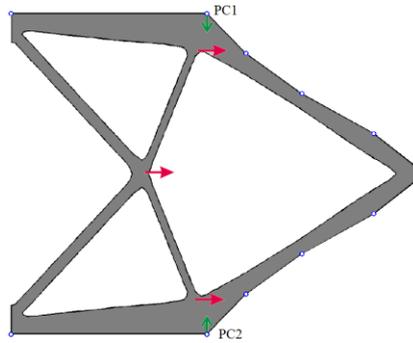
**Figura 5.14:** Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Poligonal. (b) B-spline.



**Figura 5.14:** Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Poligonal. (b) B-spline. (continuación)

Un inconveniente asociado con el uso de la curva poligonal sucede con los puntos superior e inferior derecho, (puntos PC1 y PC2 de la figura 5.15, respectivamente), ya que estos deberían desplazarse verticalmente para obtener una topología óptima similar a la obtenida en el capítulo anterior (ver figura 4.12). Por ello, la optimización debería ser realizada permitiendo el movimiento de los puntos de control en la dirección  $x$  y  $y$  del sistema coordenado. Como se puede observar en la figura 5.15, el movimiento vertical de estos dos puntos conllevaría un desplazamiento hacia la derecha de los puntos donde se unen las barras interiores, dando lugar a una geometría más parecida a la de la figura 4.12. Sin embargo, la mejora en la precisión de la topología mediante el movimiento de los puntos de control en ambas direcciones ( $x$  y  $y$ ) va en detrimento del coste computacional, ya que sería necesario realizar el doble de análisis para evaluar el gradiente mediante diferencias finitas. En cambio, usando la curva B-spline no se presenta dicho inconveniente ya que el movimiento del contorno exterior ocurre de forma global. Ello se debe, a que cada segmento que conforma la curva B-spline depende de la posición de 4 puntos de control, por lo que se consigue indirectamente el movimiento del contorno en ambas direcciones.

En la tabla 5.4 se muestran los valores correspondientes a la energía de deformación máxima y media en el dominio de diseño, las tensiones de von Mises máximas y medias, el valor de la isolínea de recorte, el valor de la compliance, la fracción de volumen, y el tiempo acumulado en distintas iteraciones.

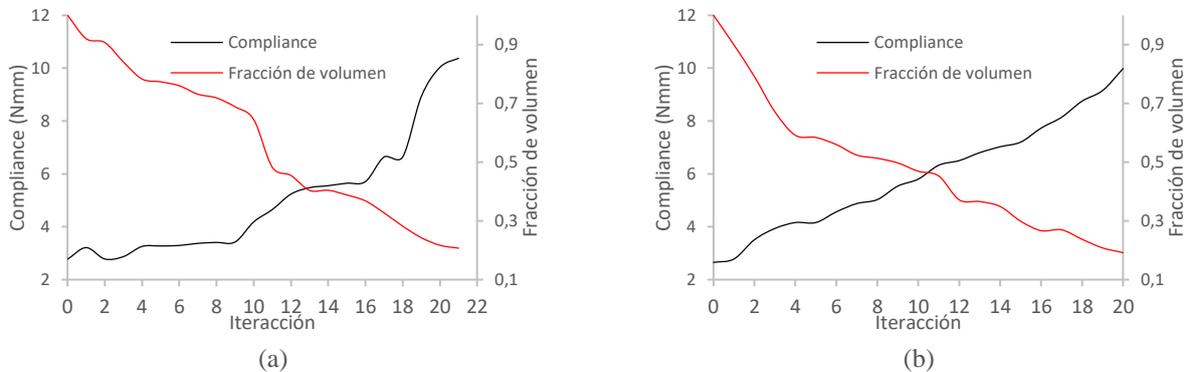


**Figura 5.15:** Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Inconvenientes asociados con el movimiento en una única dirección.

**Tabla 5.4:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. Resultados para diferentes iteraciones usando una curva poligonal y una curva B-spline.

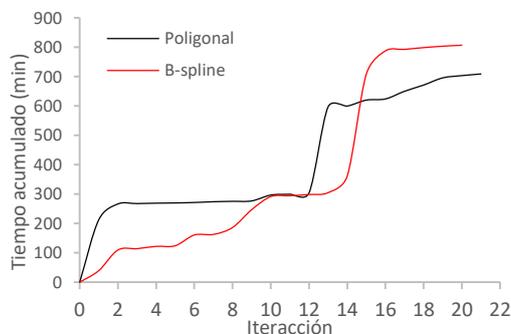
Tipo	It.	$C_i^{max}$ (N·mm)	$C_i^{med}$ (N·mm)	$\sigma_{VM}^{max}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{med}$ (MPa)	$Vref$ (N·mm)	Compliance (N·mm)	$\frac{V}{V_0}$	Tiempo (min)
Poligonal	0	2,52	1,72E-6	173,56	33,70	2,10E-5	2,77E-3	1,00	0
	7	3,54	4,12E-6	228,41	35,68	6,08E-2	3,42E-3	0,67	276,97
	8	6,89	7,05E-6	256,37	51,89	7,56E-2	4,65E-3	0,49	299,79
	22	8,99	7,56E-6	288,89	73,93	25,31E-2	5,85E-3	0,38	620,09
	23	12,83	12,17E-6	421,58	117,98	31,10E-2	11,79E-3	0,20	709,15
B-spline	0	2,40E-5	1,00E-6	173,22	33,48	0	2,65E-3	1	0
	6	4,30E-5	2,00E-6	241,53	46,19	6,00E-6	3,93E-3	0,67	114,35
	8	8,60E-5	3,00E-6	261,32	55,03	9,00E-6	5,81E-3	0,46	291,62
	10	9,90E-5	8,00E-6	350,50	95,33	26,00E-6	8,14E-3	0,27	792,77
	12	14,6E-5	14,00E-6	443,71	117,42	34,00E-6	9,97E-3	0,19	807,04

En la figura 5.16 se muestra la evolución de la compliance y la fracción de volumen para un contorno definido mediante una curva poligonal y una B-spline. En esta se observa como la evolución de la fracción de volumen mediante una curva B-spline ocurre de modo más suave. Esto puede ser uno de los motivos por el cual se obtiene con la curva poligonal la geometría resultante. Como se aprecia en la reducción de la fracción de volumen entre la iteración 10 y 11.



**Figura 5.16:** Voladizo corto de Michell con fuerza vertical de 100 N centrada sobre el borde libre. (a) Evolución de la compliance y fracción de volumen. (b) Evolución del tiempo computacional.

En la figura 5.17 se muestra el tiempo computacional para ambas configuraciones. Se pueden observar cambios bruscos en ciertas iteraciones, los cuales son debidos a un mayor coste computacional a la hora de obtener el contorno óptimo en dicha iteración. Además, se puede apreciar como a pesar de necesitar un reducido número de iteraciones el coste computacional es elevado.



**Figura 5.17:** Voladizo corto de Michell con carga vertical de 100N centrada sobre el borde libre. Evolución del tiempo computacional.

### 5.3.7. Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical centrada en el borde inferior

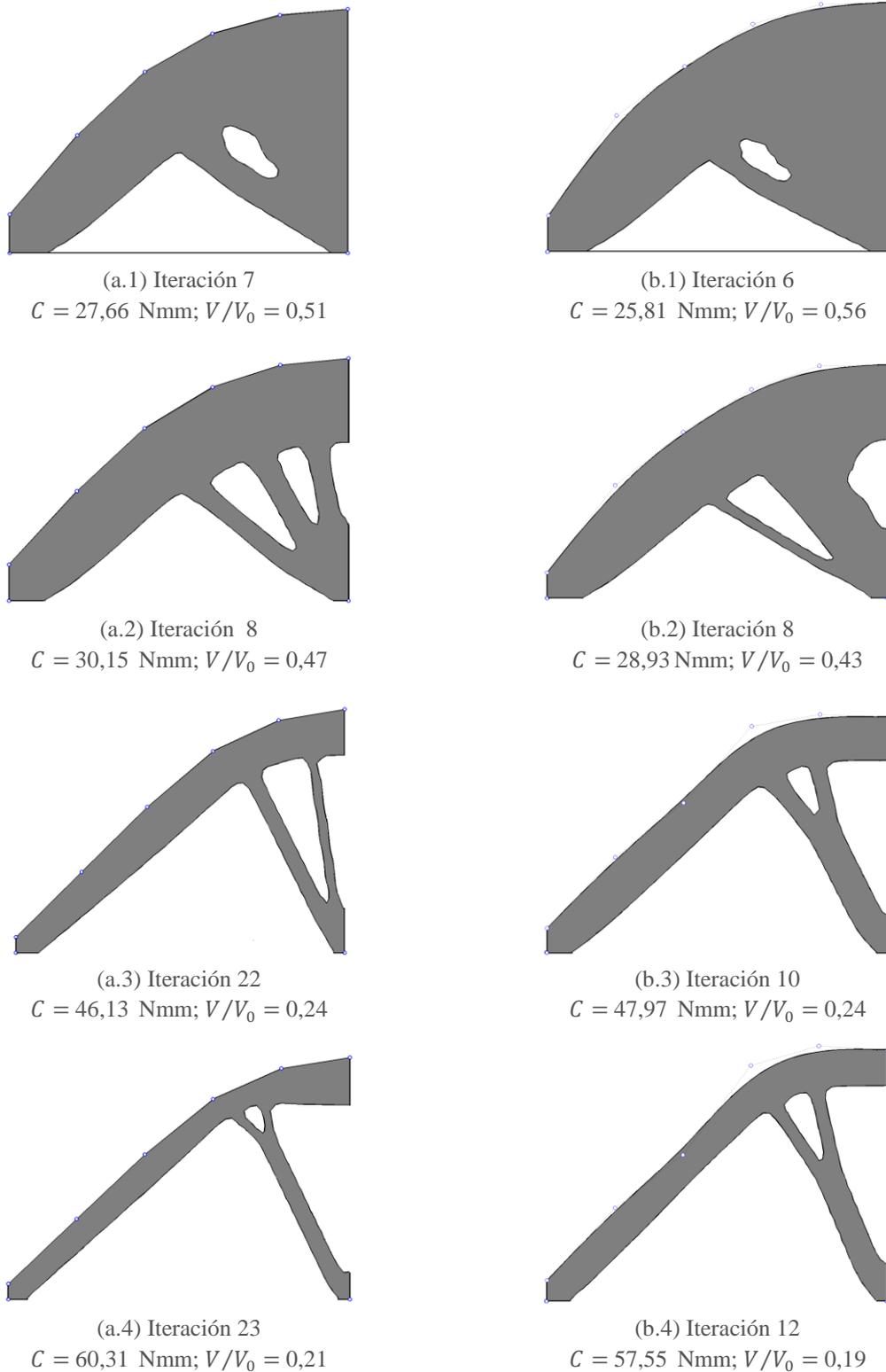
El segundo ejemplo es una viga con apoyos fijos en las esquinas inferiores y sujeto a una carga vertical de 1 kN centrada en el borde inferior. El dominio de diseño, la posición inicial y la dirección de movimiento de los puntos de control son mostrados en la figura 5.7.

Los valores de los parámetros que definen las dimensiones del dominio de diseño (longitud, altura y espesor), y el análisis de elementos finitos con malla fija (número de elementos en dirección longitudinal y transversal, módulo de elasticidad real, relación entre módulo de elasticidad real y virtual, y coeficiente de Poisson) se encuentran recogidos en la tabla 4.1.

Los parámetros que controlan la optimización de forma (tipo de diferencias finitas, tamaño de paso en las diferencias finitas, límites superiores e inferiores de las variables, fracción de volumen objetivo, máximo y mínimo cambio de volumen permitido por iteración) son mostrados en la tabla 5.3.

En la figura 5.18 se muestran algunas de las topologías que han ido surgiendo durante el proceso de optimización utilizando para definir el contorno exterior una curva poligonal y una curva B-spline. La topología óptima obtenida con una curva poligonal se obtiene en la iteración 23, con un valor para la compliance de  $C = 60,31$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,21$ . En el caso de utilizar una curva B-spline, la topología óptima se obtiene en la iteración 12, con un valor de compliance de  $C = 57,55$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,19$ . En ambos casos se obtiene la misma topología, pero mostrando geometrías sensiblemente diferentes. La topología obtenida mediante la curva B-spline es un 4,57% más rígida que la obtenida con la curva poligonal. Se puede apreciar también, como el contorno exterior definido mediante la curva B-spline es más suave, y el espesor de los distintos tramos o barras es más uniforme. Esto puede ser debido a la menor precisión de las curvas poligonales

para adoptar formas curvas, siendo necesario para mejorar dicha precisión una mayor segmentación, mediante un aumento de los puntos de control, con el consiguiente aumento computacional.



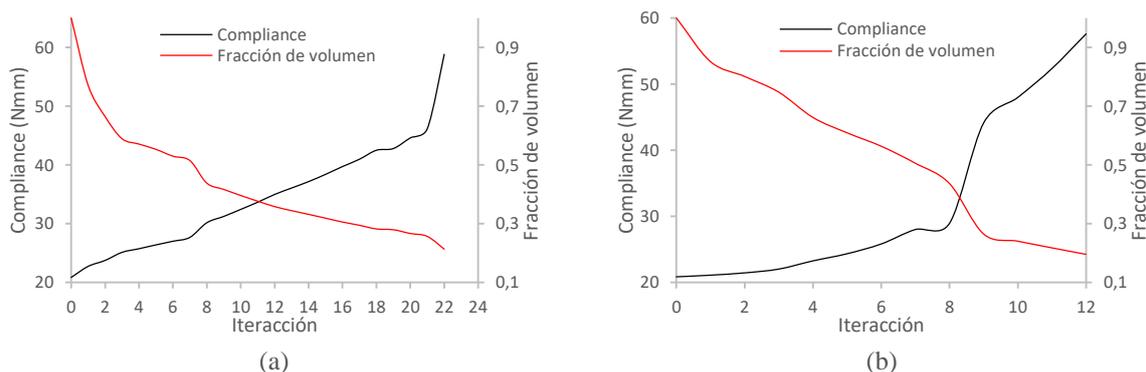
**Figura 5.18:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Topologías para diferentes generaciones y codificaciones. (a) Poligonal. (b) B-spline.

En la tabla 5.5 se muestran los valores correspondientes a la energía de deformación máxima y media, la tensiones de von Mises máxima y media, el valor de referencia de la isolínea de recorte, la compliance, la fracción de volumen y el tiempo acumulado en distintas iteraciones para ambos casos.

**Tabla 5.5:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Resultados para diferentes iteraciones para un contorno definido mediante una curva poligonal y una B-spline.

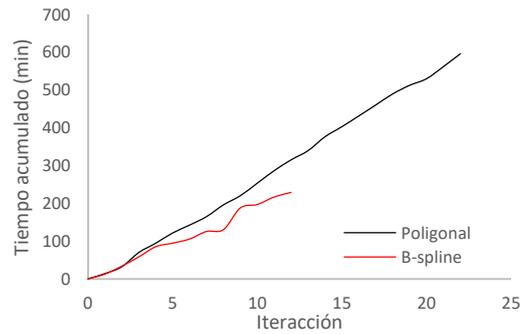
Tipo	It.	$C_i^{max}$ (N·mm)	$C_i^{med}$ (N·mm)	$\sigma_{VM}^{max}$ (MPa)	$\sigma_{VM}^{med}$ (MPa)	$Vref$ (N·mm)	Compliance (N·mm)	$\frac{V}{V_0}$	Tiempo (min)
Poligonal	0	5,77	1,72E-2	736,46	33,70	2,10E-5	20,84	1,00	0
	7	7,20	4,12E-2	824,77	57,50	6,08E-2	27,66	0,51	189,20
	8	7,29	5,00E-2	830,21	63,93	7,56E-2	30,15	0,43	220,24
	22	8,77	12,42E-2	911,27	101,37	25,31E-2	46,13	0,23	620,89
	23	9,64	18,21E-2	953,02	121,05	31,10E-2	58,81	0,20	629,15
B-spline	0	5,77	1,72E-2	736,46	33,70	2,50E-5	20,84	1	0
	6	6,95	3,52E-2	810,59	51,72	5,21E-2	25,81	0,56	105,47
	8	7,27	4,73E-2	829,16	62,57	12,22E-2	28,93	0,43	130,21
	10	7,70	13,53E-2	854,73	108,13	24,54E-2	47,97	0,24	196,85
	12	8,13	18,78E-2	878,13	125,05	38,10E-2	57,55	0,19	228,93

En la figura 5.19 se muestra la evolución de la compliance y de la fracción de volumen usando ambos tipos de curvas. Se puede observar como la eliminación de material ocurre de forma gradual con ambas curvas. Esto se debe al hecho de disponer los puntos de control sobre un contorno que no tiene cargas ni condiciones de contorno, lo cual hace que la evolución del valor de referencia de la isolínea ocurra de forma más gradual.



**Figura 5.19:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución de la compliance y de la fracción de volumen. (a) Curva poligonal. (b) Curva B-spline.

En la figura 5.20 se puede observar como el tiempo computacional por iteración utilizando una curva poligonal es mayor que utilizando una curva B-spline. Además, el número de iteraciones necesarias para conseguir el óptimo es también mayor. Sin embargo, el tiempo computacional por iteración con la B-spline sufre mayores fluctuaciones.



**Figura 5.20:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de 1000 N centrada sobre el borde inferior. Evolución del tiempo computacional.

## 5.4. Conclusiones

Analizando los resultados obtenidos se puede determinar que:

1. Las topologías óptimas obtenidas mediante el uso de una curva B-da como resultado soluciones más precisas y rígidas que las obtenidas mediante el uso de una curva poligonal.
2. La precisión del contorno exterior depende del número de puntos de control y de las direcciones de movimiento permitidas. Ambos casos conlleva un aumento en el número de análisis necesarios para evaluar los gradientes, con el consiguiente aumento computacional. Un proceso alternativo para disminuir el número de análisis por iteración y acelerar el proceso de optimización, considerado como trabajo futuro, sería determinar una expresión analítica para determinar los gradientes en lugar de utilizar diferencias finitas.

Además si se comparan los resultados obtenidos en este capítulo con los obtenidos en el capítulo anterior se puede concluir que:

1. El método propuesto en este capítulo se realiza una optimización de forma para definir el contorno exterior de la estructura y a partir de este se determina las isolíneas para un cierto valor de referencia a partir de las cuales se definen las cavidades. Ambos procesos se llevan a cabo de modo independiente. Ello quiere decir, que cuando se está realizando la optimización de forma las cavidades permanecen inalterables y de igual modo, cuando se definen las nuevas cavidades el contorno exterior permanece inalterable. Esta independencia de los procesos puede dar lugar a intersecciones entre el contorno exterior y las cavidades, dando lugar a soluciones no factibles. En cambio, con el método propuesto en el capítulo anterior no se produce este problema, ya que tanto el contorno exterior como las cavidades se definen de forma integrada a partir de las isolíneas de cierto valor. Un proceso alternativo para aliviar este problema, considerado como un trabajo futuro, sería que una vez determinada la cavidad, definir la misma mediante una serie de puntos de control y controlar el movimiento de estos mediante el algoritmo SQP. De esta forma, tanto el contorno exterior como las cavidades estarían controlados dentro del mismo proceso. Sin embargo, este método supondría aumentar el número de puntos de control, siendo imprescindible determinar de forma analítica el gradiente.

2. Las topologías óptimas obtenidas en este capítulo son menos suaves y precisas que las obtenidas en el capítulo anterior, ya que en el capítulo anterior tanto el contorno exterior como las cavidades vienen determinadas a partir de las isolíneas de un cierto valor de referencia independientemente de que se utilice una curva poligonal o una curva B-spline para definir el contorno virtual a partir del cual se determina el valor de referencia. Sin embargo, en este capítulo el contorno exterior es dependiente de la posición de los puntos de control, por lo que la suavidad de este va a depender del número de puntos de control utilizados, siendo necesario para el caso de utilizar una curva poligonal un alto número de puntos de control.
3. En este capítulo es necesario llevar a cabo la reducción de volumen de un modo iterativo, ya que el método SQP se centra primero en satisfacer las restricciones y una vez satisfechas, en minimizar la función objetivo. Por ello, si se lleva a cabo una reducción de volumen directa puede provocar soluciones en las que no se genere cavidades.
4. A pesar de que el número de iteraciones para conseguir el óptimo mediante SQP es menor, el tiempo computacional es considerable. Ello se debe a que el número de sub-iteraciones necesarias para conseguir la forma óptima en cada iteración es variable, pudiendo dar origen a grandes fluctuaciones entre iteraciones.
5. El método utilizado en este capítulo tiene un elevado número de parámetros (tipo de diferencias finitas, tamaño de paso mínimo y máximo para las evaluar el gradiente mediante diferencias finitas, direcciones de movimiento, máximo y mínimo desplazamiento permitidos de los puntos de control, número de sub-iteraciones, etc.) los cuales, en base a los ejemplos realizados, tienen una elevada influencia sobre el proceso de optimización. Una mala configuración de estos puede dar lugar a 1) desplazamientos de los puntos de control excesivos originando un elevado valor de referencia y por consiguiente una elevada eliminación de material; 2) desplazamientos de los puntos de control mínimos con el consiguiente aumento en el número de iteraciones para alcanzar el óptimo; y 3) evaluaciones erróneas del gradiente por utilizar tamaños de pasos no adecuados.

---

# **CAPÍTULO 6:**

## **DISEÑO ÓPTIMO ROBUSTO DE TOPOLOGÍA: MÉTODOS**

---

Los parámetros aplicados a los métodos propuestos, hasta este momento, se han tratado desde un punto de vista determinista. Sin embargo, este modo de considerar los parámetros en el problema de optimización es una idealización de la realidad, ya que todo problema tiene asociado inherentemente una serie de incertidumbres. Esta idealización es motivada generalmente para una mayor claridad en la definición, o por disminuir la dificultad de implementación, o para reducir el coste numérico del problema.

Como se mencionó en el capítulo 1, la consideración de la incertidumbres en el problema de optimización ha estimulado la aparición de formulaciones tanto probabilistas como no-probabilistas. Actualmente, para la optimización de topología se pueden distinguir dos tipos de formulaciones probabilistas o estocásticas, las basadas en fiabilidad o en el diseño robusta. Esta tesis se centra únicamente en la formulación RTO. Por ello, en este capítulo se muestra una revisión acerca de las diferentes técnicas existentes para tratar el problema RTO.

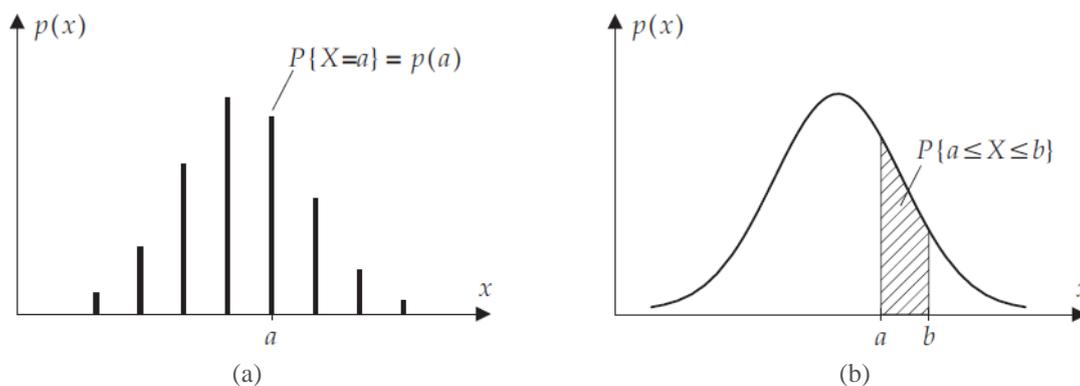
## 6.1. Fundamentos estadísticos

### 6.1.1. Variable aleatoria

Una variable o parámetro de diseño que exhibe incertidumbre se denomina *variable aleatoria*. Las variables aleatorias son designadas mediante una letra mayúscula, tal como  $X$ . Todas las funciones y cantidades estadísticas que caracterizan a una variable aleatoria particular, se designan con la respectiva letra mayúscula. En cambio, la correspondiente letra minúscula  $x$  se utiliza para designar un posible valor de  $X$ . El conjunto formado por todos los resultados posibles que se pueden obtener para  $X$  se denomina *espacio muestral*  $\Omega$ .

Las variables aleatorias se pueden clasificar en discretas y continuas. Se dice que una variable aleatoria es *discreta* si el conjunto de valores que puede tomar es puntual y contable. Por el contrario, se dice que una variable aleatoria es continua si el conjunto de valores que puede tomar consiste en uno o más intervalos de  $\Re$ .

El carácter de una variable aleatoria se especifica mediante su *función de distribución de probabilidad*  $p_X(x)$ . La función de distribución de probabilidad cuantifica la probabilidad  $P$  de que ocurra un evento específico. Si  $X$  es una variable discreta, la función de distribución de probabilidad se denomina *función de probabilidad* o *función de probabilidad de masa* y cuantifica la probabilidad de que ocurra un evento específico “ $a$ ”, mientras que para el caso en el cual  $X$  sea continua, se denomina *función de densidad de probabilidad* (probability density function, pdf) y cuantifica la probabilidad de que ocurra el intervalo  $\{a \leq X \leq b\}$ . La figura 6.1 muestra un ejemplo para distribuciones de probabilidad discreta y continua.



**Figura 6.1:** Función de distribución de probabilidad  $p_X(x)$  para una variable aleatoria  $X$ .  
(a) Discreta. (b) Continua.

Con objeto de aumentar la claridad, únicamente se van a considerar las variables aleatorias continuas ya que el objetivo de esta tesis es la optimización de topología robusta de estructuras continuas. Una revisión más detallada sobre variables aleatorias discretas se puede encontrar en Montgomery y Runger (2003).

La función de densidad de probabilidad para el caso de variables aleatorias continuas debe tener las siguientes propiedades:

$$0 \leq p_X(x) \leq 1 \quad (6.1)$$

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b p_X(x) dx \quad (6.2)$$

$$\int_{\Omega} p_X(x) dx = 1 \quad (6.3)$$

Una función fundamental en estadística es la función de distribución acumulada (cumulative distribution function, cdf), la cual cuantifica la probabilidad de que una realización aleatoria de  $X$  sea menor que el valor  $a$ .

$$F(x) = P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a p_X(x) dx \quad (6.4)$$

Dos importantes medidas estadísticas son el *valor medio*  $\mu$  y la *varianza*  $\sigma^2$ . El valor medio de una distribución, o *valor esperado*, es una medida de la tendencia central de la distribución, mientras que la varianza es una medida de la dispersión.

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} x p_X(x) dx \quad (6.5)$$

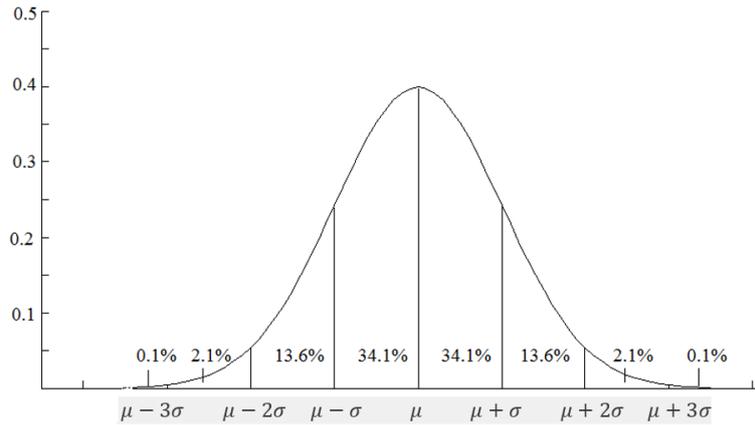
$$\sigma^2 = V[X] = \int_{\Omega} [x - \mu_x]^2 p_X(x) dx \quad (6.6)$$

Una medida muy utilizada en problemas es la *desviación estándar*  $\sigma$ . Esta es la raíz cuadrada positiva de la varianza y es a menudo preferida al permitir medir la variabilidad o dispersión en la misma dimensión que la variable aleatoria  $X$ . En la literatura específica se pueden encontrar también otras medidas estadísticas (Montgomery y Runger, 2003; Ross, 1987).

La mayoría de las variables aleatorias utilizadas en los problemas de ingeniería se pueden cuantificar usando unas pocas pdfs. La *distribución normal* o *Gaussiana* se considera la pdf más importante en estadística por dos razones: por un lado, un elevado número de incertidumbres se pueden modelar mediante esta distribución, y por otro, permite la aproximación de algunas otras pdfs a través del *teorema central del límite*. La pdf de la distribución normal viene definida por la expresión

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.7)$$

La distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  se denota normalmente por  $N(\mu, \sigma^2)$ . Así, la notación  $X \sim N(0,1)$  describe una variable aleatoria  $X$  que es normalmente distribuida con media 0 y varianza 1 también conocida como *normal estándar*. Otras distribuciones importantes son la distribución uniforme, Weibull, Poisson, exponencial, gamma, beta, etc. Detalles de estas distribuciones se pueden encontrar en Montgomery y Runger (2003) y Ross (1987).



**Figura 6.2:** Función de densidad de probabilidad de una variable normal estándar:  $N(0,1)$

### 6.1.2. Vector aleatorio

En muchos problemas ocurren a la vez varias fuentes de incertidumbre. Para establecer una anotación clara, estas variables aleatorias comúnmente se expresan mediante un *vector aleatorio*. Dado un espacio muestral  $\Omega$ , diremos que  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$  es un vector aleatorio  $n$ -dimensional si cada una de sus componentes es una variable aleatoria. Análogamente, el vector de valores medios  $\boldsymbol{\mu}$  para todas las componentes  $\mathbf{X}$  se designa como

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = [\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]]^T = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T \quad (6.8)$$

La *covarianza*  $\sigma_{XY}$  es una medida que expresa la relación lineal existente entre dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (6.9)$$

Para el caso multidimensional, la relación existente entre las variables se expresa por medio de la *matriz de covarianza*  $\mathbf{C}$ , la cual se define como

$$\mathbf{C} = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)] \quad (6.10)$$

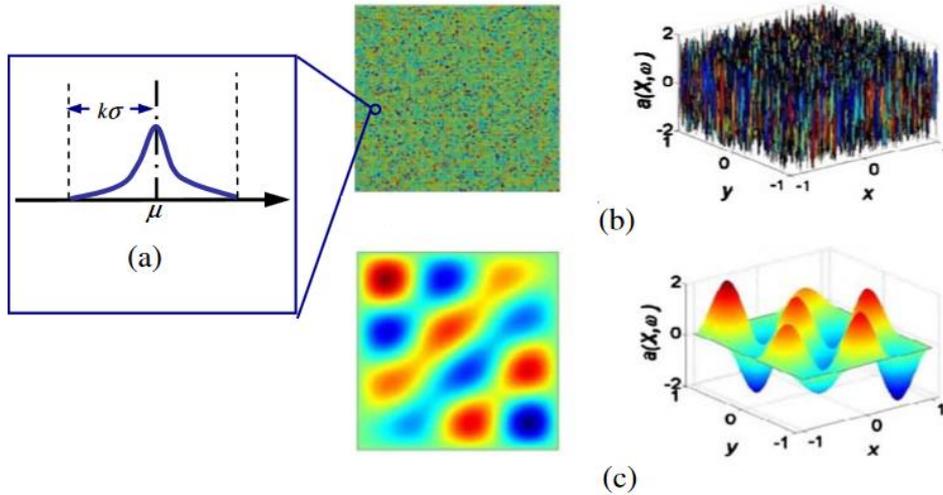
Si todas las  $n$  variables aleatorias son mutuamente independientes o lo que es lo mismo, las variables aleatorias son incorreladas ( $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ ), la función de distribución  $n$ -dimensional, también conocida como *función de densidad conjunta* (joint density function, jdf)  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , es el producto de las pdfs de cada una de las variables aleatorias

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i) \quad (6.11)$$

Para variables aleatorias correladas con pdfs arbitrarias, la jdf se puede obtener mediante transformaciones a variables estadísticamente independientes. Las variables aleatorias relacionadas con el diseño estructural (dimensiones, cargas, propiedades de material, etc.) son la mayoría de las veces estadísticamente independientes, por ello no es habitual mencionar las diferentes técnicas de transformación existentes. Para un mayor detalle se puede consultar Bucher y Macke, (2004).

## 6.2. Proceso estocástico y campo estocástico

Un *proceso estocástico* es un concepto estadístico que sirve para caracterizar el comportamiento de una o varias variables aleatorias a lo largo del tiempo  $X(t)$ . Cada una de estas variables tiene su propia pdf y pueden estar o no correlacionadas entre sí. Sin embargo, si las variables aleatorias dependen del espacio se denomina *campo estocástico*. En la figura 6.3 se muestra la realización de una variable aleatoria, y de un campo aleatorio con una correlación fuerte y débil.



**Figura 6.3:** Realización de: (a) variable aleatoria, (b) campo aleatorio con correlación débil y (c) campo aleatorio con correlación fuerte. (Chen et al., 2010).

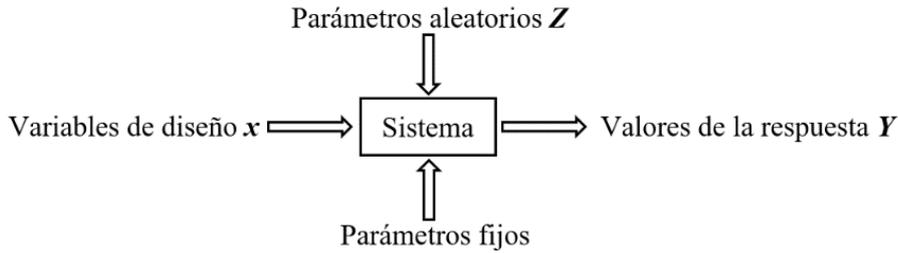
## 6.3. Formulación del problema estocástico

En los problemas de optimización, las variables aleatorias pueden presentarse en el sistema de parámetros  $Z$  o como parte de las variables de diseño  $X$ . Ejemplos típicos de parámetros aleatorios en un problema de optimización estructural son las cargas variables, como las cargas de viento o las propiedades de material. En cambio, variables de diseño aleatorias típicas son las dimensiones de los elementos estructurales o la resistencia del material. Estas variables de diseño pueden alterarse durante la optimización pero solo hasta una cierta precisión según su tolerancia o distribución de probabilidad correspondiente. Para obtener la solución de los problemas de optimización bajo incertidumbres, las variables de diseño aleatorias suelen dividirse en dos partes: el valor nominal  $x$  el cual se considera como una variable de diseño determinista y una parte aleatoria residual  $Z$  que se trata como un parámetro aleatorio con su pdf correspondiente y que desplaza el valor de las variables de diseño de su valor nominal.

$$X = x + Z \quad (6.12)$$

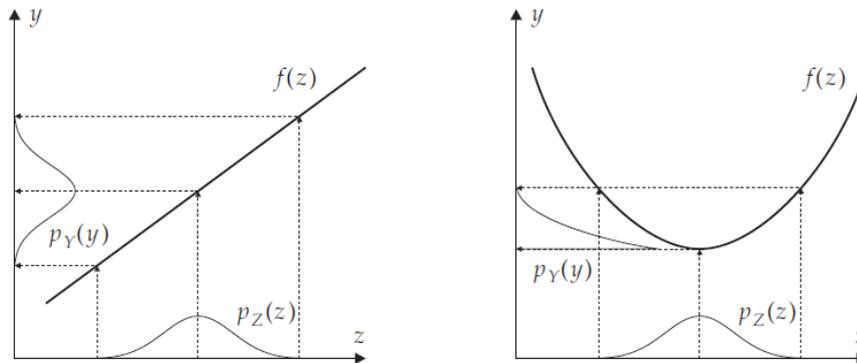
En la figura 6.4 se muestra el esquema típico de un sistema sobre el cual se considera el efecto de las incertidumbres. Las variables de diseño  $x$  son exclusivamente variables deterministas y todas las variables aleatorias son combinadas en un vector aleatorio  $Z$ . Los

parámetros fijos representan todos aquellos parámetros determinísticos que tienen influencia sobre el sistema, pero que están más allá del control del diseñador.



**Figura 6.4:** Esquema típico de un sistema que considera el efecto de las incertidumbres

En los problemas de optimización donde se considera la existencia de incertidumbres, la formulación expresada en las Ecs. (1.1) no pueden ser utilizadas porque el valor de la respuesta para la función objetivo  $f(\mathbf{x})$ , las restricciones de desigualdad  $g(\mathbf{x})$  y las restricciones de igualdad  $h(\mathbf{x})$  no son valores determinísticos. En la figura 6.5 se muestra el caso de un problema con una variable aleatoria  $Z$  caracterizada por una función de densidad de probabilidad  $p_Z(z)$ . Como se puede observar, la función de densidad de probabilidad de la respuesta  $p_Y(y)$  depende en gran medida de las ecuaciones que gobiernen el problema, ya que  $p_Y(y)$  se obtiene por proyectar  $p_Z(z)$  sobre las ecuaciones que gobiernan el problema. En un problema de optimización bajo incertidumbre, las funciones objetivo  $f(\mathbf{x})$  y las restricciones  $g(\mathbf{x})$  y  $h(\mathbf{x})$  mapean las variables aleatorias de entrada del sistema en valores de respuestas aleatorias.



**Figura 6.5:** Influencia de la variable aleatoria  $Z$  con función de densidad de probabilidad  $p_Z(Z)$  en la función de densidad de probabilidad  $p_Y(y)$  de la respuesta  $Y$ . (Jurecka, 2007)

Para resolver un problema de optimización con variables aleatorias (Ecs. 1.9) es necesario sustituir el problema por otro equivalente cuyas respuestas sean deterministas. Esto normalmente se realiza mediante estadística descriptiva, la cual permite extraer cantidades deterministas de valores aleatorios de la respuesta. Existen muchas alternativas para transformar el problema de optimización original con valores aleatorios de la respuesta a otro problema de optimización con salidas deterministas. Debido a ello, en los problemas de optimización con variables aleatorias, la función objetivo y las restricciones de igualdad y desigualdad estocásticas son reemplazadas por una formulación sustituta. Como se mencionó

en el capítulo 1, se pueden distinguir dos tipos de formulaciones dependiendo de si las variables aleatorias afectan a las restricciones o a la función objetivo: RBDO o RDO, respectivamente.

En el problema RDO, objeto de esta tesis, se buscan soluciones poco sensibles ante la presencia de incertidumbres. En optimización estocástica, se dice que un diseño  $\mathbf{x}^*$  es óptimo si cumple la relación

$$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{Z}) \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \quad (6.13)$$

En optimización estocástica, el término robustez tiene un significado característico. Se dice que un sistema es robusto si el efecto de las variables aleatorias sobre la respuesta es mínimo. Este concepto se puede apreciar en la figura 6.6 donde se muestra la dependencia del valor de la función objetivo  $f(x, Z)$  con respecto a una variable de diseño aleatoria  $X$ . Esta variable de diseño puede separarse en una parte determinista  $x$  (valor medio de  $X$ ) y una variable aleatoria  $Z$  tal que  $X = x + Z$ . El valor medio de  $Z$  es 0 y la desviación estándar  $\sigma$  es constante, es decir, para cualquier configuración de  $x$  la pdf tiene la misma configuración. En general, la pdf de la respuesta  $p_Y(y)$  cambia en posición y forma dependiendo del punto de diseño, ya que esta se obtiene por proyectar  $p_Z(z)$  sobre la respuesta  $Y = f(X) = f(x, Z)$ . Además, se puede observar como el punto de diseño  $X_1$  es óptimo para el caso determinista, al ser la configuración en la que se tiene un menor valor de la función objetivo pero el punto de diseño  $X_2$  es más robusto en presencia de variables aleatorias ya que la variación de  $p_Y(y)$  es menor.

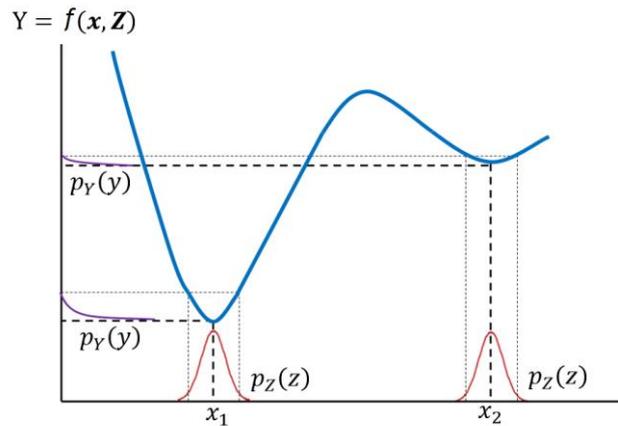


Figura 6.6: Robustez vs. no robustez para un problema con una variable de diseño aleatoria  $X$ .

Debido a la aleatoriedad de  $\mathbf{Z}$  en el problema RDO (Ec. 1.9), la función objetivo  $f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$  debe reemplazarse por una función determinista, denominado *criterio de robustez*  $R(\mathbf{x})$ , que proporcione algún valor representativo de la respuesta estructural aleatoria  $Y = f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$ . Bajo una formulación robusta el problema de optimización puede ser reformulado como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && R(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) \\ &\text{sujeto a:} && \mu_{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{Z})} \leq 0; && j = 1, \dots, n_i \\ &&& \sigma_{h_k(\mathbf{x}, \mathbf{Z})} \leq \sigma_j^+; && k = 1, \dots, n_d \\ &&& x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}; && i = 1, \dots, n_x \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde la restricción de desigualdad es formulada en función de su valor medio,  $\mu_{g_j(x,z)}$ ;  $\sigma_{h_k(x,Z)}$  representa la restricción sobre la desviación estándar de la respuesta;  $\sigma_j^+$  es el límite superior admisible para la desviación estándar de la respuesta estructural;  $n_i$ ,  $n_d$  y  $n_x$  representan el número de restricciones de igualdad, desigualdad y variables de diseño, respectivamente y  $x_i^{inf}$  y  $x_i^{sup}$  acotan inferior y superiormente el valor de las variables de diseño, respectivamente.

En función de la información disponible, los criterios de robustez se pueden clasificar, como: decisiones bajo riesgo y decisiones bajo incertidumbre (Jurecka, 2007). Las *decisiones bajo riesgo* son tomadas cuando se conoce las pdfs de las variables aleatorias de entrada y a partir de ellas se puede obtener la pdf de la respuesta. En cambio, las *decisiones bajo incertidumbre* son tomadas cuando no se conoce la pdfs de las variables de entrada si no el rango de variación posible de cada una de las variables aleatorias. Como resultado solo se puede determinar un conjunto de posibles valores de la respuesta pero no se puede determinar la pdf de la respuesta.

### 6.3.1. Criterios de robustez con toma de decisiones bajo incertidumbre

#### 6.3.1.1. Criterio minimax

Este criterio en la literatura se conoce como el *principio minimax* (Wald, 1950) o *escenario del peor caso* (worst case scenario) (Lombardi y Haftka, 1998). En este caso, el criterio de robustez  $R(x)$  que sustituye la función objetivo aleatoria  $f(x, Z)$  es

$$R(x) = \sup_{z \in Z} (f(x, z)) \quad (6.15)$$

Para cada configuración de variables de diseño  $x$ , se selecciona la situación más desfavorable en todo el rango de  $z$ . Por tanto, el criterio minimax ignora la posible dispersión de los posibles valores de la respuesta y en su lugar, identifica el valor superior de dicho rango. Este criterio proporciona diseños muy conservadores ya que se basa en una actitud extremadamente pesimista.

#### 6.3.1.2. Criterio de arrepentimiento minimax

El *criterio de arrepentimiento minimax* (minimax regret criterion) se centra en minimizar el arrepentimiento máximo que puede resultar de la toma de configuraciones de diseño no óptimas. Savage (1951) define el arrepentimiento como la pérdida de oportunidad de tomar la configuración  $x$  en lugar de la óptima. La pérdida de oportunidad es la diferencia en la función objetivo entre el valor actual  $f(x, z)$  y la mejor respuesta  $f^*(z)$  para cada posible evento  $z$

$$R(x) = \sup_{z \in Z} (f(x, z) - f^*(z)) \quad (6.16)$$

donde

$$f^*(z) = \inf_{x \in X} (f(x, z)) \quad (6.17)$$

Para obtener  $f^*(z)$ , todos los eventos son investigados separadamente, y la decisión óptima  $x^*$  para cada  $z$  se determina asumiendo que cada evento ocurre de forma única.

A diferencia del criterio minimax original, este criterio tiene en cuenta la dispersión de los posibles valores de la respuesta.

### 6.3.1.3. Método de Laplace

Laplace sostiene que en ausencia de una pdf que caracterice los parámetros aleatorios  $\mathbf{Z}$ , sugiere que se use el *principio de la razón insuficiente* (principle of insufficient reason) de Bernoulli. Este principio dice que no se puede asegurar que un evento de  $Z$  ocurra con una mayor probabilidad a otro en ausencia de una pdf que caracterice la variable aleatoria  $Z$ . En consecuencia, todos los eventos deben de ser igualmente probables. Por ello, cada variable aleatoria se caracteriza por una distribución uniforme, convirtiendo el problema en otro de “toma de decisión bajo riesgo”.

## 6.3.2. Criterios de robustez con toma de decisiones bajo riesgo

### 6.3.2.1. Criterios basados en los cuartiles

Cuando se dispone de pdfs que proporcionen información probabilística de las variables aleatorias  $\mathbf{Z}$ , se pueden utilizar criterios análogos al peor caso como los criterios de robustez basados en el cuartil  $q$  de la respuesta

$$R(\mathbf{x}) = C^{-1}(\mathbf{x}, q) \quad (6.18)$$

donde  $C^{-1}(\mathbf{x}, q)$  es la inversa de la cdf de la respuesta aleatoria  $f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$ . Al igual que ocurría en el criterio minimax, la medida del cuartil no tiene en cuenta la dispersión de los posibles valores de la respuesta.

### 6.3.2.2. Criterio basado en el principio de Bayes

Entre los criterios probabilistas, el *valor medio* o *valor esperado* de la respuesta aleatoria  $Y = f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$  es uno de los más utilizados (Dunning et al., 2011).

$$R(\mathbf{x}) = \mu_Y(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})] = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (6.19)$$

Al igual que en el criterio minimax y los criterios basados en cuartil, el valor medio de la respuesta no tiene en cuenta la dispersión de las variables aleatorias, solo su tendencia, por lo que puede proporcionar soluciones no robustas, ya que no hace diferencias entre pdfs que tengan igual media pero tengan distintos rangos de dispersión.

### 6.3.2.3. Criterio basado en los dos primeros momentos estadísticos

A pesar de que todos los criterios anteriormente mencionados han sido utilizados en diferentes aplicaciones, se ha demostrado que para la mayoría de los problemas de optimización estocástica estructural es adecuado que la variación de la respuesta sea mínima, para ello se utiliza una formulación multicriterio donde se busca minimizar la posición y la dispersión de la respuesta estructural. La posición se determina mediante el valor medio  $\mu_Y$  (Ec. 6.19) y la dispersión mediante la varianza  $\sigma_Y^2$  o la desviación estándar  $\sigma_Y$ .

$$\sigma_Y^2(\mathbf{x}) = V[f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})] = \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) - \mu_Y(\mathbf{x})]^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (6.20)$$

Habitualmente, se utiliza como criterio de robustez una *formulación compuesta* donde los dos objetivos son combinados mediante una suma ponderada con unos pesos específicos  $w_1$  y  $w_2$ . Para utilizar un único factor de ponderación, el factor de ponderación del valor medio  $w_1$  se suele fijar igual a 1 y el factor de ponderación  $w_2$  por  $w$ , el cual es un porcentaje que relaciona el valor medio con la dispersión. Como medida de la dispersión se suele utilizar la desviación estándar, ya que esta tiene las mismas unidades que el valor medio y la función objetivo original (Zhao et al., 2015; Zhao y Wang, 2014; Chen y Chen, 2010).

$$R(\mathbf{x}) = \mu_Y(\mathbf{x}) + w \sigma_Y(\mathbf{x}) \quad (6.21)$$

Según la teoría de decisión,  $w = 0$  corresponde a un diseño neutral al riesgo,  $w < 0$  corresponde a un diseño favorable al riesgo y  $w > 0$  corresponde a un diseño adverso al riesgo.

Taguchi (1991) introdujo otro criterio basado en el valor medio y la varianza de la respuesta denominado *ratio señal a ruido* (signal to noise ratio, SNR) (Fowlkes y Creveling, 1995)

$$R(\mathbf{x}) = 10 \log_{10} (\mu_Y^2(\mathbf{x}) + \sigma_Y^2(\mathbf{x})) \quad (6.22)$$

El operador  $\log_{10}$  no cambia la localización del óptimo, simplemente transforma la magnitud del criterio de robustez a decibelios (dB). Para contar con la misma magnitud a la expresada en la Ec. (6.12) el criterio SNR se altera,

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}) &= \mu_Y^2(\mathbf{x}) + \sigma_Y^2(\mathbf{x}) = \mu_Y^2(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) - \mu_Y(\mathbf{x})]^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \mu_Y^2(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})]^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} - (\mu_Y(\mathbf{x}))^2 \\ &= \int_{\Omega} [f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})]^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = (\mu_Y(\mathbf{x}))^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

tomando la raíz cuadrada positiva de la Ec. (6.23), el criterio de robustez resultante presenta las mismas unidades que la función objetivo original. Adicionalmente, se introduce un parámetro  $w$  y la varianza para considerar la minimización de la dispersión.

$$R(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mu_Y(\mathbf{x}))^2 + w (\sigma_Y(\mathbf{x}))^2} \quad (6.24)$$

Un procedimiento de solución alternativo, es transformar una de las dos medidas estadísticas a una restricción adicional mediante la imposición de un valor máximo admisible ( $\mu_{max}$  o  $\sigma_{max}$ ). Según esto, el problema multicriterio se transforma a

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}) &= \mu_Y(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) &= \sigma_Y(\mathbf{x}) - \sigma_{max} \leq 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

o

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sigma_Y(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) &= \mu_Y(\mathbf{x}) - \mu_{max} \leq 0 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Las Ecs. (6.25) se usan si el objetivo no es obtener un óptimo robusto “verdadero”, pero si un diseño con una respuesta media óptima para el cual la desviación estándar no sea mayor que una tolerancia preestablecida. Las Ecs (6.26) pueden ser la opción más adecuada para los casos en los que se conoce el diseño óptimo determinista. Según éstas, se permitiría una modificación de dicho óptimo determinista por una pérdida en el valor medio de la respuesta para minimizar la varianza debida a la aleatoriedad.

Otro procedimiento alternativo es tratar ambas medidas estadísticas de forma separada mediante una optimización multicriterio usando un frente de Pareto (García y Sanchez, 2013).

Estas dos medidas estadísticas, valor medio y desviación estándar, son las más utilizadas en RTO como criterio de robustez. Para evaluar el valor medio y la desviación estándar adecuadamente es necesario una buena representación de la pdf de la repuesta, para ello es necesario la cuantificación de la aleatoriedad de las variables de entrada y la propagación de las variables aleatorias en la respuesta.

### 6.4. Cuantificación de las variables de entrada

Cuantificación de incertidumbres significa describir las características estadísticas de las variables aleatorias con la mayor precisión. Para ello, es deseable determinar la pdf de la variable aleatorias, pero en muchos casos es suficiente con estimar el valor medio y la desviación estándar.

Antes de cuantificar las incertidumbres es necesario establecer cuáles son las fuentes de incertidumbre. En optimización estructural las incertidumbres pueden surgir por variabilidad en las cargas externas, condiciones ambientales (corrosión, erosión, temperatura, etc.), modificación de las propiedades de los materiales, alteraciones de los parámetros geométricos que definen la estructura, simplificaciones del modelo de simulación, etc. En la figura 6.7 se muestra la procedencia de algunas fuentes de incertidumbre en función del ciclo de vida de la estructura.

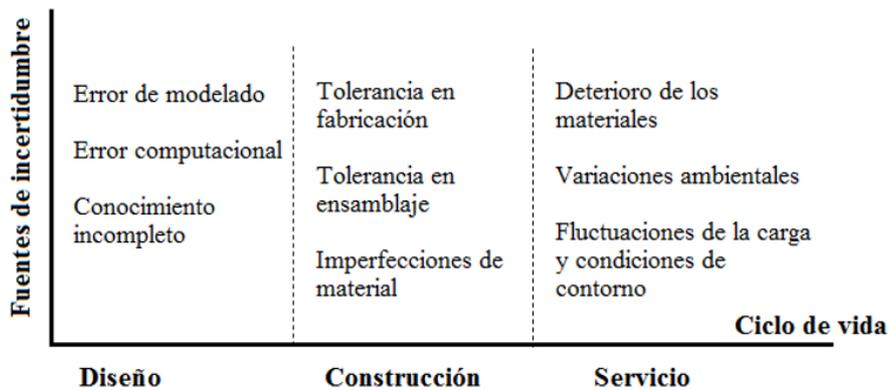


Figura 6.7: Fuentes de incertidumbre en función del ciclo de vida de la estructura.

Las incertidumbres en RTO se han modelado como variables aleatorias, o campos aleatorios dependiendo si varían en el dominio espacial o no. Así por ejemplo, la magnitud y la

dirección asociadas a una carga concentrada son modeladas por medio de dos variables aleatorias ya sean correladas o no y en cambio las cargas distribuidas o las propiedades de material son modeladas por un campo aleatorio.

Una variable aleatoria está completamente definida por una pdf. Queda fuera del alcance de este trabajo describir en detalle como se obtiene la pdf de las variables aleatorias en función de la información de la que se dispone, ya que estas van a considerarse conocidas. Una revisión detallada de las diferentes técnicas existentes de como definir la pdf de una variable aleatoria en función de la información disponible se puede encontrar en Sudret (2012).

Para caracterizar un campo aleatorio, es necesario definir además la correlación existente entre las variables aleatorias en el espacio. En función de la pdf se pueden distinguir dos tipos de campos estocásticos: Gaussianos y no-Gaussianos. Existe una serie de técnicas que permite representar un campo aleatorio mediante un conjunto reducido de variables aleatorias. En este trabajo solo se considera el método de expansión de Karhunen-Loève (the Karhunen-Loève expansión, K-L) (Ghanem y Spanos, 1991). Una revisión más detallada de otros métodos existentes (OLE (optimal linear estimation), EOLE (expansion optimal linear estimation), método de representación espectral, TBM (turning bands method), AR (autoregressive models), para la representación tanto de campos Gaussianos como no-Gaussianos se puede encontrar en Stefanou (2009).

#### 6.4.1. Método de expansión de Karhunen-Loève

El método de expansión Karhunen-Loève (K-L) de un campo aleatorio se basa en la expansión espectral de su función covarianza como una combinación lineal infinita de funciones ortogonales.

Sea  $Y(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  un campo aleatorio con media  $\mu(\mathbf{x})$  y función de autocovarianza  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x}')R(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , donde  $\mathbf{x}$  representa las coordenadas espaciales y  $\mathbf{w}$  denota la aleatoriedad del campo, el método K-L representa el campo aleatorio  $Y(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  como una serie de variables aleatorias en la forma

$$Y(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\mathbf{x}) \xi_i(\mathbf{w}) \quad (6.27)$$

donde  $\mu(\mathbf{x})$  es el valor promedio del campo aleatorio,  $\xi_i(\mathbf{w})$  es un conjunto ortogonal de variables aleatorias no correladas,  $\lambda_i$  y  $\varphi_i(\mathbf{x})$  son el conjunto de valores propios y vectores propios de la función de covarianza determinados a partir de la siguiente ecuación integral

$$\int_{\Omega} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (6.28)$$

siendo  $\Omega$  es el dominio espacial sobre el cual se presenta el campo aleatorio y  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  la función de autocovarianza espacial. Por definición, la función de autocovarianza es simétrica y definida positiva, por tanto las funciones propias son ortogonales y los valores propios son reales. Una característica única del método es la ortogonalidad de las variables aleatorias  $\xi_i(\mathbf{w})$

$$\mathbb{E}[\xi_i(\mathbf{w})] = 0 \text{ y } \mathbb{E}[\xi_i(\mathbf{w})\xi_j(\mathbf{w})] = \delta_{ij} \quad (6.29)$$

Por lo general, la mayoría de los campos aleatorios considerados en optimización estructural varían suavemente (alta correlación), por lo que este campo se puede aproximar mediante la consideración de unos pocos términos en la expansión K-L. Por el contrario, si el campo aleatorio tiene una alta aleatoriedad (baja correlación) se deben incluir un gran número de variables en el término del sumatorio. En la práctica, la Ec. (6.27) se representa truncando la expansión en el término de orden  $m$

$$\bar{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\mathbf{x}) \xi_i(\mathbf{w}) \quad (6.30)$$

donde los valores propios se ordenan en orden descendente  $\lambda_1 > \dots > \lambda_m > 0$ .

El método K-L ha sido ampliamente utilizado en la bibliografía para reducir la alta dimensionalidad de los campos aleatorios (Zhao y Wang, 2014; Chen et al. 2010).

## 6.5. Propagación de incertidumbres

La cuantificación de las incertidumbres en la respuesta como consecuencia de la aleatoriedad de las variables de entrada de un sistema, es conocido como *propagación de incertidumbre*, y resulta esencial para la optimización bajo incertidumbre. En la bibliografía, se puede encontrar una gran variedad de métodos de propagación de incertidumbres. El método a utilizar depende en gran medida de la información disponible, de la precisión que se desee obtener, del coste computacional y lo que se desee estimar (momentos estadísticos de bajo orden, probabilidad o pdf). En problemas RDO, el interés reside en evaluar los momentos de bajo orden (valor medio y desviación estándar) de la respuesta estructural  $Y(\mathbf{Z})$ .

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y(\mathbf{Z})] = \int_{\Omega} Y(\mathbf{z}) p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (6.31)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V[Y(\mathbf{Z})]} = \sqrt{\int_{\Omega} [Y(\mathbf{z}) - \mu_Y]^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z}} \quad (6.32)$$

Por lo general, la resolución analítica o mediante integración directa de las Ecs. (6.31) y (6.32) puede ser difícil o incluso imposible de calcular para funciones complejas o problemas de una alta dimensionalidad. Por ello, se han desarrollado métodos alternativos para evaluar estos momentos estadísticos de modo aproximado. Los diferentes métodos de propagación de incertidumbre (tabla 1.1) se pueden dividir en cinco categorías: métodos de simulación, métodos de expansión, métodos basados en el punto más probable, métodos basados en meta-modelos y métodos de integración aproximada.

**Métodos de simulación:** incluyen aquellos métodos basados en simulación como la simulación de Monte Carlo (Monte Carlo Simulation, MCS) (Madsen et al. 2006). Entre sus principales ventajas destaca su alta precisión y no adolecen de la maldición de la dimensionalidad (curse of dimensionality), es decir, el número de análisis necesarios del modelo de simulación es independiente de la dimensionalidad del problema. Sin embargo, su convergencia es lenta y por consiguiente tiene un alto coste computacional, aun a pesar de haberse desarrollado métodos de

muestreo para aliviarlos como: muestreo por importancia (Engelund y Rackwitz, 1993), muestreo adaptativo (Bucher, 1988), hipercubo latino (McKay et al., 1979), etc.

**Métodos de expansión:** tales como: el método de perturbación (Mandsen et al. 2006), el método de expansión en caos polinomial (Polynomial Chaos Expansion, PCE) (Xiu y Karniadakis, 2003), etc. En comparación con los métodos de simulación, los métodos de esta categoría son más eficientes pero son poco precisos frente a incertidumbres con una alta variabilidad y a respuesta no lineales. Un método muy prometedor dentro de esta categoría es el método de colocación estocástica (Stochastic Collocation Method, SCM) (Hu y Youn, 2011). Estos métodos son un tipo de superficie de respuesta que aproxima funciones aleatorias multidimensionales a partir de evaluaciones de la respuesta estructural en un conjunto de puntos de colocación, y con una mayor eficiencia que el resto de métodos de esta categoría. Esto se debe a la utilización de malla dispersa (Smolyak, 1963), con la que se alcanza una elevada precisión con un menor número de puntos de colocación que los métodos de malla completos (full grids).

**Métodos basados en el punto más probable:** el método de fiabilidad de primer orden (First-Order Reliability Method, FORM) y el método de fiabilidad de segundo orden (Second-Order Reliability Method, SORM) son los dos métodos más populares dentro de esta categoría (Kharmanda et al., 2004).

**Métodos basados en meta-modelos:** estos utilizan un modelo sustituto de la repuesta. El meta-modelo permite obtener evaluaciones de la respuesta con un menor coste computacional. La precisión en la repuesta depende en gran medida de la precisión del meta-modelo. En esta categoría destacan los modelos Kriging (Martin y Simpson, 2005).

**Métodos basados en integración numérica:** utilizados para resolver integrales multidimensionales. Dentro de estos destaca los métodos de reducción dimensional (Dimension Reduction Methods, DRM). Inicialmente, utilizado para aproximar funciones multidimensionales mediante una suma de funciones de una única variable, también conocido como el método de reducción univariable (Univariate Dimension Reduction, UDR) (Rahman y Xu, 2004).

A continuación se describen de forma más extensa los tres métodos que principalmente han sido utilizados hasta la fecha en problemas de RTO (MCS, SCM y DRM), debido principalmente por su carácter no intrusivo sobre el modelo de simulación.

### 6.5.1. Método de simulación de Monte Carlo

Se conoce como métodos de simulación de Monte Carlo a un conjunto de métodos numéricos, usados para aproximar expresiones matemáticas mediante la generación de muestras aleatorias. Esta técnica de simulación tiene su origen en los trabajos realizados para el desarrollo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial en el Laboratorio Nacional de Los Álamos en EE.UU por Neumann y Ulam en 1949. El término aparece por primera vez en el título de un artículo de Metropolis y Ulam (1949), en el cual se denomina

como un método “estadístico numérico para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud”. Hoy en día, el método de Monte Carlo se utiliza en el desarrollo de reactores nucleares, cromodinámica cuántica, radioterapia, comportamiento de radiación en la atmósfera terrestre, flujos de tráfico, evolución estelar, cálculos y predicciones económicas, búsqueda de petróleo, etc.

La idea básica del método MCS consiste en crear un modelo matemático del sistema a analizar, identificando aquellas variables que tienen un carácter aleatorio. Una vez determinadas todas las variables aleatorias, se lleva a cabo un diseño de experimentos, consistente en generar una muestra aleatoria en función de las pdfs de dichas variables y analizar el problema de forma determinista para cada muestra. Remarcar que cada una de las muestras está constituida por un conjunto de realizaciones de todas las variables.

El método MCS se puede utilizar para evaluar las Ecs. (6.21) y (6.22). Ambas ecuaciones, supone la evaluación de integrales en la forma

$$\int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (6.33)$$

Como se ha mencionado, el primer paso es identificar las variables aleatorias  $\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_n]^T$  siendo  $n$  la dimensionalidad del problema. A partir de la pdf de cada una de las variables se obtiene aleatoriamente  $m$  muestras de modo uniforme para cada una de las variables aleatorias  $\mathbf{z}^{(i)} = [z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}]^T \quad \forall i = 1:m$ . A partir de la evaluación de la función  $k(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$  en cada una de las muestras  $\mathbf{z}^{(i)}$ , la integral de la Ec. 6.33 se puede aproximar por la expresión

$$\int_{\Omega} k(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \approx \sum_{i=1}^m w^{(i)} k(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(i)}) \quad (6.34)$$

donde  $w^{(i)}$  es el peso otorgado a cada una de las muestras  $\mathbf{z}^{(i)}$  y  $k(\mathbf{x}, \mathbf{z}^{(i)})$  es el valor de la respuesta  $Y(\mathbf{z}^{(i)})$  para la muestra  $\mathbf{z}^{(i)}$  si se está calculando el valor medio o el valor de la respuesta para la muestra  $\mathbf{z}^{(i)}$  menos el valor medio de la respuesta  $[Y(\mathbf{z}^{(i)}) - \mu_Y]$  si se está calculando la varianza. Como consecuencia de generar las muestra al azar, las  $m$  muestras tienen el mismo peso, y la suma de todos debe de sumar 1, de acuerdo a la Ec. (6.3). Por consiguiente:

$$\sum_{i=1}^m w^{(i)} = 1 \quad \text{y} \quad w^{(1)} = w^{(2)} = \dots = w^{(m)} \quad \Rightarrow \quad w^{(i)} = \frac{1}{m} \quad (6.35)$$

Según la Ec. (6.34) y (6.35) el valor medio de la respuesta se puede aproximar por

$$\bar{\mu}_Y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y(\mathbf{z}^{(i)}) \quad (6.36)$$

Análogamente, la desviación estándar o precisión de la muestra, se define como una estimación de la desviación estándar  $\bar{\sigma}_Y$  de la distribución subyacente. Se puede demostrar mediante el teorema central del límite como con la desviación estándar de una muestra de tamaño  $m-1$  se obtiene una estimación no sesgada de la desviación estándar  $\bar{\sigma}_Y$ .

$$\bar{\sigma}_Y \approx s = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y(\mathbf{z}^{(i)}) - \mu_Y)^2} \quad (6.37)$$

Según Rubinstein y Kroese (2008) el método de simulación de Monte Carlo es la metodología más precisa para la estimación de momentos estadísticos de alto orden dimensional, lo que permite: (1) resolver problemas cuya solución es difícil o imposible de resolver, (2) estudiar la interacción entre las diferentes variables aleatorias del problema, y (3) evaluar los momentos estadísticos sin necesidad de modificar el modelo de simulación.

Es bien conocido que las estimaciones de los momentos estadísticos mediante el método MCS son muy precisas pero poco eficientes. Es posible demostrar como la estimación de los momentos estadísticos de bajo, valor medio y desviación estándar, de una muestra aleatoria convergen a los momentos estadísticos exactos de la respuesta como  $\frac{1}{\sqrt{m}}$  (Poles y Lovison, 2000). Por ejemplo el error cometido en la estimación del valor medio de la muestra con respecto al valor medio exacto es

$$|\bar{\mu}_Y - \mu_Y| \leq C \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (6.38)$$

donde C es una constante. Esta ecuación muestra como para reducir el error cometido en la estimación de la muestra a la mitad es necesario una muestra 4 veces mayor y para reducirlo en un orden de magnitud (1/10) es necesario tomar una muestra 100 veces más grande.

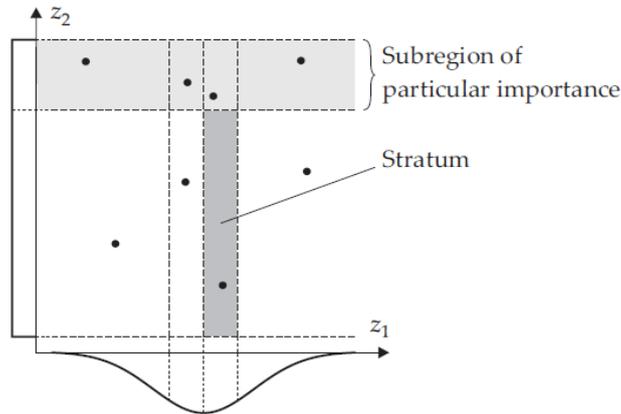
Apuntar que, mediante un muestreo aleatorio uniforme, la asignación de los puntos de muestro no es simétrica y lo más probable es que no se tengan en cuenta que subconjuntos del espacio aleatorio son más importantes. A continuación, se describen una serie de técnicas de muestreo que intentan solventar estos inconvenientes.

### 6.5.1.1. Muestreo estratificado

El *muestreo estratificado* utiliza una partición del espacio aleatorio en una serie de subregiones, también conocidas como *estratos*, para asegurar que de cada estrato se incluya muestras. Típicamente, se toma al azar una muestra de cada estrato, por lo que el tamaño de la muestra es igual al número de estratos. El peso de cada una de las muestras corresponde a la probabilidad del estrato correspondiente

$$w^{(i)} = P\{a_i \leq \mathbf{z} \leq b_i\} = \int_{a_i}^{b_i} p_z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (6.39)$$

donde  $a_i$  y  $b_i$  son los límites del estrato  $i$ . Normalmente los estratos son seleccionados para que tengan la misma probabilidad pero no necesariamente, por lo que mediante un muestreo estratificado el método MCS puede tener diferentes pesos. Si se toma más de una muestra por estrato, el peso de la muestra corresponde a la probabilidad del estrato dividido por el número de muestras tomadas en dicho estrato. La definición de los estratos y el cálculo de los pesos puede resultar una tarea difícil, especialmente en problemas con una alta dimensionalidad.



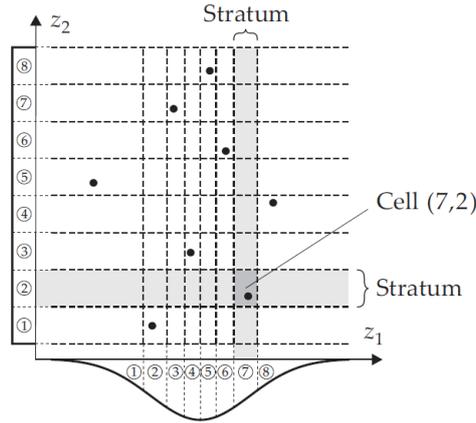
**Figura 6.8:** Muestreo por estratos para un espacio aleatorio bidimensional con 8 estratos y 1 punto de muestreo por estrato. Las variables  $z_1$  y  $z_2$  son descritas por una distribución normal y una uniforme, respectivamente (Jurecka, 2007).

### 6.5.1.2. Muestreo mediante Hipercubo Latino

El *muestreo por Hipercubo Latino* (Latin Hypercube Sampling, LHS) fue desarrollado por MacKay et al. (1979) y es un método estadístico para generar una muestra plausible en una distribución multidimensional. El primer paso, es dividir el rango de variabilidad de cada una de las variables aleatorias  $Z_i$  en  $m$  intervalos en consistencia a sus pdfs. Normalmente, los intervalos son determinados para que tengan igual probabilidad de ocurrencia, específicamente  $1/m$ . A continuación, las segmentaciones se estructuran al dominio de entrada definiendo así  $m$  subregiones a lo largo de cada eje de coordenadas. Estas subregiones se conocen también como estratos. Considerando que existen  $n$  variables aleatorias, el número total de estratos es  $m^n$ . Finalmente, se asignan los  $m$  puntos de muestreo al dominio segmentado. Para asegurar que las muestras están bien distribuidas sobre cada eje de coordenadas, cada estrato se designa para contener únicamente una muestra. Para lograr esto, un estrato de la primera variable  $z_1$  se empareja aleatoriamente sin reemplazo con un estrato que pertenezca a la segunda variable  $z_2$ . A continuación se fija y se combina con la pareja anterior un estrato seleccionado aleatoriamente de la tercera variable. Este proceso se repite hasta que se forma una  $n$ -tupla. En un siguiente paso, el ensamblaje de la  $n$ -tupla se repite hasta que se aborde al menos una muestra en cada estrato.

Una condición para utilizar el procedimiento descrito es que las  $n$  variables deben de ser estadísticamente independientes. Aunque, Iman y Conover (1982) presentaron un procedimiento para realizar LHS cuando existe correlación entre variables.

A pesar de que LHS es una de las técnicas más eficientes para la reducción del número de evaluaciones de un modelo de simulación, se ha demostrado que solo es eficiente para calcular probabilidades de fallo relativamente grandes y momentos estadísticos de bajo orden (Celorrio, 2013).



**Figura 6.9:** Muestreo por hipercubo latino para un espacio aleatorio bidimensional con una muestra de 8 puntos. Las variables  $z_1$  y  $z_2$  son descritas por una distribución normal y una uniforme, respectivamente (Jurecka, 2007).

### 6.5.2. Método de colocación estocástico

Este método es un tipo de superficie de respuesta que aproxima funciones aleatorias multidimensionales a partir de evaluaciones de la respuesta estructural en un conjunto de puntos de colocación.

Partimos de que se desea evaluar los momentos estadísticos de bajo orden mediante integración numérica usando una fórmula de cuadratura apropiada. En estadística, una fórmula de cuadratura es una aproximación de la integral definida de una función, normalmente expresada como una suma ponderada de la función, evaluada en puntos específicos del dominio de integración. La fórmula de cuadratura unidimensional para los momentos estadísticos expresados según la Ec. 6.34 se puede escribir como

$$Q_l^{(1)}(f) = \sum_{i=1}^m w^{(i)} k(x, z^{(i)}) \quad (6.40)$$

donde  $z^{(i)}$  y  $w^{(i)}$  son la localización del punto de cuadratura  $i$ -th y los pesos correspondientes, respectivamente. Estos puntos y los respectivos pesos se pueden determinar a partir de reglas de cuadratura conocidas como Legendre, Chebyshev, Laguerre, Hermite, Jacobi, Kronrod, Patterson, Clenshaw, etc.

Una vez determinados los puntos y pesos de cuadratura para cada una de las variables aleatorias en función de su pdf, la fórmula de cuadratura del espacio aleatorio  $n$ -dimensional se define mediante el producto tensorial como

$$\begin{aligned} Q_l^{(n)}(k) &= (Q_{l1}^{(1)} \otimes Q_{l2}^{(1)} \otimes \dots \otimes Q_{ln}^{(1)})(k) \\ &= \sum_{i_1=1}^{m_{l1}} \dots \sum_{i_n=1}^{m_{ln}} k(x, z_{l1}^{(i_1)}, \dots, z_{ln}^{(i_n)}) (w_{l1}^{(i_1)} \otimes \dots \otimes w_{ln}^{(i_n)}) \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde  $\otimes$  denota el producto tensorial. Este producto tensorial produce una malla completa (full grid), siendo necesario  $m^n$  evaluaciones para determinar los momentos estadísticos.

Smolyak (1963) propone una alternativa eficiente al producto tensorial completo donde la exactitud lograda por este se puede lograr mediante el uso de un menor número de puntos de colocación. El algoritmo de Smolyak permite realizar un producto tensorial disperso a partir de reglas de cuadratura unidimensionales. La construcción del producto tensorial disperso sigue la formulación planteada por Maitre y Knio (2010). En primer lugar se considera una regla de cuadratura unidimensional  $Q_l^{(1)}(k)$  y se define la diferencia como

$$\begin{aligned}\Delta_l^{(1)} &\equiv (Q_l^{(1)} - Q_{l-1}^{(1)})(k) \\ Q_0^{(1)}(f) &\equiv 0\end{aligned}\tag{6.42}$$

donde  $l$  es el número de puntos de integración. Apuntar que  $\Delta_l(k)$  es también una regla de cuadratura. Si la regla de integración se construye en conjuntos anidados,  $\Delta_l$  contiene el conjunto de nodos en  $Q_l^{(1)}(k)$  con pesos igual a la diferencia de estos entre el nivel  $l$  y el nivel  $l-1$ . Para construir la malla dispersa (sparse grid), se introduce el termino *multi-índice* (multi-index)  $\mathbf{l} = [l_1, \dots, l_n]$  definido como

$$|\mathbf{l}| = \sum_{i=1}^n l_i\tag{6.43}$$

La fórmula de integración dispersa para el nivel  $l$  se expresa como

$$Q_l^{(n)}(k) = \sum_{|\mathbf{l}| \leq l+n-1} (\Delta_{l_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \Delta_{l_n}^{(1)})(k)\tag{6.44}$$

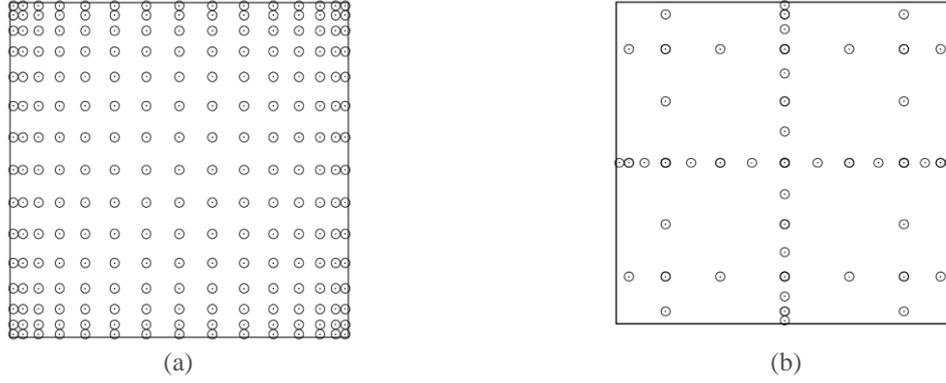
Alternativamente, la Ec. (6.43) se puede escribir como

$$Q_l^{(n)}(k) = \sum_{l+1 \leq |\mathbf{l}| \leq l+n} (-1)^{l+n-|\mathbf{l}|} \binom{n-1}{l+n-|\mathbf{l}|} (Q_{l_1}^{(1)} \otimes Q_{l_2}^{(1)} \otimes \dots \otimes Q_{l_n}^{(1)})(k)\tag{6.45}$$

El número total de puntos necesarios con una mallas dispersa es de  $m^{\log n}$ , número inferior al número de puntos necesarios con una malla completa  $m^n$ , por lo que una malla dispersa atenúa la maldición de la dimensionalidad. En la figura 6.9 se muestran los puntos de colocación usando una malla completa y una malla dispersa para el caso bidimensional  $n = 2$  y un nivel de cuadratura  $l = 4$ .

### 6.5.3. Método de reducción dimensional

El concepto básico del método de reducción dimensional es la estimación de los momentos estadísticos de bajo orden de modo eficiente mediante la aproximación de una función multidimensional por otra constituida por múltiples subfunciones de dimensión inferior (Rahman y Xu, 2004). Para ello, consideremos un vector aleatorio  $\mathbf{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ , una función multidimensional de dicho vector aleatorio  $g(\mathbf{Z})$ , y un vector de valores medios  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  que sirve como punto de referencia para realizar la expansión. Una descomposición dimensional de  $g(\mathbf{Z})$  se puede expresar según Li y Ma (2013) como



**Figura 6.10:** Comparación del producto tensorial en la construcción de fórmulas de cuadratura de nivel  $l=4$ , para una integración numérica  $n = 2$ . Resultados de una regla de cuadratura anidada Fejér. (a) Completa. (b) Dispersa. (Maitre y Knio, 2010).

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{Z}) = & g_{\mu} + \sum_{i=1}^n g_i(Z_i) + \sum_{i_1, i_2=1; i_1 < i_2}^n g_{i_1 i_2}(Z_{i_1}, Z_{i_2}) + \dots \\
 & + \sum_{i_1, \dots, i_s=1; i_1 < \dots < i_s}^n g_{i_1 \dots i_s}(Z_{i_1}, \dots, Z_{i_s}) + g_{12 \dots n}[(Z_{i_1}, \dots, Z_{i_n})]
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

donde  $g_{\mu} = g(\mu_1, \dots, \mu_n)$  es una constante la cual se evalúa en el vector de valores medios de las  $n$  variables aleatorias de entrada;  $g_i(Z_i) = g(\mu_1, \dots, Z_i, \dots, \mu_n)$  es una subfunción unidimensional la cual solo depende de la variable aleatoria  $Z_i$  con el resto de variables configuradas a su valor medio;  $g_{i_1 i_2}(Z_{i_1}, Z_{i_2}) = g(\mu_1, \dots, \mu_{i_1-1}, Z_{i_1}, \mu_{i_1+1}, \dots, \mu_{i_2-1}, Z_{i_2}, \mu_{i_2+1}, \dots, \mu_n)$  es una subfunción bidimensional donde únicamente se consideran las variables  $Z_{i_1}$  y  $Z_{i_2}$  con el resto de variables configuradas en su valor medio y así sucesivamente. Para facilitar la anotación, se asigna  $g_i(Z_i) = g_i$ ;  $g_{i_1 i_2}(Z_{i_1}, Z_{i_2}) = g_{i_1 i_2}$ ; y así sucesivamente.

En los métodos de reducción dimensional es habitual aproximar la Ec. (6.46) mediante el truncamiento de ciertos términos, por ejemplo

$$g(\mathbf{Z}) \approx \hat{g}_s(\mathbf{Z}) = g_{\mu} + \sum_{i=1}^n g_i + \sum_{i_1, i_2=1; i_1 < i_2}^n g_{i_1 i_2} + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_s=1; i_1 < \dots < i_s}^n g_{i_1 \dots i_s} \tag{6.47}$$

Cuando  $s = 1$  y  $s = 2$ , ellos son conocidos como el *método de reducción univariable* o *unidimensional* (univariate dimension-reduction method, UDR) y el *método de reducción bivariable* o *bidimensional* (bivariate dimension-reduction method, BDR), respectivamente (Li y Ma, 2013). Así, mediante UDR, la función multidimensional  $g(\mathbf{Z})$  se puede aproximar por

$$g(\mathbf{Z}) \approx \sum_{i=1}^n (g_i - g_{\mu}) + g_{\mu} = \sum_{i=1}^n g_i - (n - 1)g_{\mu} \tag{6.48}$$

y mediante BDR por

$$g(\mathbf{Z}) \approx \sum_{i < j} g_{ij} - (n-2) \sum_{i=1}^n (g_i) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} g_\mu \quad (6.49)$$

El valor medio y la varianza de  $Y = g(\mathbf{Z})$  con un método de reducción  $s$ -dimensional se puede expresar como

$$\hat{\mu}_Y = \int \hat{g}_s(\mathbf{z}) p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (6.50)$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \int [\hat{g}_s(\mathbf{z}) - \mu]^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (6.51)$$

donde  $p_Z(\mathbf{z})$  es la función de densidad de probabilidad del vector de variables aleatorias  $\mathbf{Z}$ . Esta claro que la evaluación de las Ecs. (6.50) y (6.51) solo implica a lo sumo integrales  $s$ -dimensionales.

El método de reducción dimensional se puede utilizar para calcular de forma aproximada los momentos estadísticos, siempre y cuando las variables aleatorias sean estadísticamente independientes. En caso contrario, las variables aleatorias correladas se deben de transformar a variables aleatorias independientes mediante la transformación de Rosenblat (Rosenblatt, 1952). Así, a partir de la Ec. (6.50), el valor medio de la función multidimensional  $g(\mathbf{Z})$  mediante UDR se puede expresar como

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_Y &= \int \left[ \sum_{i=1}^n (g_i - g_\mu) + g_\mu \right] p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \int g_i p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} - \int g_\mu p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right] + \int g_\mu p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_{Y_i} - (n-1) g(\boldsymbol{\mu}_Z) \end{aligned} \quad (6.52)$$

donde  $\mu_{Y_i} = \int g_i p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$  es la estimación del valor medio de las subfunciones unidimensional  $g_i = g(\mu_1, \dots, Z_i, \dots, \mu_n)$  mediante la cuadratura de Gauss. De forma análoga la varianza se obtienen como

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_Y^2 &= \int \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n (g_i - g_\mu) + g_\mu \right] - \left[ \sum_{i=1}^n (\mu_i - g_\mu) + g_\mu \right] \right\}^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \int \left[ \sum_{i=1}^n (g_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i < j} (g_i - \mu_i) (g_j - \mu_j) \right] p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \end{aligned} \quad (6.53)$$

Tener en cuenta que en la Ec (6.53), la integral  $\int \sum_{i < j} (g_i - \mu_i) (g_j - \mu_j) p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 0$  ya que las subfunciones unidimensionales  $g_i$  son mutuamente independientes en el espacio aleatorio. Tras la simplificación se tiene

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \int \sum_{i=1}^n (g_i - \mu_i)^2 p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n (\sigma_{Y_i})^2 \quad (6.54)$$

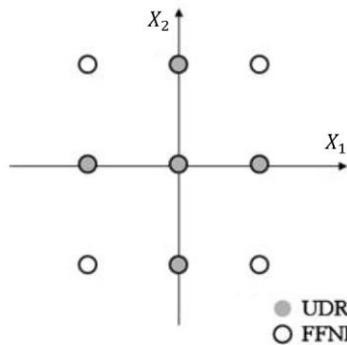
donde  $\sigma_{Y_i} = \int g_i p_Z(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$  es la estimación de la varianza de las subfunciones unidimensionales  $g_i = g(\mu_1, \dots, Z_i, \dots, \mu_n)$  mediante la cuadratura de Gauss. Según la Ec. (6.54) la varianza de la de la función multidimensional es la suma de todas las varianzas de las sub-funciones unidimensionales  $g_i$ .

A partir de la varianza, la desviación estándar se puede determinar como

$$\hat{\sigma}_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma_{Y_i})^2} \quad (6.55)$$

El número de evaluaciones  $Y(\mathbf{z})$  necesarias para poder calcular los momentos estadísticos  $(\hat{\mu}_Y, \hat{\sigma}_Y)$  es  $m_1 + m_2 + \dots + m_n + 1$  donde  $m_i$  son el número de puntos de cuadratura desplazados del punto medio utilizados para calcular los momentos estadísticos de las subfunciones unidimensionales  $g_i$ . Si se usa el mismo número de puntos de cuadratura  $m$  en todas las variables aleatorias, el número de evaluaciones requeridas es de  $mn + 1$ . El método UDR es un método mucho más eficiente que el producto tensorial completo, sin embargo, el método puede resultar poco preciso si existe una fuerte correlación entre las variables aleatorias (Lee y Chen, 2008).

En la figura 6.11 se compara el número de puntos de cuadratura y la posición de estos para un caso bivariable, utilizando una regla de cuadratura unidimensional tres puntos.



**Figura 6.11:** Evaluación de los puntos de cuadratura para reducción unidimensional (UDR) y producto tensorial completo (FFNI) con una fórmula de cuadratura de 3 nodos. (Lee y Chen, 2009).

El tipo de cuadratura de Gauss a utilizar depende de la pdf que caracterice la variable aleatoria. Para distribuciones normales y longnormales, los nodos y los pesos de la integral unidimensional se determinan a partir de la cuadratura de Gauss-Hermite. Con distribución uniforme, exponencial y Weibull los puntos de cuadratura se determinan mediante la cuadratura de Gauss-Laguerre.

---

# CAPÍTULO 7:

## DISEÑO ÓPRIMO ROBUSTO DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS

---

En este capítulo se presenta una nueva metodología para la optimización robusta de topología con isolíneas y algoritmos genéticos considerando la existencia de incertidumbre en la carga.

### 7.1. Introducción

En la actualidad, la mayoría de los trabajos publicados en RTO, tratan las incertidumbres en la carga (Chen et al, 2010; Dunning y Kim, 3013; Zhao y Wang, 2014,2015), aunque algunos consideran también las incertidumbres en las propiedades del material (Tootkaboni et al., 2012 y Lazarov et al. 2012) y en la geometría (Chen y Chen, 2011; Jansen et al.; y Lazarov et al., 2012).

Conti et al. (2009) es el primero que combina un método de optimización de topología determinista, en concreto LSM, con técnicas de programación estocástica para la optimización de estructuras bajo cargas inciertas. Sin embargo, este trabajo está limitado a considerar solo la existencia de incertidumbre de cargas concentradas las cuales son modeladas como variables aleatorias. Posteriormente, Chen et al. (2010) amplían su uso a cargas distribuidas, las cuales

son modeladas como campos aleatorios. La alta dimensionalidad del campo aleatorio se transforma en un conjunto finito de variables aleatorias estadísticamente independientes mediante un método espectral como K-L. Finalmente, los momentos estadísticos de la compliance son evaluados mediante UDR en los puntos de cuadratura de Gauss. Dunning y Kim (2011) presentan un método analítico para minimizar el valor esperado de la compliance, con incertidumbre en la magnitud y en la dirección de la carga, usando complejas derivadas numéricas. En el caso más desfavorable, el problema RTO se transforma en otro de  $3n+1$  estados de carga, siendo  $n$  el número de cargas con incertidumbre. Sin embargo, la metodología se limita a variables aleatorias estadísticamente independientes definidas mediante distribuciones normales. En Dunning y Kim (2013) amplían la metodología anterior incorporando la desviación estándar de la compliance en la función objetivo. Zhao y Wang (2014) proponen una metodología para evaluar el valor esperado de la compliance, permitiendo utilizar cualquier tipo de función de probabilidad continua para describir la incertidumbre. Para obtener los momentos estadísticos utilizan el método de Monte Carlo y la descomposición de matrices. Zhao et al. (2015) presentan un método para la optimización de topología considerando incertidumbre en la carga, utilizando el método de colocación estocástico con cuadratura dispersa de Smolyak para obtener los momentos estadísticos de la respuesta estructural.

Todas estas metodologías transforman el problema RTO en otro sujeto a múltiples estados de carga deterministas en donde los momentos estadísticos se calculan evaluando repetidamente la respuesta para cada uno de los estados de carga. A menudo, el coste computacional del análisis es elevado, por lo que la evaluación de la función objetivo de forma precisa y eficiente es crucial en este tipo de problemas.

## 7.2. Formulación

Como se vio en el capítulo anterior, se pueden utilizar varios criterios de robustez para formular el problema RTO desde un punto de vista probabilístico, utilizándose habitualmente la formulación compuesta descrita en la Ec. (6.21).

En este capítulo, el problema RTO considerado consiste en minimizar el valor medio y la desviación estándar de la compliance (Chen y Chen, 2010; Zhao y Wang, 2014; y Zhao et al., 2015)

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && F(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \mu_C + \omega \sigma_C \\
 &\text{sujeto a:} && \mathbf{K} \mathbf{u}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \\
 &&& V - V_{max} \leq 0 \\
 &&& x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}; \quad i = 1, \dots, n_x
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde  $\mu_C = \mu[C(\mathbf{u}, \mathbf{z})]$  y  $\sigma_C = \sigma[C(\mathbf{u}, \mathbf{z})]$  son el valor medio y la desviación estándar de la compliance,  $\omega$  es el factor de ponderación que relaciona el valor medio y la desviación estándar,  $\mathbf{u}(\mathbf{z})$  es el campo de desplazamientos,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global,  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$  es el vector de fuerzas,  $V_{max}$  es el volumen máximo admisible,  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas de los  $n_x$  puntos de control y  $\mathbf{z}$  es una realización del espacio muestral  $n$ -dimensional.

### 7.3. Incertidumbre en carga

Existen varias fuentes de incertidumbre que pueden afectar a la robustez de una estructura, entre ellas están las cargas, las propiedades de material y la geometría. En este trabajo únicamente se considera la incertidumbre de cargas concentradas.

Si suponemos que sobre una estructura existen  $n$  cargas, y que la magnitud y dirección de la carga  $i$  se modela mediante dos variables aleatorias independientes  $h_i(z)$  y  $\theta_i(z)$  respectivamente, entonces las componentes en la dirección vertical y horizontal de la carga se pueden determinar como

$$\begin{aligned} f_{Vi}(z) &= h_i(z) \operatorname{sen}(\theta_i(z)) \\ f_{Hi}(z) &= h_i(z) \operatorname{cos}(\theta_i(z)) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Si  $\xi_{Vi}$  y  $\xi_{Hi}$  representan una fuerza unitaria en la dirección vertical y horizontal sobre la carga  $i$ , cualquier realización de las  $n$  cargas se puede representar como una combinación lineal del vector de cargas constituido por  $\xi_{V1}, \xi_{H1}, \dots, \xi_{Vn}, \xi_{Hn}$ , como

$$\mathbf{f}(z) = \sum_{i=1}^n (f_{Vi}(z) \xi_{Vi} + f_{Hi}(z) \xi_{Hi}) \quad (7.3)$$

### 7.4. Propagación de las incertidumbres

La primera dificultad para resolver el problema de diseño óptimo robusto (7.1) es calcular de forma eficiente la función objetivo. Como se comentó en el capítulo anterior, la resolución analítica del valor medio y de la desviación estándar de la energía de deformación resulta difícil o incluso imposible de evaluar de forma exacta en problemas con una elevada dimensionalidad. Por ello, se suele utilizar métodos aproximados para evaluar estas magnitudes.

De acuerdo a la Ec. (7.3), la compliance de la estructura considerando la existencia de incertidumbre en la carga  $\mathbf{f}(z)$  se puede definir como

$$C(z) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T(z) \mathbf{u}(z) \quad (7.4)$$

Para propagar el efecto de las incertidumbres sobre la función objetivo se utiliza el método UDR. Con este método, el valor medio y la desviación estándar de la compliance se pueden determinar como

$$\hat{\mu}_C = \mathbb{E}[\bar{C}(\mathbf{Z})] = \sum_{i=1}^n \mu_{C_i} - (n-1) C(\boldsymbol{\mu}_z) \quad (7.5)$$

$$\hat{\sigma}_C = \sqrt{V[\bar{Y}(\mathbf{Z})]} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma_{C_i})^2} \quad (7.6)$$

donde  $C_i$  es una subfunción unidimensional que depende solo de una variable aleatoria  $z_i$  con el resto de variables aleatorias fijadas en su valor medio (por ejemplo,  $\mu_{C_i} = \mathbb{E}[C(\mu_1, \dots, z_i, \dots, \mu_n)]$ ), y  $n$  es el número de variables aleatorias. Los momentos estadísticos de

las subfunciones unidimensionales  $\mu_{C_i}$  y  $\sigma_{C_i}$  se determinan mediante las fórmulas de cuadratura de Gauss

$$\mu_{C_i} = \sum_{j=1}^{m_i} w_i^{(j)} C(\mu_1, \dots, z_i^{(j)}, \dots, \mu_n) \quad (7.7)$$

$$\sigma_{C_i} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m_i} w_i^{(j)} (C(x, u^{(j)}) - \mathbb{E}[C])^2} \quad (7.8)$$

donde  $m_i$  es el número de nodos utilizados para calcular  $\mu_{C_i}$  y  $\sigma_{C_i}$ , y  $w_i^{(j)}$  y  $z_i^{(j)}$  son el peso y la posición del nodo  $j$  respectivamente para la variable aleatoria  $i$ . Por tanto, para la determinación de los momentos estadísticos de la compliance son necesarios  $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_n - 1) + 1$  estados de carga, suponiendo cada uno de estos estados de carga una evaluación del modelo de simulación. El número de muestras  $m_i$  utilizadas en cada una de las subfunciones  $i$  se determina de modo que el error  $\varepsilon(m_i)$  cometido al añadir dos muestras más sea inferior al 5%. En función del factor de ponderación  $\omega$ , el número de muestras  $m_i$  se puede determinar a partir del valor medio o la desviación estándar de la subfunción  $i$

$$\varepsilon_i(m_i) = \left| \frac{\mu_{C_i}(m_i) - \mu_{C_i}(m_i + 2)}{\mu_{C_i}(m_i)} \right| < 0.05; \quad \omega = 0 \quad (7.9)$$

$$\varepsilon_i(m_i) = \left| \frac{\sigma_{C_i}(m_i) - \sigma_{C_i}(m_i + 2)}{\sigma_{C_i}(m_i)} \right| < 0.05; \quad \omega \neq 0 \quad (7.10)$$

## 7.5. Optimización robusta de topología con algoritmos genéticos

En este apartado se describen los aspectos fundamentales para la optimización robusta mediante el método descrito en el capítulo 4. Recordar, que en dicho método se utilizaba un contorno virtual a partir del cual se determinaba el valor de referencia de la isolínea de corte.

### 7.5.1. Codificación

El movimiento de los PC se describe por medio de una cadena de números reales de modo que cada uno de los bits representa directamente la magnitud de movimiento de cada uno de los PC. El tamaño de paso está limitado por un valor superior e inferior. Un valor positivo indica que el movimiento se debe de realizar hacia el interior de la estructura mientras que un valor negativo supone un movimiento hacia el exterior de la estructura.

### 7.5.2. Extracción de la topología

Una vez se ha establecido la posición de los PC, es necesario extraer la topología resultante. Para ello, se debe determinar el valor de referencia de la isolínea de recorte conforme al criterio seleccionado. El valor de referencia se determina como

$$v_{ref} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} v_{i,Fil}(\mathbf{z}) \quad (7.11)$$

donde  $v_{i,Fil}(\mathbf{z})$  es el valor robusto filtrado del criterio obtenido en  $N_p$  puntos del contorno virtual, y  $\mathbf{z}$  muestra el carácter aleatorio de dicha variable debido a la incertidumbre en la carga. El criterio utilizado en este capítulo es la energía de deformación al utilizarse en la función objetivo el primer y segundo momento estadístico de la compliance. El filtro utilizado es el mismo que el utilizado en el capítulo 4, en el cual se establecía que

$$v_{i,Fil}(\mathbf{z}) = \begin{cases} v_i(\mathbf{z}), & \text{si } v_i \leq v_{med} + v_{std} \\ v_{med} + v_{std}, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.12)$$

siendo  $v_{med}$  y  $v_{std}$  la media aritmética y la desviación estándar de la energía de deformación en los  $N_p$  puntos, respectivamente.

A partir del principio de superposición de la elasticidad lineal, se puede establecer que la energía de deformación media en cualquier punto del dominio se puede determinar como el valor medio de la energía de deformación de los diferentes casos de carga determinados mediante el método UDR. Según el método UDR, el valor medio de la energía de deformación en cualquier punto se puede determinar como

$$v_i(\mathbf{z}) = \mathbb{E}[v]_i = \sum_{j=1}^n \mu_{v_j} - (n-1) v(\boldsymbol{\mu}_z) \quad (7.13)$$

donde  $\mu_{v_j}$  es la estimación mediante la cuadratura de Gauss del valor medio de la subfunción unidimensional  $i$ .

Una vez determinado el valor de la isolínea de referencia  $v_{ref}$ , se utiliza el algoritmo de recorte Marching Triangle para obtener la forma y la topología para dicho valor de referencia  $v_{ref}$ . Para incorporar el efecto de la incertidumbre a la hora de realizar el recorte, el valor de la energía de deformación en los vértices de las cuatro celdas triangulares que constituye cada uno de los elementos finitos, se determina mediante la Ec. (7.13). Al igual que para el caso determinista, los vértices son etiquetados como “1” o “0” en función de si el valor en el vértice es mayor o menor al valor de referencia, respectivamente. Tras aplicar el algoritmo de recorte, los elementos son clasificados como interiores, exteriores o de borde y en función de esta clasificación se obtiene el ratio del área normalizado. El análisis de la nueva topología se lleva a cabo mediante una malla fija en función de los ratios de área normalizados obtenidos para cada uno de los elementos.

### 7.5.3. Función de aptitud

Para dirigir la dirección de búsqueda se establece la siguiente función de aptitud robusta

$$F(\mathbf{z}) = \frac{1}{[\mu_c + \omega \sigma_c] V} \quad (7.14)$$

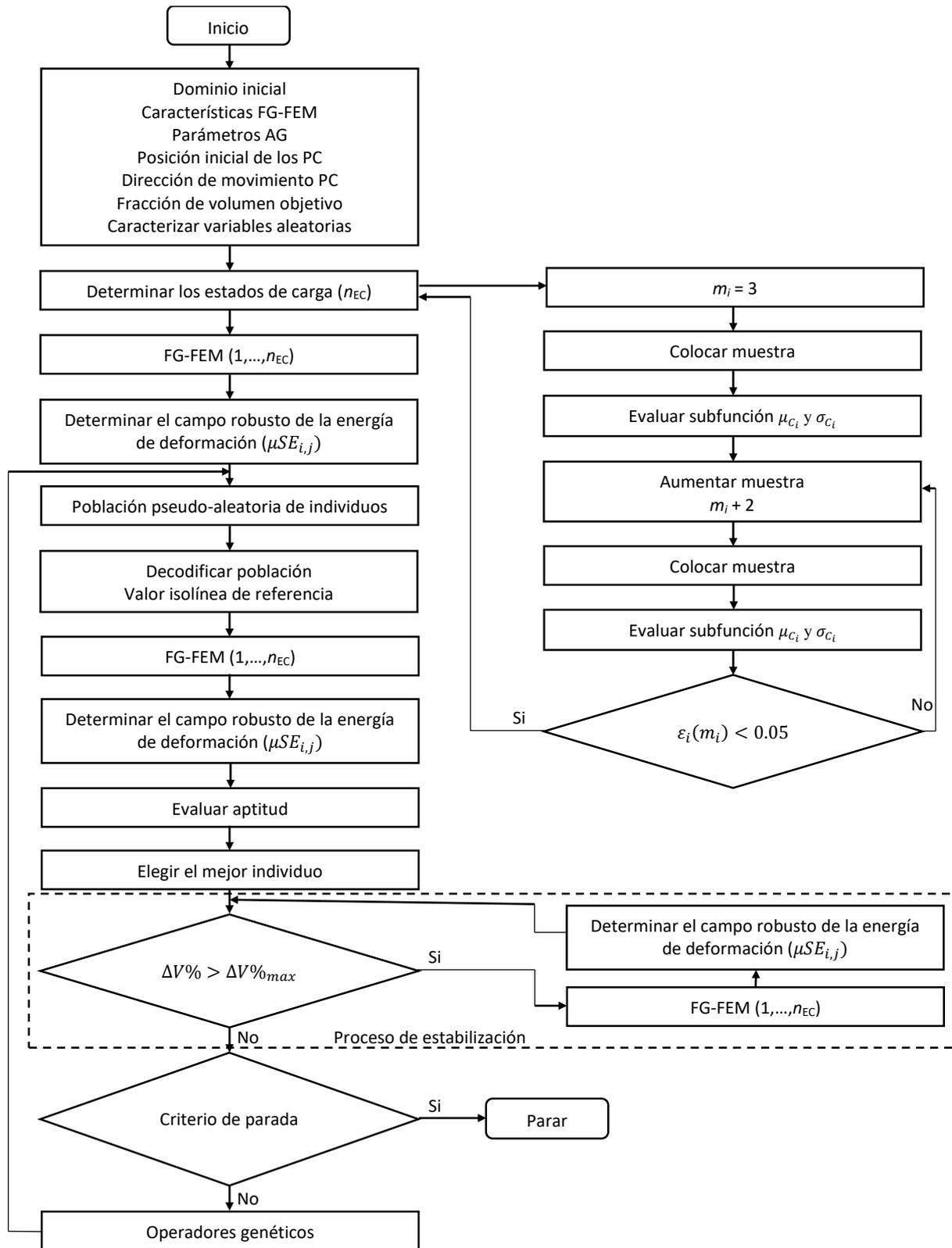
donde  $\mu_c$  y  $\sigma_c$  son el valor medio y la desviación estándar de la compliance cuyos valores se obtienen a partir de las Ecs. (7.5) y (7.6), respectivamente.

## 7.6. Metodología para la optimización robusta de topología con malla fija y algoritmos genéticos

En el diagrama de flujo representado en la figura 7.1 se muestra el algoritmo para el diseño óptimo robusto de topología con isolíneas y GA. A continuación, se describen los principales pasos del algoritmo planteado:

1. Definir las características del dominio inicial de la estructura: longitud, altura, espesor, regiones optimizables, etc.
2. Definir los parámetros del GA:  $\mu$ -GA, codificación, tamaño de la población, tipo de selección, tipo de cruce, tipo de mutación, probabilidad de cruce y mutación, elitismo, función de aptitud, y número máximo de iteraciones.
3. Establecer los parámetros de la malla fija: número de elementos en ambas direcciones, módulo de Young real y virtual, coeficiente de Poisson, tipos de elementos, orden de integración, codificación de la carga, condiciones de diseño.
4. Situar los PC que define el contorno virtual.
5. Fijar los parámetros de movimiento: dirección, sentido, y magnitud de movimiento de los PC.
6. Identificar las fuentes de incertidumbre: número de cargas con incertidumbre ( $n$ ), variables (magnitud, dirección o ambas), tipos de pdfs, parámetros que modelan la pdfs (normalmente media y desviación estándar).
7. Determinar el número de muestras  $m_i$  para cada una de las variables aleatorias  $i$ , con  $i = 1, \dots, n$ .
  - 7.1. Transformar la variable aleatoria al espacio normal estándar.
  - 7.2. Colocar la muestra inicial con  $m_i = 3$ . Determinar la posición  $z_i^{(j)}$  y los pesos  $w_i^{(j)}$  con  $j=1 \dots m_i$  mediante la cuadratura de Gauss-Hermite.
  - 7.3. Transformar al espacio original.
  - 7.4. Determinar los  $m_i$  estados de carga a partir de estas posiciones y de las Ecs. (7.2) y (7.7).
  - 7.5. Evaluar la sub-función  $\mu_{C_i}$  y  $\sigma_{C_i}$  con las Ecs. (7.7) y (7.8), respectivamente.
  - 7.6. Aumentar el tamaño de la muestra en 2 unidades.
  - 7.7. Transformar la variable aleatoria al espacio normal estándar.
  - 7.8. Colocar la muestra.
  - 7.9. Transformar al espacio original.
  - 7.10. Determinar los  $m_i$  estados de carga a partir de estas posiciones y de las Ecs. (7.2) y (7.7).
  - 7.11. Evaluar la sub-función  $\mu_{C_i}$  y  $\sigma_{C_i}$  con las Ecs. (7.7) y (7.8), respectivamente.

- 7.12. Determinar la precisión a partir de las Ecs (7.9) o (7.10), considerando el factor de ponderación. Si la precisión es insuficiente, volver al paso 7.4, si no ir a 8.
8. Analizar la respuesta estructural para los  $n_{EC} = ((m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_n - 1) + 1)$  estados de carga.
9. Determinar el valor medio de la energía de deformación en los nodos de coordenadas  $i, j$  de la malla fija ( $\mu SE_{i,j}$ ) a partir de los  $n_{EC}$  estados de carga según la Ec. (7.13).
10. Generar una población pseudo-aleatoria de tamaño  $N_P$ .
11. Decodificar los cromosomas, obteniendo el nuevo contorno virtual ( $C_v$ ) para cada uno de los individuos.
13. Determinar el valor de la IR para cada uno de los individuos a partir de la Ec. (7.11).
12. Realizar recorte según  $\mu SE_{i,j}$  y el valor de la IR para cada uno de los individuos. En el caso de que un elemento se encuentre intersectado por la IR, utilizar el algoritmo de recorte para determinar la parte proporcional de la estructura que se encuentra en el interior de la estructura.
13. Analizar la respuesta estructural para los  $n_{EC}$  estados de carga y para cada uno de los individuos.
14. Determinar la distribución de  $\mu SE_{i,j}$  para cada uno de los individuos.
15. Evaluar la función de aptitud para cada uno de los individuos según la Ec. (7.14).
16. Identificar el individuo con mejor aptitud.
17. Si el cambio de volumen es mayor al volumen de cambio máximo permitido, ir al paso 19. En caso contrario, ir al paso 20.
18. Analizar la respuesta estructural para el mismo valor de IR del individuo mejor adaptado. Obtener la nueva topología y continuar en el paso 18.
19. Comprobar si se ha alcanzado el número máximo de iteraciones o la fracción de volumen mínima. Si se cumple alguno de los dos criterios ir al paso 22. En caso contrario, ir al paso 21.
20. Aplicar los operadores genéticos: selección, cruce, mutación, elitismo y  $\mu$ -GA. Aumentar el número de generación en 1 y volver al paso 11.
21. Detener el proceso de optimización.



**Figura 7.1:** Diagrama de flujo para la optimización robusta de topología con isolíneas, malla fija y algoritmos genéticos.

## 7.7. Ejemplos numéricos

Para validar el método propuesto para el RTO se han optimizado cuatro ejemplos: viga biapoyada de Michell con una carga incierta, columna simple con una carga incierta, viga biapoyada de Michel con 3 carga inciertas y T-invertida con dos cargas inciertas.

En estos ejemplos se estudia el efecto de considerar: incertidumbre en la magnitud o en la dirección de una carga; diferentes parámetros para caracterizar la pdfs; diferentes tipos de pdfs; y diferentes valores de ponderación en la función objetivo.

En todos los ejemplos, el elemento finito utilizado es el elemento plano rectangular para tensión plana de cuatro nodos, utilizándose para la integración numérica un total de cuatro nodos de Gauss. El criterio utilizado para la extracción de las isolíneas es la energía de deformación media.

Los parámetros que gobiernan el algoritmo genético (tamaño de la población, operador de selección, cruce y mutación, probabilidad de cruce y mutación, longitud del cromosoma, función de aptitud, elitismo, convergencia  $\mu$ -GA) se encuentran recogidos en la tabla 7.1.

**Tabla 7.1:** Parámetros del algoritmo genético.

Ejemplo	Viga de Michell (1 carga)	Voladizo de Michell	Viga de Michell (3 cargas)	T-invertida
Número de individuos, $N_p$	10	10	10	10
Operador selección	ST	ST	ST	ST
Operador de cruce	CU	CU	CU	CU
Operador de mutación	MU	MU	MU	MU
Probabilidad cruce $p_c$	0,8	0,8	0,8	0,8
Probabilidad de mutación $p_m$	0,1	0,1	0,1	0,1
Longitud cromosoma	11	40	11	11
Función de aptitud	$\mu_C$	$\mu_C$	$\mu_C + \omega \sigma_C$	$\mu_C + \omega \sigma_C$
Elitismo	1	1	1	1
$\mu$ -GA	80%	80%	80%	80%

ST = Selección por torneo; CU = Cruce uniforme; MU = Mutación uniforme

Los parámetros que controlan el proceso de optimización (tamaño de paso mínimo y máximo de los PC, dirección de movimiento de los PC, volumen de cambio máximo permitido y la fracción de volumen); y los parámetros del análisis de elementos finitos en malla fija (número de elementos, módulo de elasticidad real, relación entre elasticidad real y virtual, y el coeficiente de Poisson) se muestran en la tabla 7.2.

**Tabla 7.2:** Parámetros que controlan el proceso de optimización.

Ejemplo	$\delta_{\min}$ (mm)	$\delta_{\max}$ (mm)	$\theta_{PC}$ (rad)	$\Delta V\%$	$V/V_0$	El.	$E$ (MPa)	$E/E_0$	$\nu$
Viga de Michell (1 carga)	-2,00	2,00	$3\pi/2$	0,1	0,3	110x44	$210 \cdot 10^3$	$10^4$	0,3
Columna simple	-0,50	0,50	$3\pi/2$	0,1	0,3	96x96	1	$10^4$	0,3
Viga de Michell (3 cargas)	-2,00	2,00	$3\pi/2$	0,1	0,4	110x44	1	$10^4$	0,3
T-invertida	-1,00	1,00	$3\pi/2$	0,1	0,5	3167	$210 \cdot 10^3$	$10^4$	0,3

### 7.7.1. Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada en el borde inferior

El primer ejemplo de ROT con isolíneas y algoritmos genéticos es la viga de Michell con apoyos fijos y una carga  $P$  incierta centrada en el borde inferior. La longitud del dominio de diseño es de 200 mm, la altura de 80 mm y el espesor de 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 4840 elementos, 110 en dirección longitudinal y 44 en dirección transversal. Sobre el borde superior se han dispuesto un total de 11 puntos de control uniformemente espaciados, pudiéndose mover en dirección perpendicular al contorno inicial (figura 7.2).

En los apartados 7.7.1.1. y 7.7.1.2 se pretende demostrar el efecto de considerar incertidumbre en la magnitud  $h(z)$  y/o dirección  $\theta(z)$  de la carga  $P$ , respectivamente, mediante la resolución del problema de minimización del valor medio de la compliance ( $\omega=0$ ). Las variables, en caso de ser inciertas, son caracterizadas por medio de una distribución normal  $N(\mu_i, \sigma_i)$  de media  $\mu_i$  y desviación estándar  $\sigma_i$ , donde  $i$  hace referencia a la variable aleatoria considerada y en caso contrario por su valor nominal.

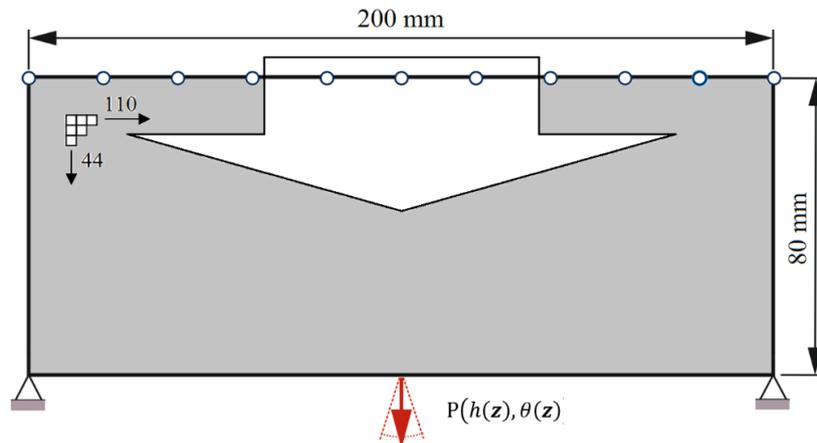


Figura 7.2: Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Dominio de diseño.

#### 7.7.1.1. Incertidumbre en la magnitud de la carga

Para estudiar el efecto de la incertidumbre en la magnitud de la carga  $h(z)$ , el problema considerado se resuelve para tres escenarios diferentes. En la tabla 7.3 se muestran el valor medio y la desviación estándar para cada uno de estos.

Tabla 7.3: Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Valor medio y desviación estándar para la magnitud.

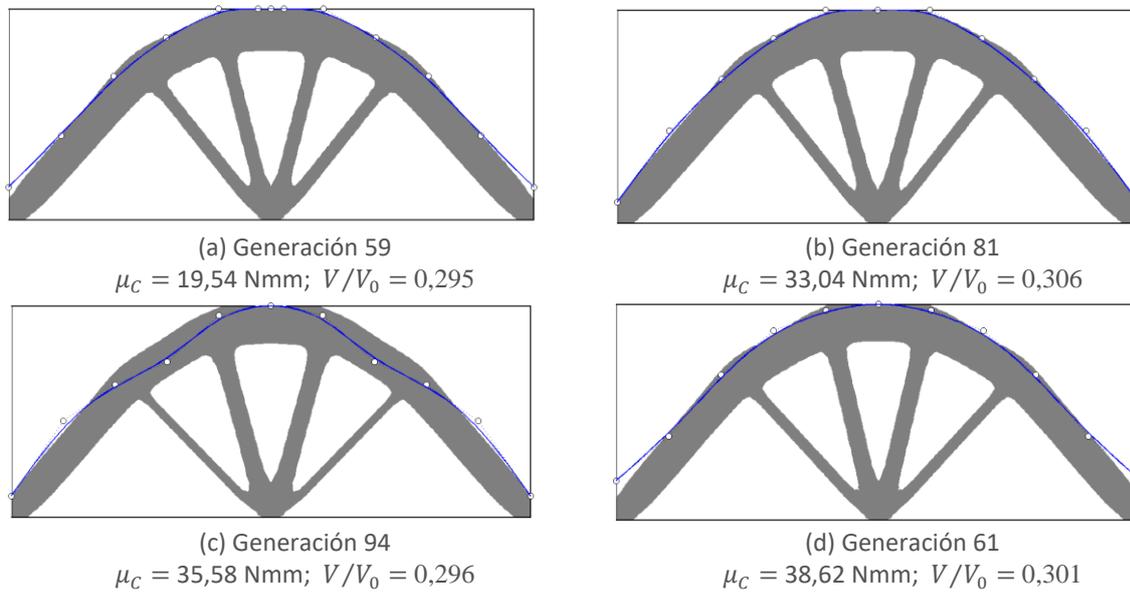
Escenario	Pdf	$\mu_h$	$\sigma_h$
Escenario 1	Normal	1000	125
Escenario 2	Normal	1000	250
Escenario 3	Normal	1000	500

Según la Ec. (7.9) se ha determinado que únicamente son necesarios utilizar 3 de casos de cargas para evaluar el valor medio de la compliance en cada uno de los escenarios. En la tabla 7.4 se muestran los casos de carga y los pesos de los tres escenarios.

**Tabla 7.4:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Estados de carga para los 7 escenarios.

Escenario	Estado de carga 1	Estado de carga 2	Estado de carga 3
E.1	$\omega_1 = 0,0199$	$\omega_2 = 0,3936$	$\omega_3 = 0,9453$
	$f_{H1} = 0,00$	$f_{H2} = 0,00$	$f_{H3} = 0,00$
	$f_{V1} = -846,90$	$f_{V2} = -1000,00$	$f_{V3} = -1153,09$
E.2	$\omega_1 = 0,0199$	$\omega_2 = 0,3936$	$\omega_3 = 0,9453$
	$f_{H1} = 0,00$	$f_{H2} = 0,00$	$f_{H3} = 0,00$
	$f_{V1} = -693,81$	$f_{V2} = -1000,00$	$f_{V3} = -1306,18$
E.3	$\omega_1 = 0,0199$	$\omega_2 = 0,3936$	$\omega_3 = 0,9453$
	$f_{H1} = 0,00$	$f_{H2} = 0,00$	$f_{H3} = 0,00$
	$f_{V1} = -387,62$	$f_{V2} = -1000,00$	$f_{V3} = -1612,37$

En la figura 7.13a se muestra la topología óptima determinista. Esta se obtiene en la generación 59, para un valor de la compliance de  $C = 19,54$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,295$ . Sin embargo, si esta topología determinista se analiza bajo las condiciones de incertidumbre de los escenarios 1, 2 y 3, el valor medio de la compliance aumenta hasta  $\mu_C = 35,97$ ;  $36,81$ ; y  $40,16$  Nmm, respectivamente. Como se puede observar, cuanto mayor es la desviación estándar, mayor es el valor medio de la compliance obtenido.

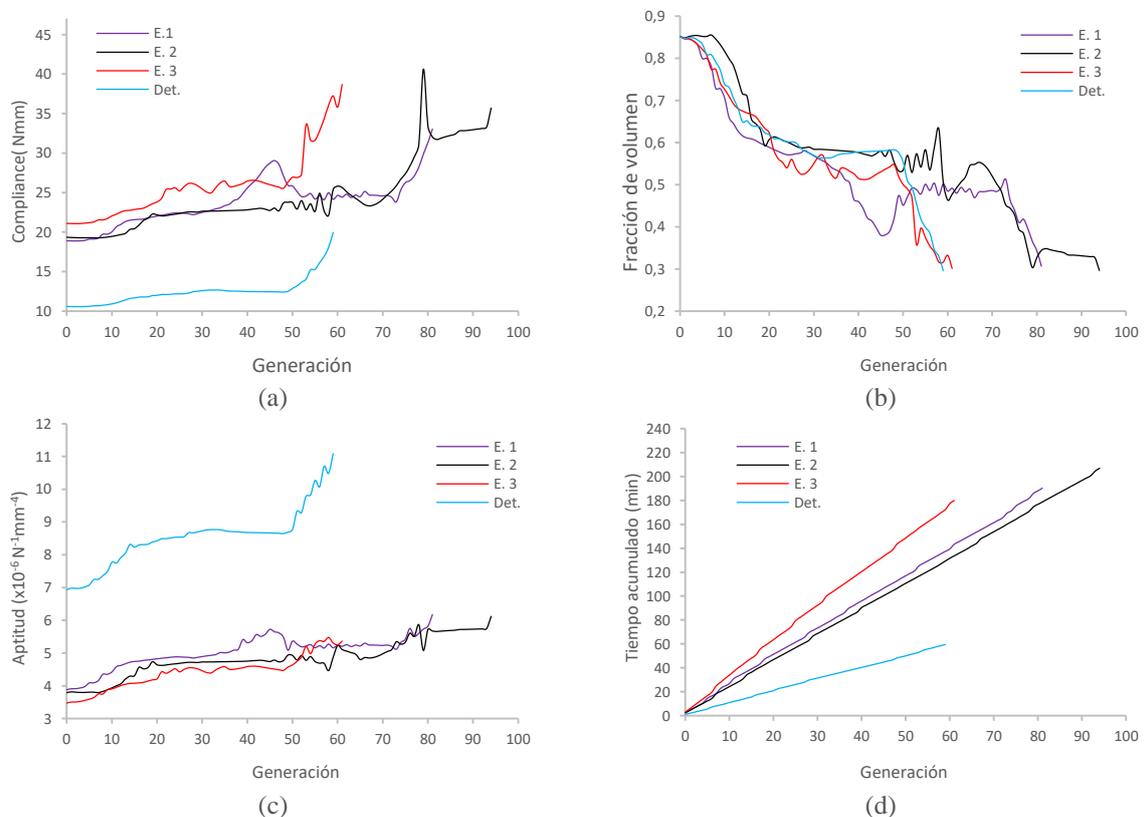


**Figura 7.3:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas: (a) determinista; (b) robusta escenario 1; (c) robusta escenario 2; y (d) robusta escenario 3.

En las figuras 7.3b,c y d se muestran las topologías óptimas robustas obtenidas para los tres escenarios considerados. Para el escenario 1, el óptimo robusto se obtiene en la generación 81, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 33,04$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,306$ . Para el escenario 2, el óptimo robusto se obtiene en la generación 94, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 35,58$  Nmm y una fracción de volumen de

$V/V_0 = 0,296$ . Para el escenario 3, el óptimo robusto se obtiene en la generación 61, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 38,62$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,301$ . Si estos valores son comparados con los valores medios obtenidos a partir de analizar la topología óptima determinista bajo las condiciones de incertidumbre de estos tres escenarios, se puede observar que son prácticamente muy parecido, siendo el error cometido al utilizar la topología determinista bajo condiciones de incertidumbre de los escenarios E1, E2, y E3 con respecto a la topología robusta de 8,86%; 3,45%; y 3.98% respectivamente. Este hecho demuestra la mínima influencia que tiene el considerar en este problema la incertidumbre en la magnitud de la carga y hecho que se refuerza, comprobando la similitud entre las topologías robustas y determinista.

En la figura 7.4 se muestra la evolución del valor medio de la compliance, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo computacional tanto de la optimización determinista como de las optimizaciones robustas.



**Figura 7.4:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional. (Det. = determinista).

### 7.7.1.2. Incertidumbre en la dirección de la carga

Para estudiar el efecto de la incertidumbre en la dirección de la carga  $\theta(z)$ , el problema considerado se resuelve para 6 escenarios diferentes. En la tabla 7.5 se muestran el valor medio y desviación estándar de los escenarios considerados para caracterizar la incertidumbre en la dirección de la carga.

**Tabla 7.5:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Incertidumbre en dirección. Valor medio y desviación estándar.

Escenario	Pdf	$\mu_\theta$	$\sigma_\theta$
Escenario 1 (E.1)	Normal	$3\pi/2$	0.125
Escenario 2 (E.2)	Normal	$3\pi/2$	0.250
Escenario 3 (E.3)	Normal	$3\pi/2$	0.375
Escenario 4 (E.4)	Normal	$3\pi/2$	0.500
Escenario 5 (E.5)	Normal	$3\pi/2$	0.625
Escenario 6 (E.6)	Normal	$3\pi/2$	0.750

Se ha determinado que para evaluar el valor medio de la compliance en cada uno de los escenarios son necesarios 5 casos de carga. Remarcar que aunque la estructura inicial presenta simetría, ya que dominio inicial y distribución de la carga son simétricas, los diferentes estados de carga no la presentan. En la tabla 7.6 se muestran los estados de carga y pesos utilizados en los diferentes escenarios.

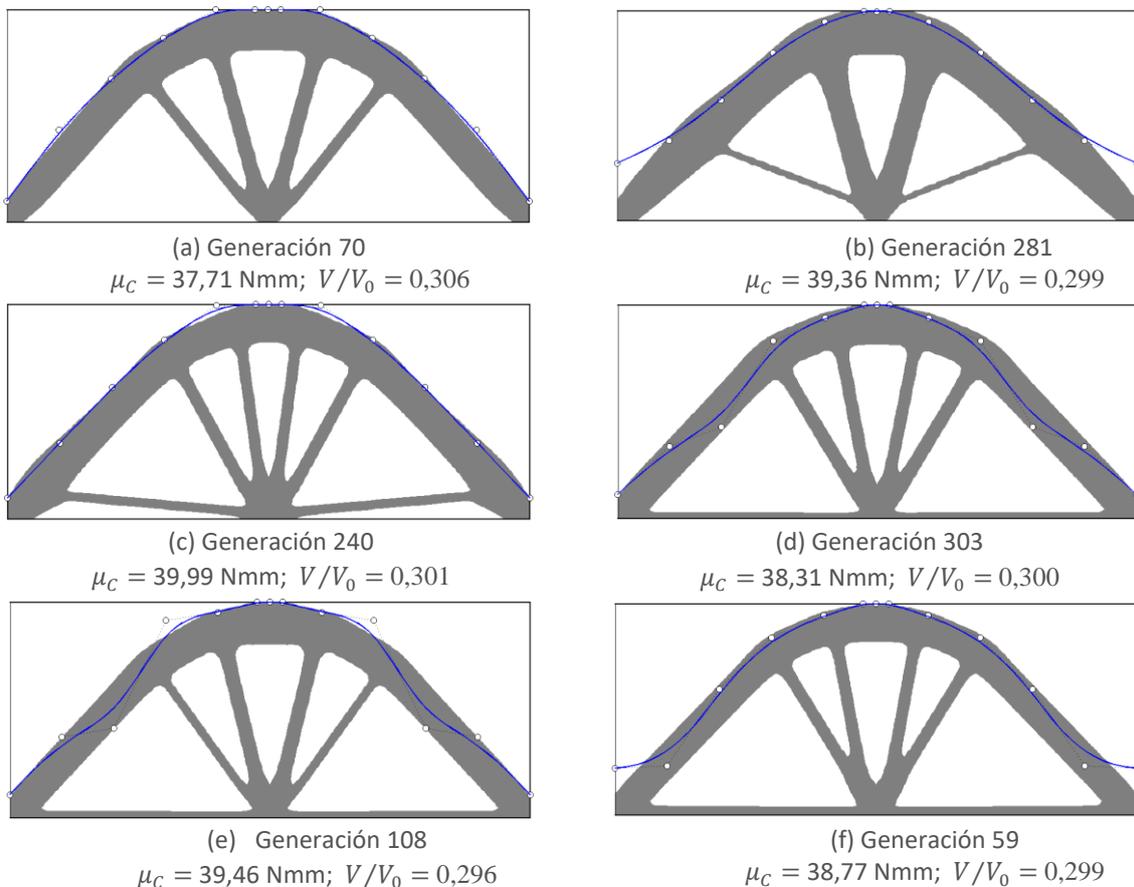
**Tabla 7.6:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Estados de carga para los 7 escenarios.

Escenario	Estado de carga 1	Estado de carga 2	Estado de carga 3	Estado de carga 4	Estado de carga 5
E.1	$\omega_1 = 0,0199$ $f_{H1} = 249,84$ $f_{V1} = -968,28$	$\omega_2 = 0,3936$ $f_{H2} = 119,53$ $f_{V2} = -992,82$	$\omega_3 = 0,9453$ $f_{H3} = 0,0$ $f_{V3} = -1000$	$\omega_4 = 0,3936$ $f_{H4} = -119,53$ $f_{V4} = -992,82$	$\omega_5 = 0,0199$ $f_{H5} = -249,84$ $f_{V5} = -968,28$
E.2	$\omega_1 = 0,0199$ $f_{H1} = 483,84$ $f_{V1} = -875,15$	$\omega_2 = 0,3936$ $f_{H2} = 237,35$ $f_{V2} = -971,42$	$\omega_3 = 0,9453$ $f_{H3} = 0,0$ $f_{V3} = -1000$	$\omega_4 = 0,3936$ $f_{H4} = -237,35$ $f_{V4} = -971,42$	$\omega_5 = 0,0199$ $f_{H5} = -483,84$ $f_{V5} = -875,15$
E.3	$\omega_1 = 0,0199$ $f_{H1} = 687,15$ $f_{V1} = -726,50$	$\omega_2 = 0,3936$ $f_{H2} = 351,77$ $f_{V2} = -936,08$	$\omega_3 = 0,9453$ $f_{H3} = 0,0$ $f_{V3} = -1000$	$\omega_4 = 0,3936$ $f_{H4} = -351,77$ $f_{V4} = -936,08$	$\omega_5 = 0,0199$ $f_{H5} = -687,15$ $f_{V5} = -726,50$
E.4	$\omega_1 = 0,0199$ $f_{H1} = 846,88$ $f_{V1} = -531,78$	$\omega_2 = 0,3936$ $f_{H2} = 461,14$ $f_{V2} = -887,32$	$\omega_3 = 0,9453$ $f_{H3} = 0,0$ $f_{V3} = -1000$	$\omega_4 = 0,3936$ $f_{H4} = -461,14$ $f_{V4} = -887,32$	$\omega_5 = 0,0199$ $f_{H5} = -846,88$ $f_{V5} = -531,78$
E.5	$\omega_1 = 0,0199$ $f_{H1} = 952,88$ $f_{V1} = -303,32$	$\omega_2 = 0,3936$ $f_{H2} = 563,90$ $f_{V2} = -825,83$	$\omega_3 = 0,9453$ $f_{H3} = 0,0$ $f_{V3} = -1000$	$\omega_4 = 0,3936$ $f_{H4} = -563,90$ $f_{V4} = -825,83$	$\omega_5 = 0,0199$ $f_{H5} = -952,88$ $f_{V5} = -303,32$
E.6	$\omega_1 = 0,0199$ $f_{H1} = 999,88$ $f_{V1} = 15,04$	$\omega_2 = 0,3936$ $f_{H2} = 683,45$ $f_{V2} = -729,99$	$\omega_3 = 0,9453$ $f_{H3} = 0,0$ $f_{V3} = -1000$	$\omega_4 = 0,3936$ $f_{H4} = -683,45$ $f_{V4} = -729,99$	$\omega_5 = 0,0199$ $f_{H5} = -999,88$ $f_{V5} = 15,04$

El diseño óptimo determinista se consigue en la generación 59, con un valor para la compliance de  $C = 19,54$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,295$ . Sin embargo, si la topología determinista se analiza bajo las condiciones de incertidumbre de los diferentes escenarios, el valor medio de la compliance aumenta considerablemente a  $\mu_C = 41,26; 57,44; 82,78; 115,09; 151,77; 304,99$  Nmm para los escenarios 1; 2; 3; 4; 5; y 6 respectivamente. Si estos resultados son comparados con los tres escenarios de incertidumbre en magnitud, se demuestra cómo para este ejemplo la incertidumbre en la dirección tiene una mayor influencia que la incertidumbre en la magnitud.

En la figura 7.5 se muestran las topologías óptimas robustas obtenidas para los seis escenarios. Para el escenario 1, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 70, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 37,71$  Nmm y una fracción de volumen de

$V/V_0 = 0,306$ . Para el escenario 2, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 281, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 39,36$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,299$ . Para el escenario 3, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 240, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 39,99$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,301$ . Para el escenario 4, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 303, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 38,31$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,300$ . Para el escenario 5, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 108, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 39,46$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,296$ . Para el escenario 6, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 59, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 38,77$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,299$



**Figura 7.5:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de incierta centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas robustas considerando incertidumbre en la dirección de la carga: (a) E.1; (b) E.2; (c) E.3; (d) E.4; (e) E.5; y (f) E.6.

Analizando los resultados que se presentan en la figura 7.5, se puede determinar que:

1. Todas las topologías obtenidas presentan una geometría simétrica, lo cual parece lógico si reconocemos que tanto el dominio inicial y la pdf utilizada para caracterizar la dirección de la carga son simétricas, aunque los diferentes estados de carga no lo sean.
2. Las diferentes topologías obtenidas se constituyen básicamente por un arco y barras inclinadas que van del arco al punto de aplicación de la carga. Se observa como al ir aumentando la desviación estándar, la inclinación mínima de las barras va disminuyendo

hasta alcanzar una disposición horizontal. A partir de ese momento, el espesor de la barra horizontal aumenta conforme aumenta la desviación estándar de  $\sigma_\theta = 0,5$  a  $\sigma_\theta = 0,75$ . Esto se debe a que al ir aumentando la desviación estándar, aumenta la componente horizontal máxima de los diferentes estados de carga (ver tabla 7.6).

- Las topologías robustas son mucho más eficientes que la topología determinista ante la consideración de incertidumbre en la dirección de la carga. En la tabla 7.7 se recogen el valor medio de la compliance para los diseños robustos como determinista para los diferentes escenarios, así como el error cometido al utilizar la topología determinista en lugar de una robusta en dichos escenarios.

**Tabla 7.7:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical de incierta centrada sobre el borde inferior. Comparación entre los diseño robusto y determinista.

Escenario	Robusta	Determinista	Error (%)
	$\mu_C$ (Nmm)	$\mu_C$ (Nmm)	
E.1	37,71	41,26	16,32
E.2	39,36	57,44	45,93
E.3	39,99	82,78	107,00
E.4	38,31	115,09	203,10
E.5	39,46	151,77	304,22
E.6	38,77	304,99	696,98

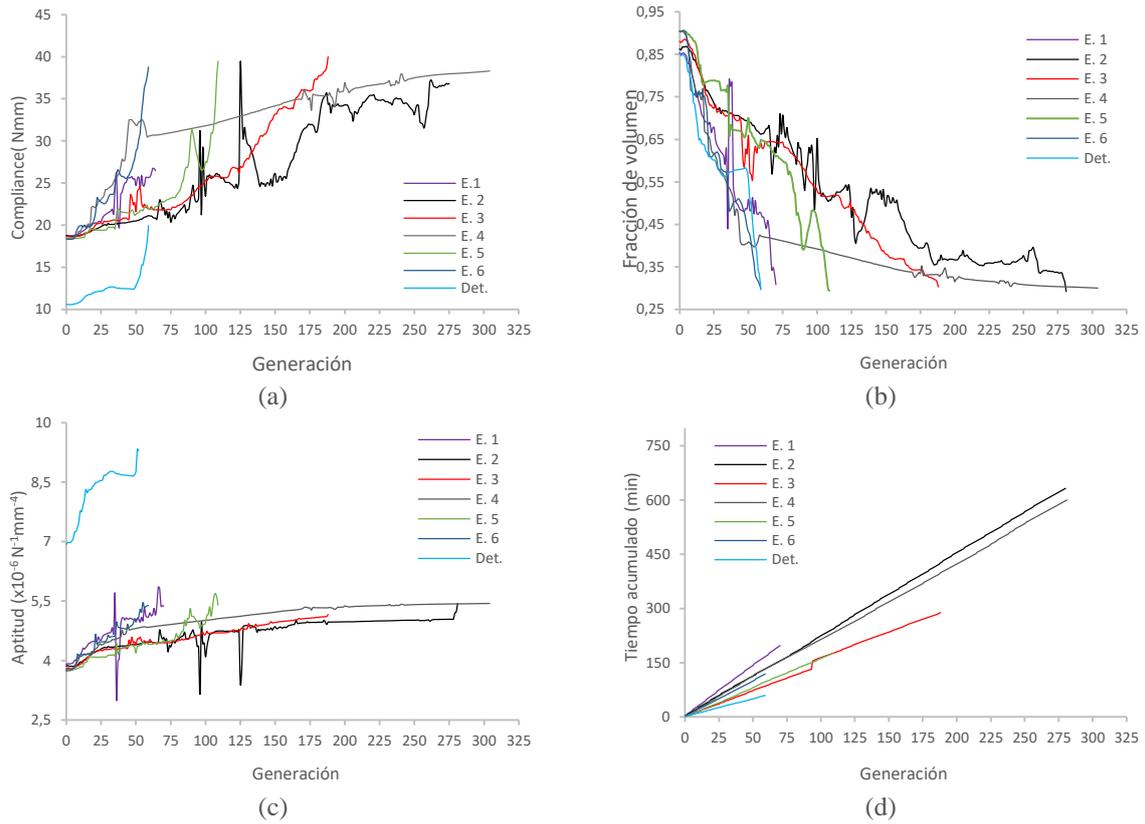
Analizando la tabla 7.7 se puede apreciar la importancia de considerar las incertidumbres en el proceso de optimización. En esta se comprueba como la topología determinista es menos eficiente considerando la existencia de incertidumbre que las robustas.

En la figura 7.6 se muestra la evolución del valor medio de la compliance, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo computacional tanto de la optimización determinista como las optimizaciones robustas.

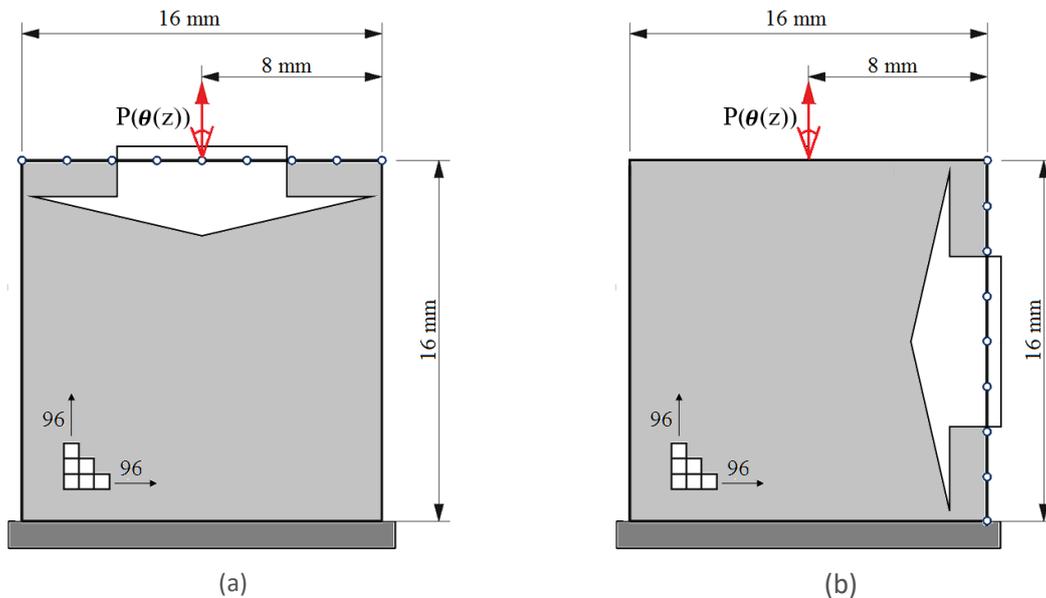
### 7.7.2. Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior

El segundo ejemplo es una columna con el extremo inferior fijo y con una carga vertical, de dirección incierta, centrada sobre el extremo superior. La longitud del dominio de diseño es de 16 mm de longitud, la altura de 16 mm y el espesor de 1 mm. Para realizar el análisis se ha utilizado una malla fija de 96×96 (9216) elementos. Para conducir la optimización robusta, se han dispuesto un total de 9 puntos de control uniformemente distribuidos sobre el extremo superior, el factor de ponderación  $\beta = 0$  y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,3$ . En cambio, para conducir la optimización determinista, se han dispuesto 9 puntos de control uniformemente distribuidos sobre el extremo derecho. En la figura 7.7 se muestra la posición y la dirección de movimiento de los puntos de control para la optimización robusta como determinista.

En este ejemplo se pretende estudiar la influencia del tipo de pdf utilizada para caracterizar la incertidumbre en la dirección de la carga. Para ello, la magnitud de la carga se fija a un valor nominal de 100 N, mientras que su dirección se caracteriza por medio de las tres



**Figura 7.6:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional. (Det. = determinista).

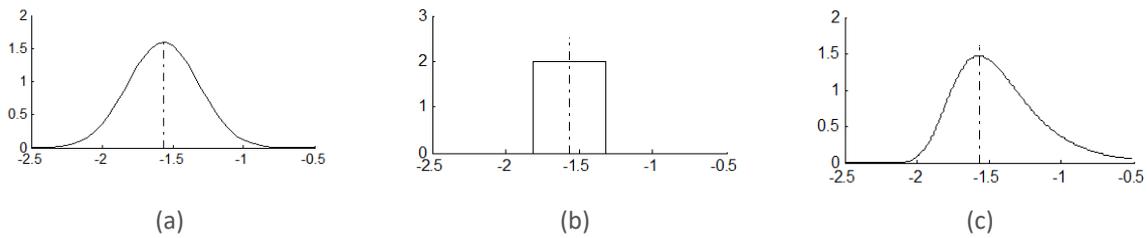


**Figura 7.7:** Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Dominio de diseño. (a) Optimización robusta. (b) Optimización determinista.

pdfs recogidas en la tabla 7.8. Como se puede apreciar en la figura 7.8, las distribuciones normal y uniforme son simétricas, mientras que la distribución de Gumbel es asimétrica.

**Tabla 7.8:** Columna simple carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Tipos de funciones de distribución de probabilidad utilizadas para caracterizar la incertidumbre en la dirección.

	Pdf	$\mu_\theta$	$\sigma_\theta$
Escenario 1 (E.1)	Normal	$3\pi/2$	0.25
Escenario 2 (E.2)	Uniforme	$3\pi/2$	0.25
Escenario 3 (E.3)	Gumel	$3\pi/2$	0.25



**Figura 7.8:** Funciones de distribución de probabilidad. (a) Distribución Normal. (b) Distribución Uniforme. (c) Distribución de Gumbel.

Se ha determinado que para evaluar el valor medio de la compliance en los diferentes escenarios son necesarios 5 estados de carga. En la tabla 7.9 se muestran los estados de carga utilizados para cada una de las distribuciones.

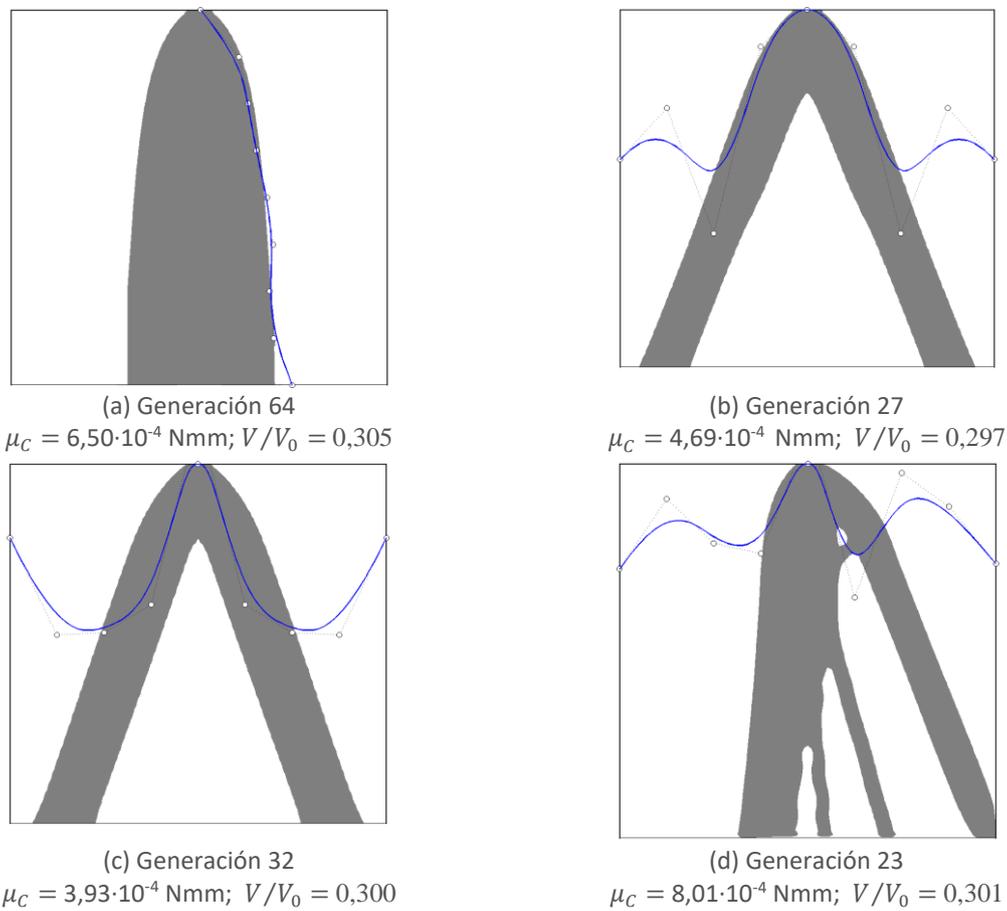
**Tabla 7.9:** Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Estados de carga para los 3 escenarios.

Escenario	Estado de carga 1	Estado de carga 2	Estado de carga 3	Estado de carga 4	Estado de carga 5
E.1	$\omega_1 = 0,0199$	$\omega_2 = 0,3936$	$\omega_3 = 0,9453$	$\omega_4 = 0,3936$	$\omega_5 = 0,0199$
	$f_{H1} = -48,38$	$f_{H2} = -23,73$	$f_{H3} = 0,0$	$f_{H4} = 23,73$	$f_{H5} = 48,38$
	$f_{V1} = 87,51$	$f_{V2} = 97,14$	$f_{V3} = 100$	$f_{V4} = 97,14$	$f_{V5} = 87,51$
E.2	$\omega_1 = 0,059$	$\omega_2 = 0,119$	$\omega_3 = 0,142$	$\omega_4 = 0,119$	$\omega_5 = 0,059$
	$f_{H1} = -22,46$	$f_{H2} = -13,42$	$f_{H3} = 0,0$	$f_{H4} = 13,42$	$f_{H5} = 22,46$
	$f_{V1} = 97,44$	$f_{V2} = 99,09$	$f_{V3} = 100$	$f_{V4} = 99,09$	$f_{V5} = 97,44$
E.3	$\omega_1 = 0,0199$	$\omega_2 = 0,3936$	$\omega_3 = 0,9453$	$\omega_4 = 0,3936$	$\omega_5 = 0,0199$
	$f_{H1} = -81,63$	$f_{H2} = -40,94$	$f_{H3} = -9,15$	$f_{H4} = 14,34$	$f_{H5} = 32,95$
	$f_{V1} = 57,75$	$f_{V2} = 91,23$	$f_{V3} = 99,58$	$f_{V4} = 98,96$	$f_{V5} = 94,41$

El óptimo determinista se obtiene en la generación 64, con un valor para la compliance de  $C = 6,50 \cdot 10^{-4}$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,305$ . Como se puede apreciar en la figura 7.9a, el diseño óptimo determinista corresponde con una columna. Si esta topología se analiza considerando la incertidumbre en la dirección de la carga, se obtiene un valor medio de  $\mu_C = 1,76 \cdot 10^{-3}$ ;  $6,44 \cdot 10^{-3}$  y  $2,47 \cdot 10^{-3}$  Nmm para las pdfs de los escenarios 1; 2; y 3 respectivamente.

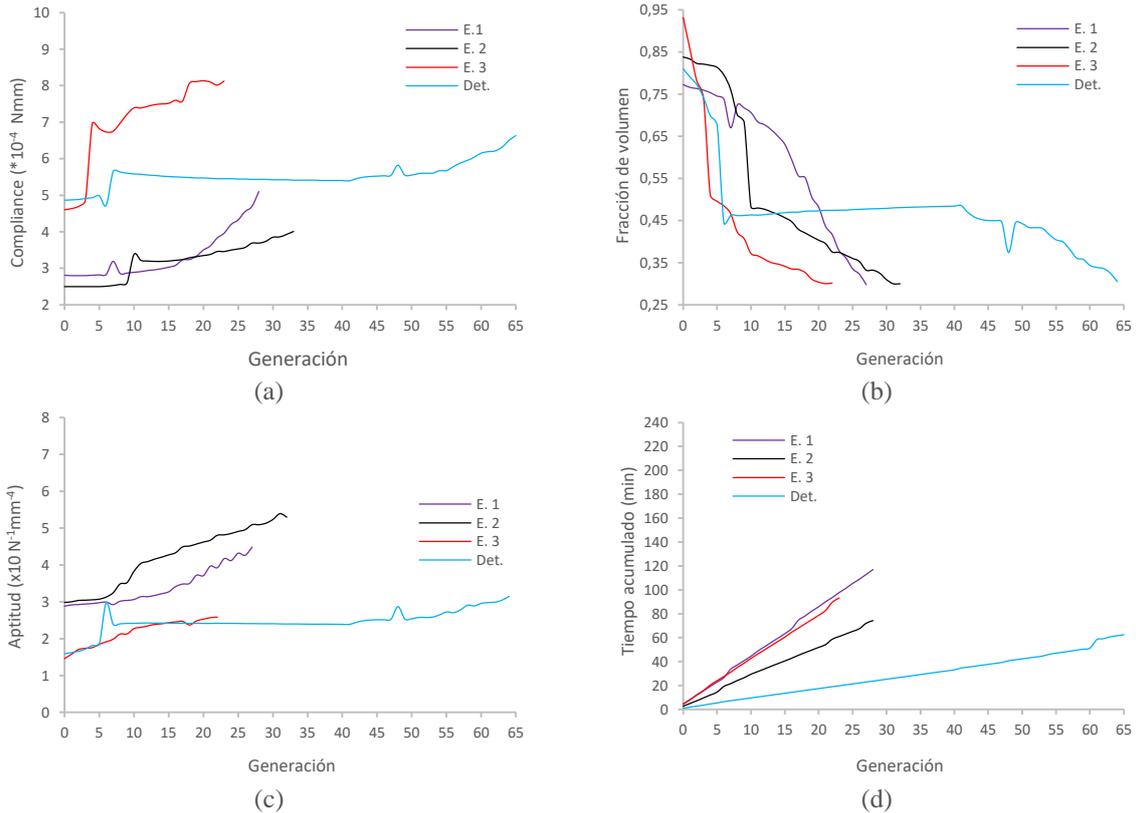
En la figuras 7.9b,c,d, se muestran los diseños óptimos robustos obtenidos para la distribución normal, uniforme y de Gumbel. Para la distribución normal, el óptimo robusto se

obtiene en la generación 27, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 4,69 \cdot 10^{-4}$  Nmm y una fracción de volumen de 0,297. Para la distribución uniforme, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 32, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 3,93 \cdot 10^{-4}$  Nmm y una fracción de volumen de 0,300. Para la distribución de Gumbel, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 23, con un valor medio para la compliance de  $\mu_C = 8,01 \cdot 10^{-4}$  Nmm y una fracción de volumen de 0,301. Los diseños pasan de ser una barra vertical a una combinación de barras inclinadas. Esto se debe, a que al considerar incertidumbre en la dirección de la carga, esta puede darse en otra dirección que no sea la vertical, provocando la aparición de una componente horizontal en los estados de carga. Por otro lado, debido a la simetría de las distribuciones normal y uniforme y a la asimetría de la distribución de Gumbel, los diseños óptimos para la distribución normal y uniforme son simétricos mientras que el diseño óptimo para la distribución de Gumbel no los es.



**Figura 7.9:** Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Topologías óptimas: (a) determinista; (b) robusta escenario 1; (c) robusta escenario 2; y (d) robusta escenario 3.

En la figura 7.10 se muestra la evolución del valor medio de la compliance, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo computacional tanto de la optimización determinista como las optimizaciones robustas.

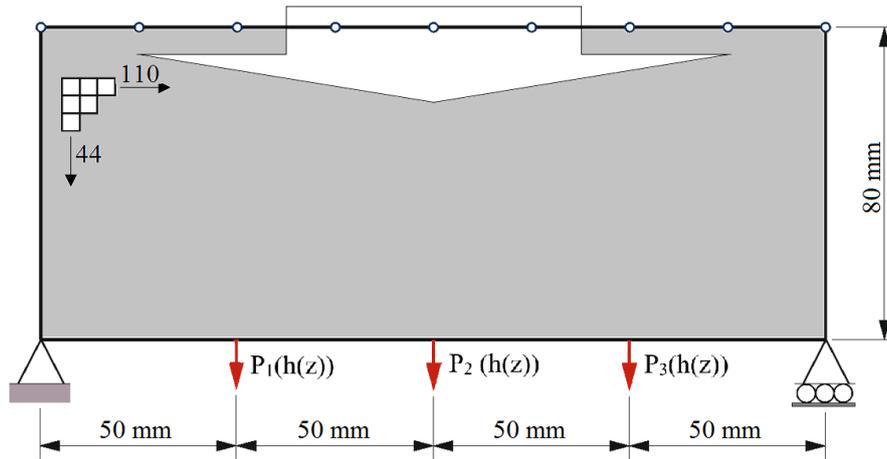


**Figura 7.10:** Columna con carga vertical de dirección incierta centrada sobre el borde superior. Topologías óptimas. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional. (Det. = determinista).

### 7.7.3. Viga de Michell con tres carga verticales inciertas sobre el borde inferior

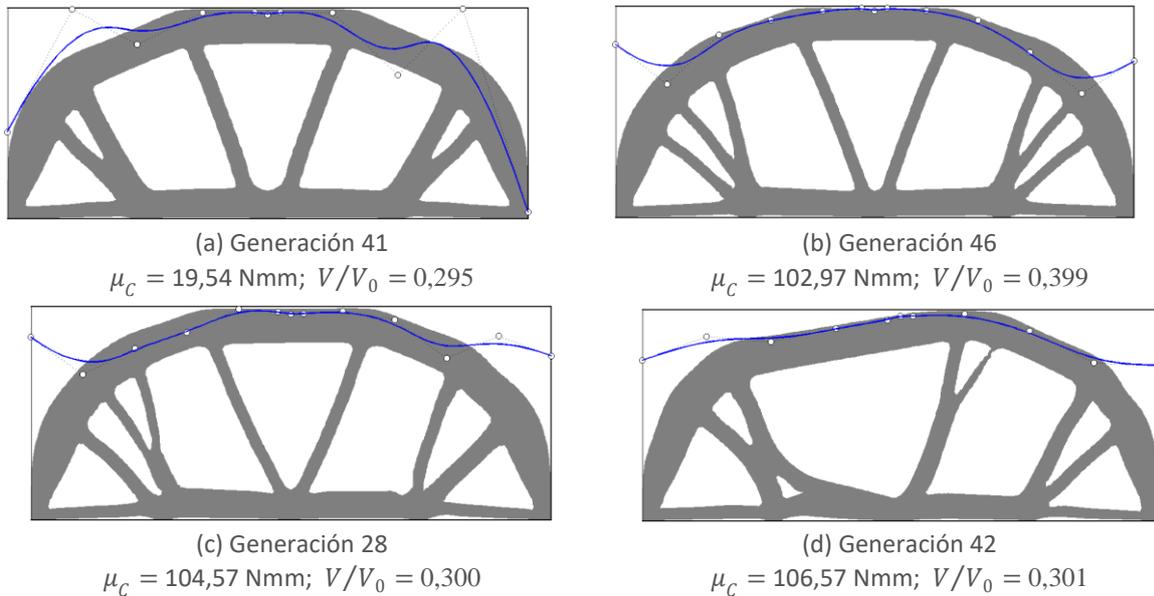
El tercer ejemplo optimizado es la viga de Michell con tres cargas inciertas aplicadas sobre el borde inferior. El dominio de diseño, las condiciones de contorno y las condiciones de carga se representa en la figura 7.11. La longitud del dominio de diseño es de 200 mm, la altura de 80 mm y el espesor de 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 4840 elementos, 110 en la dirección longitudinal y 44 en la dirección transversal. La magnitud de las tres cargas se han caracterizado por medio de tres distribuciones normales de media  $\mu_h = 1$  y desviación estándar de  $\sigma_{h1} = 0,5$ ;  $\sigma_{h2} = 0,1$ ; y  $\sigma_{h3} = 0,2$ . Las direcciones de las cargas se consideran no inciertas con un valor nominal de  $-\pi/2$  para todas ellas. Sobre el borde superior se han dispuesto un total de 9 puntos de control uniformemente espaciados y que se moverán en todo momento perpendicularmente al contorno inicial. En este ejemplo se pretende observar el efecto del parámetro de ponderación  $\omega$  en la ponderación.

La solución óptima determinista se obtiene en la generación 41, con un valor para la compliance de  $C = 30,15$  Nmm y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,401$  (ver figura 7.12a). Como se puede apreciar en esta figura, la topología óptima obtenida es simétrica, ya que para el caso determinista las tres fuerzas tienen una magnitud de 1N. Si las condiciones de incertidumbre son consideradas sobre la solución determinista, se obtiene un valor medio y una desviación estándar para la compliance de  $\mu_C = 105,97$  Nmm y  $\sigma_C = 170,73$  Nmm respectivamente.



**Figura 7.11:** Viga de Michell con tres cargas inciertas sobre el borde inferior. Dominio de diseño.

Sin embargo, si las incertidumbres se tienen en cuenta durante el proceso de optimización, se obtienen los diseños óptimos robustos mostrados en las figuras 7.12b; 7.12c; y 7.12d para factores de ponderación de  $\omega = 0$ ; 1; y 2,5 respectivamente. Para  $\omega = 0$ , la cual equivale a optimizar el valor medio de la compliance, el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 46, con un valor medio y una desviación estándar para la compliance de  $\mu_C = 102,97$  Nmm y  $\sigma_C = 168,61$  Nmm. Para un valor de  $\omega = 1$ , el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 28, con un valor medio y una desviación estándar para la compliance de  $\mu_C = 104,57$  Nmm y  $\sigma_C = 166,57$  Nmm. Para un valor de  $\omega = 2,5$ , el diseño óptimo robusto se obtiene en la generación 42, con un valor medio y una desviación estándar para la compliance de  $\mu_C = 106,29$  Nmm y  $\sigma_C = 164,21$  Nmm.



**Figura 7.12:** Viga de Michell con apoyos fijos y carga vertical incierta centrada sobre el borde inferior. Topologías óptimas: (a) determinista; (b) robusta escenario 1; (c) robusta escenario 2; y (d) robusta escenario 3.

En la tabla 7.10 se muestran los resultados de los diseños óptimos robustos y del diseño determinista bajo el efecto de la incertidumbre. Como se puede observar, conforme aumenta el parámetro de ponderación  $\omega$ , menor es la desviación estándar de la compliance y mayor el valor medio. Además, los valores medios y las desviaciones estándar de la compliance para las topologías robustas son prácticamente los mismos a los obtenidos para la topología determinista bajo las condiciones de incertidumbre. Esto demuestra la mínima influencia que tiene la incertidumbre en la magnitud de las cargas en este problema. Además de que para  $\omega = 0$ ; y  $\omega = 1$  los diseños óptimos robustos son prácticamente iguales a la topología óptima determinista.

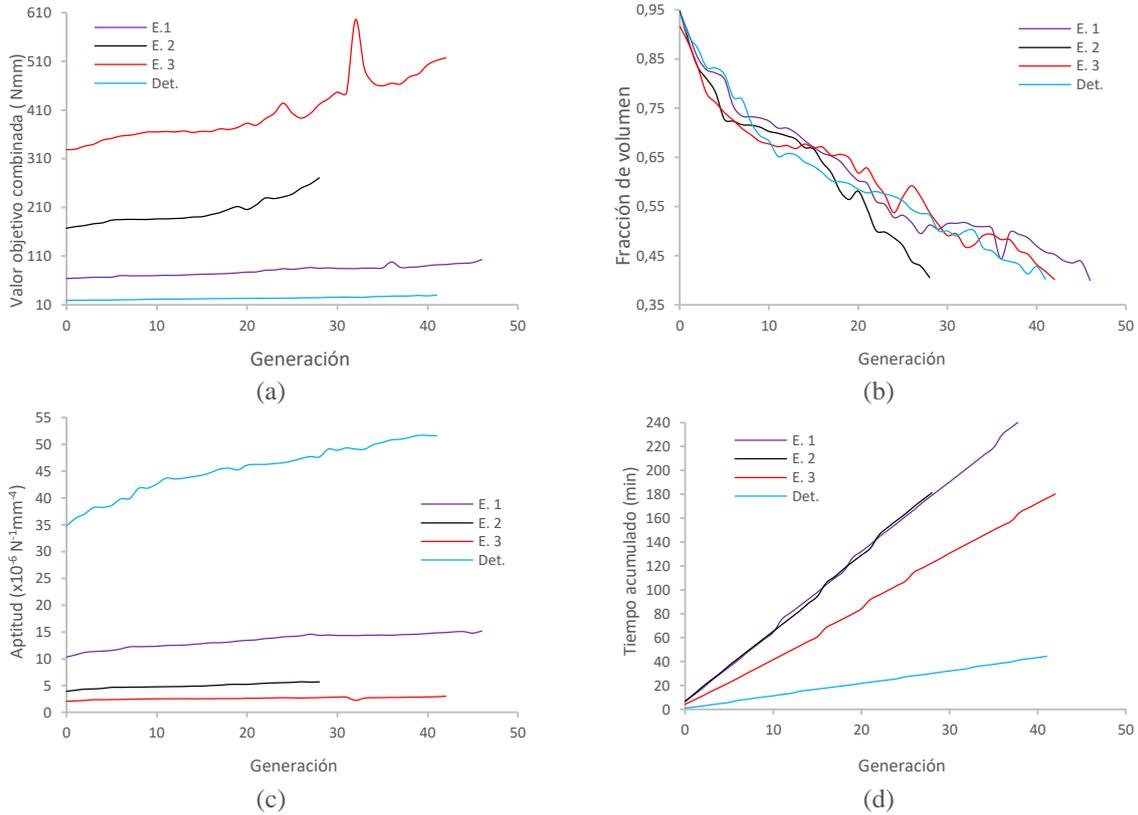
**Tabla 7.10:** Viga de Michell con tres cargas inciertas sobre el borde inferior. Comparación entre las soluciones robustas y la determinista.

Test	Media $\mu_C$ (Nmm)	Desviación estándar $\sigma_C$ (Nmm)	Fracción de volumen $V/V_0$	Generaciones
Determinista	105,97	170,73	0,401	-
Robusto $\omega = 0$	102,97	168,61	0,399	46
Robusto $\omega = 1$	104,57	166,57	0,405	28
Robusto $\omega = 2,5$	106,29	164,21	0,401	42

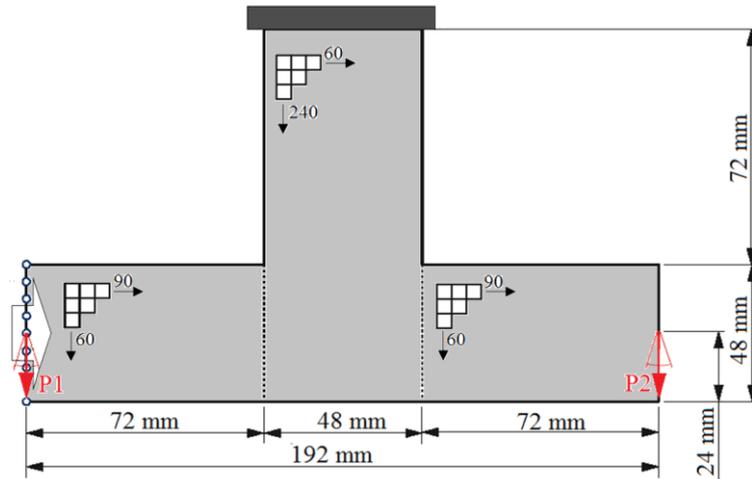
En la figura 7.13, se muestra la evolución del valor objetivo, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo computacional tanto de la optimización determinista como las optimizaciones robustas. En la figura 7.13a y 7.13c se puede observar como la evolución de la función objetivo y la aptitud tienen diferentes niveles, esto se debe a la contribución de la desviación estándar de la compliance debido al factor  $\omega$ .

#### 7.7.4. T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales.

El cuarto ejemplo es una estructura en forma de T-invertida. En la Figura 7.14, se muestran las dimensiones del dominio de diseño y el número de elementos finitos en la dirección horizontal y vertical en los subdominios en los que se ha dividido el dominio de diseño. La estructura está fija en su extremo superior, y está sujeta a dos cargas  $P_1$  y  $P_2$ , de magnitud y dirección inciertas, aplicadas en los puntos medios de los extremos laterales. La incertidumbre en la magnitud y la dirección de las cargas  $P_1$  y  $P_2$  se han modelado por medio de dos distribuciones normales de medias  $\mu_h = 5$  y  $\mu_\theta = 3\pi/2$  y desviaciones estándar  $\sigma_h = 0,5$  y  $\sigma_\theta = 0,25$ ; respectivamente. La estructura se ha optimizado bajo condiciones de carga determinista y considerando incertidumbres en la magnitud y en la dirección de la carga. Tanto para la optimización determinista, como para la optimización robusta, se ha dispuesto un total de 9 puntos de control uniformemente espaciados sobre el extremo libre izquierdo y se ha establecido una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,5$  y un factor de ponderación de  $\omega = 1$ .



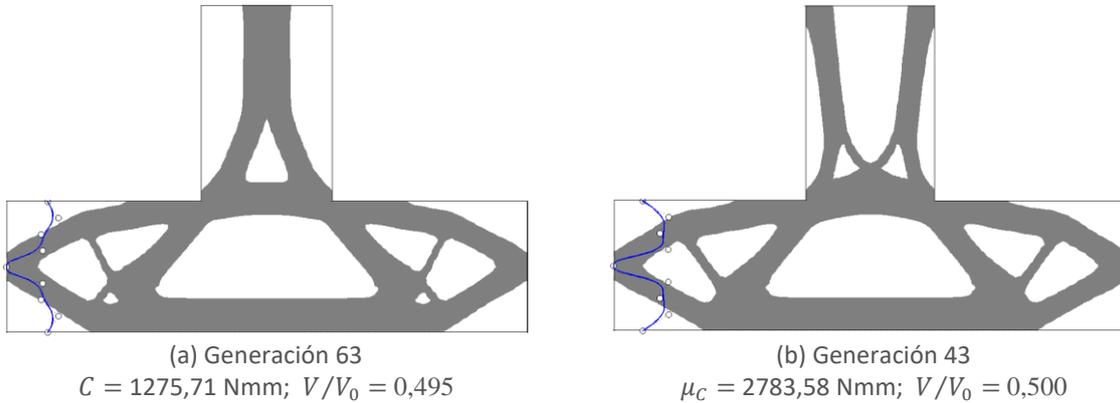
**Figura 7.13:** Viga de Michell con tres cargas inciertas sobre el borde inferior. (a) Evolución de la función objetivo combinada. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional.



**Figura 7.14:** T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales. Dominio de diseño.

En la figura 7.15a, se muestra el diseño óptimo determinista obtenido en la generación 63, con un valor para la compliance de  $C = 1275,71 \text{ Nmm}$  y una fracción de volumen de  $V/V_0 = 0,495$ . Si la topología determinista se analiza considerando las incertidumbres en la

magnitud y en la dirección de ambas cargas, se obtiene un valor medio y una desviación estándar para la compliance de  $\mu_C = 4372,56$  Nmm y  $\sigma_C = 8948,22$  Nmm.



**Figura 7.15:** T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales: (a) Diseño determinista; (b) Diseño robusto.

Realizada la optimización robusta, el diseño óptimo robusto (ver figura 7.15b) se obtiene en la generación 43, con un valor medio y una desviación estándar para la compliance de  $\mu_C = 2783,58$  Nmm y  $\sigma_C = 5771,16$  Nmm. Ambos diseños, robusto y determinista, son muy similares salvo en la parte superior, donde las barras pasan de estar de una disposición inclinada a otra prácticamente vertical y con una cruceta de refuerzo. En la tabla 7.11, se comparan los resultados del diseño determinista y robusto bajo el efecto de la incertidumbre.

**Tabla 7.11:** T-invertida con dos cargas de magnitud y dirección inciertas centradas en el centro de los extremos laterales.

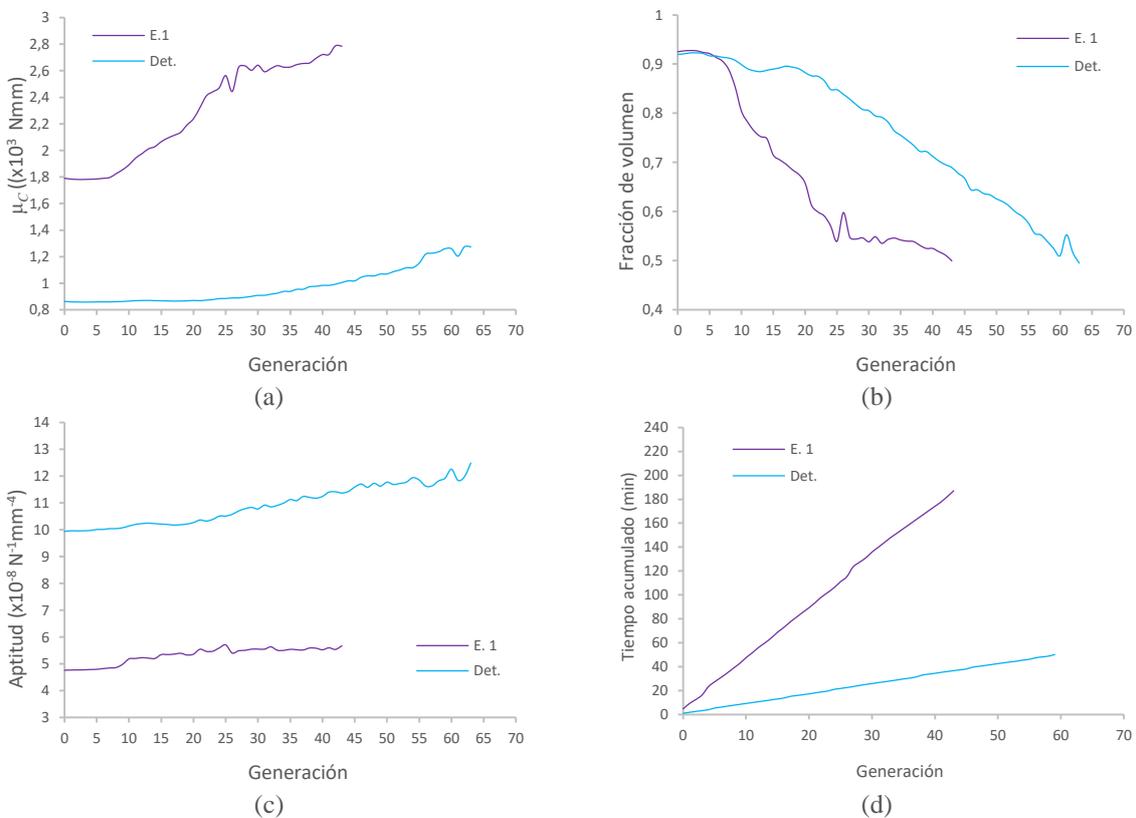
Test	Casos de carga	Media $\mu_C$ (Nmm)	Desviación estándar $\sigma_C$ (Nmm)	Fracción de volumen $V/V_0$	Generación
Determinista	1	4372,56	8948,22	0,495	63
Robusto	17	2783,58	5771,16	0,500	43

En la figura 7.16, se muestra la evolución de la función objetivo, la fracción de volumen, la aptitud y el tiempo computacional tanto para la optimización determinista como para la optimización robusta. Observando las pendientes de las curvas de la figura 7.17d se puede apreciar el elevado coste computacional de la optimización robusta con respecto a la determinista, el cual se deriva del hecho de necesitar 17 estados de carga en la optimización.

## 7.8. Conclusiones

En este trabajo se presenta un algoritmo para la optimización de topología robusta considerando la existencia de incertidumbres en las cargas. Para ello, el problema de RTO se ha formulado de forma probabilista, tomando como función objetivo la suma ponderada del valor medio y de la desviación estándar de la compliance. En cada iteración, el valor medio como la desviación estándar de la compliance se calcula por medio del método UDR. Este método transforma el problema robusto en otro sujeto a múltiples estados de cargas.

En los ejemplos analizados se ha podido observar como el valor de la compliance del diseño óptimo determinista es en todos los casos inferior al valor medio de la compliance de los diseños óptimos robustos, sin embargo también se ha demostrado como el diseño óptimo determinista tiene un peor comportamiento en condiciones de incertidumbre que los óptimos robustos, llegando en algunos casos a ser el valor medio de la compliance hasta 3 veces superior. Esto demuestra la importancia de incluir las incertidumbres en el proceso de optimización. Por otro lado, se ha comprobado como el diseño óptimo robusto se adapta al tipo de pdf (tipo y parámetros que la definen) que caracteriza a las variables aleatorias. Finalmente, decir el elevado coste computacional asociado a RTO con respecto a la optimización determinista, se debe a que en cada iteración es necesario analizar una serie de estados de carga, que en el mejor de los casos se corresponde con 3 estados de carga.



**Figura 7.16:** T-invertida. (a) Evolución de la compliance. (c) Evolución de la fracción de volumen. (b) Evolución de la aptitud. (d) Evolución del coste computacional.

---

# CAPÍTULO 8:

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

En este capítulo se hace un resumen del trabajo realizado en esta tesis, se exponen las conclusiones del mismo y se proponen trabajos futuros.

### **8.1. Trabajos realizados**

Durante el desarrollo de esta tesis se han realizado los siguientes trabajos y aportaciones:

1. Revisión bibliográfica de artículos de revistas, libros, y congresos relacionados con el diseño óptimo robusto de topología.
2. Revisión de los conceptos mínimos sobre la teoría de la elasticidad para el análisis con una malla fija de elementos finitos, formulación del problema elástico plano con una malla fija de elementos finitos rectangulares, matrices de rigidez utilizadas para cada uno de los casos geométricos en los que se puede encontrar el elemento, así como las aplicaciones, ventajas e inconvenientes del uso de la malla fija en el diseño óptimo de estructuras continuas.
3. Descripción de los fundamentos biológicos, matemáticos, y operadores de un algoritmo genético, así como las aplicaciones, ventajas e inconvenientes de su uso en el diseño óptimo robusto en el diseño óptimo robusto de topología.

4. Descripción de los fundamentos mínimos sobre las curvas B-spline, así como las aplicaciones, ventajas e inconvenientes de su uso en el diseño óptimo de estructuras (forma y topología).
5. Implementación de un algoritmo para el diseño óptimo determinista de topología empleando los algoritmos genéticos, las isolíneas del problema y una malla fija de elementos finitos para el análisis de la estructura
  - 5.1. Resolución de varios ejemplos para la validación del método, y comparación con los resultados recogidos en la bibliografía.
  - 5.2. Estudio paramétrico para ajustar la mejor configuración de los parámetros del algoritmo genético.
6. Implementación de un algoritmo para el diseño óptimo de forma empleando programación matemática, las isolíneas del problema y una malla fija de elementos finitos para el análisis de la estructura
  - 6.1. Resolución de varios ejemplos para la validación del método para el diseño óptimo de forma mediante programación cuadrática secuencial.
7. Implementación de un algoritmo para la optimización de topología empleando programación matemática, las isolíneas del problema y una malla fija de elementos finitos para el análisis de la estructura
  - 7.1. Resolución de varios ejemplos para la validación del método, así como su comparación con los resultados obtenidos usando el método de diseño óptimo de topología con isolíneas y algoritmos genéticos desarrollado.
8. Revisión bibliográfica en artículos de revistas, libros y congresos de los diferentes métodos para la formulación del problema de forma probabilístico como la caracterización y propagación de las incertidumbres en la respuesta, así como su uso en el diseño óptimo robusto de topología.
9. Implementación de un algoritmo genético para el diseño óptimo robusto de topología empleando algoritmos genéticos, las isolíneas del problema y una malla fija de elementos finitos para el análisis de la estructura.
  - 9.1. Resolución de varios ejemplos para validar el método, así como la comparación de los resultados obtenidos con los resultados determinísticos.

## 8.2. Conclusiones

Del trabajo realizado en esta tesis se extraen las siguientes conclusiones:

1. El método de análisis en malla fija se confirma como una herramienta eficiente y fiable para la estimación de las deformaciones y las tensiones en la resolución de problemas elásticos. Los errores derivados de la aproximación son mínimos y la regeneración de malla es evitada, suponiendo una reducción del coste computacional considerable.
2. Los algoritmos genéticos se han confirmado como un método robusto y potente para el diseño óptimo de estructuras, permitiendo obtener óptimos globales sin la ayuda de los gradientes.

3. Las curvas B-spline y NURBS se han confirmado como una potente herramienta para la representación de contornos en algoritmos de optimización de forma y topología, permitiendo describir de forma precisa y suave curvas mediante el uso de un reducido número de puntos de control.
4. Para el método propuesto de diseño óptimo determinista de topología empleando algoritmos genéticos, las isolíneas del problema, y una malla fija para el análisis de la estructura se concluye que:
  - 4.1. Los resultados obtenidos con el método permiten la obtención de soluciones iguales o muy parecidas a las encontradas en la bibliografía para los problemas tratados, proporcionando diseños con contornos bien definidos, evitando soluciones de borde aserrado y soluciones en forma de tablero de ajedrez (método SIMP)
  - 4.2. El empleo de una codificación real proporciona un desempeño superior del algoritmo, permitiendo una mejor adaptación al problema de optimización.
  - 4.3. El coste computacional puede ser elevado debido a la necesidad de realizar un análisis para cada uno de los individuos que conforman la población del algoritmo genético.
  - 4.4. No se aprecian diferencias significativas entre las topologías óptimas obtenidas usando una curva poligonal o B-spline para definir el contorno estructural. Ello se debe a que tanto el contorno exterior como la forma y posición de las cavidades se deben a las isolíneas del problema y no al contorno virtual.
  - 4.5. No se aprecian diferencias significativas entre los diseños óptimos obtenidos utilizando como criterio la energía de deformación o las tensiones de von Mises, aunque la evolución de la optimización se desarrolla de modo diferente, obteniendo topologías intermedias diferentes.
  - 4.6. La determinación de los parámetros que controlan el algoritmo genético es primordial para la realización de una correcta exploración y explotación. En base a los resultados obtenidos se ha determinado que el torneo estocástico es el mejor operador de selección y el cruce binario simulado el mejor operador de cruce, aunque en cualquier caso se alcanza el diseño final esperado y recogido en la bibliografía.
5. Para el método propuesto de diseño óptimo de topología empleando programación matemática, las isolíneas del problema, y una malla fija para el análisis de la estructura se concluye que:
  - 5.1. El proceso de optimización de forma el cual determina el contorno exterior de la estructura y de la posición y forma de las cavidades son llevados a cabo de modo independiente, por lo que puede originarse cruces entre ambos, dando lugar a diseños no realizables.
  - 5.2. Es necesario realizar la reducción de volumen de un modo iterativo, estableciéndose fracciones de volúmenes intermedias, ya que el método de programación cuadrática secuencial primero se centra en satisfacer las restricciones y una vez satisfechas, reducir el valor de la función objetivo.
  - 5.3. El número de parámetros que controlan el método de programación cuadrática secuencial es elevado y su influencia sobre el problema es considerable.

- 5.4. En el caso de utilizar una curva poligonal, la optimización debe de llevarse a cabo con un número elevado de puntos de control y además permitiendo que estos se muevan en ambas direcciones ( $x$  e  $y$ ) para obtener contornos suaves y precisos. Sin embargo, este hecho supone un aumento del coste computacional.
6. El método UDR permite determinar de forma precisa y eficiente los dos primeros momentos estadísticos de la respuesta de sistemas multidimensionales o multivariable.
7. Para el método propuesto de diseño óptimo determinista de topología empleando los algoritmos genéticos, las isolíneas del problema, y una malla fija para el análisis de la estructura se concluye que:
  - 7.1. Los resultados obtenidos con el método permiten obtener diseños robustos que reproducen los recogidos en la bibliografía, además remarcar la importancia de considerar el efecto de la incertidumbre en el proceso de optimización.
  - 7.2. El coste computacional depende directamente del número de casos de carga necesarios para evaluar el efecto de la incertidumbre en la respuesta, aumentando considerablemente con respecto al caso determinista.
  - 7.3. El diseño óptimo se modifica y adapta al nivel de incertidumbre (tipo de pdf, valores característicos, etc.)

### 8.3. Trabajos futuros

Como continuación del trabajo realizado en esta tesis, se proponen las siguientes líneas de trabajo futuro:

1. Ampliar las metodologías desarrolladas al diseño óptimo de estructuras tridimensionales.
2. Considerar otras fuentes de incertidumbre como la variabilidad de las propiedades de material, de la geometría, posición de las cargas, etc.
3. Considerar una función multiobjetivo para el problema de diseño óptimo robusto.
4. Obtener una expresión analítica o semianalítico para evaluar los gradientes para el método de diseño óptimo de topología con programación matemática desarrollado.
5. Estudiar la posibilidad de adaptar los algoritmos para su ejecución en máquinas paralelas, clúster de ordenador o tarjetas gráficas.

# Bibliografía:

- Abdi, M.; Wildman, R. y Ashcroft, I. (2014). Evolutionary topology optimization using the extended finite element method and isolines. *Engineering Optimization*, 46(5), 628-647.
- Allaire, G. y Jouve, F. (2006). Coupling the level set method and the topological gradient in structural optimization. *Springer*, 137, 3-17.
- Amir, O.; Sigmund, O.; Lazarov, B. y Schevenels, M. (2012). Efficient reanalysis techniques for robust topology optimization. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 245-246, 217-231.
- Arnout, S.; Firl, M. y Bletzinger, K. (2012). Parameter free shape and thickness optimisation considering stress response. *Struct Multidiscip. Optim.*, 45, 801-814.
- Arora, J. (1989). *Introduction to optimum design*. MCGraw-Hill.
- Arora, J. (2012). *Introduction to Optimum Design*. Elsevier, Academic Press, third edition, Iowa.
- Avellaneda, M. (1987). Optimal Bounds and microgeometries for elastic two-phases composites. *SIAM J. Appl. Math.*, 47(6), 1216-1240.
- Bäck, T. (1995). Generalized convergence models for tournament- and ( $\mu$ ,  $\lambda$ )-selection. *In Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms*, 2-8.
- Bäck, T. (1996). *Evolutionary algorithms in theory and practice: evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms*. Oxford University Press ,Oxford, UK.
- Baker, J. (1985). Adaptive selection methods for genetic algorithm. *In Proceeding of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*, 101-111.
- Baumgartner, A.; Harzheim, L. y Mattheck, C. (1992). SKO (soft kill option): the biological way to find an optimum structure topology. *Int. Journal of Fatigue*, 14(6), 387-393.
- Belytscho, T. y Black, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), 131-150.
- Bendsøe, M. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct Optim*, 1(4), 193-202.
- Bendsøe, M. y Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenisation method. *Comp. Meth. in Appl. Mech.*, 71, 197-224.
- Bendsøe, S. y Sigmund, O. (2003). *Topology optimization: theory, methods and applications*. Berlin: Springer.

- Bourdin, B. y Chambolle, A. (2003). Design-dependent loads in topology optimization . *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 9, 19-48.
- Brindle, A. (1981). *Genetic algorithms for function optimization*. PhD thesis, Dept. of Computing Science, University of Alberta, Edmonton.
- Bruns, T. (2005). A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid–void topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 30: 428–436.
- Bucher, C. (1988). Adaptive sampling—an iterative fast Monte Carlo procedure. *Struct. Saf.* 5:119–126.
- Bucher, C. y Macke, M. (2004). Stochastic computational mechanics. In S. Jendo and K. Dolinski, editors, *Reliability-Based Design and Optimisation*, number 16 in AMAS Lecture Notes, pages 99–156. Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw, PL.
- Burger, M. y Osher, S. (2005). A survey on level set methods for inverse problems and optimal design. *Eur. J. Appl. Math.*, 16(2), 263-301.
- Burczynski, T. y Kokot, G. (2003). Evolutionary Algorithms and boundary element method in generalized shape optimization. *Journal of Theoretical and applied Mechanics*, 41(2), 341-364.
- Burger, M. y Stainko, R. (2004). Incorporating topological derivatives into level set methods. *J. Comput. Phys.*, 45(4), 1447-1466.
- Cai, S.; Zhang, W.; Zhu, J. y Gao, T. (2014). Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: A B-spline finite cell method combined with level set function. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 278, 361-387.
- Camp, C. y Bichon, B. (2004). Design of space trusses using ant colony optimization . *Journal of Structural Engineering*, 130(5), 741-751.
- Calvo, B. (2011). *Métodos numéricos en Mecánica Aplicada, Módulo: Elementos Finitos*. Universidad de Zaragoza.
- Carrano, E. G.; Fonseca, C. M.; Takahashi, R.; Pimenta, L. y Neto, O. (2007). A preliminary Comparison of tree Encoding Schemes for Evolutionary Algorithms. *IEEE International Conference on, Montreal, Que*, 1969-1974.
- Cerny, V. (1985). Thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. *J. Optim. Theory Appl.*, 45, 41-51.
- Celorrio, L. (2013). *Metodología eficiente de optimización de diseño basada en fiabilidad aplicada a estructuras*. Universidad de la Rioja.
- Cerreloza, M.; Annicchiarico, W. y Martínez, M. (2000). Optimization of 2D boundary element models using B-Spline and genetic algorithm. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, 427-440.
- Cervera, E. (2003). *Evolutionary structural pptomisation based on boundary element representation of b-spline geometry*. Durham theses, Durham University.

- 
- Cervera, E. y Trevelyan, J. (2005). Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of Nurbs. Part I: 2D algorithms. *Computers and Structures* , 83, 1902-1916.
- Chen, L. (2002). Phase-fields models for microstructure evolution. *Annu. Rev. Mater. Res.*, 44(1), 113-140.
- Chen, S.; Chen, W. y Lee, S. (2010). Level set based robust shape and topology optimization under random field uncertainties. *Struct. Multidisc. Optim.*, 41:507:524.
- Chen, Z.; Gao, L.; Qiu, H. y Shao, X. (2009). Combining Genetic Algorithms with Optimality Criteria Method for Topology Optimization. *Bio-Inspired Computing. BIC-TA '09*.
- Cho, S. y Ha, S. (2009). Isogeometric shape design optimization: exact geometry and enhanced sensitivity. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 38, 53-70.
- Chu, D.; Xie, Y.; Hira, A. y Steven, G. (1997). On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. *Finite Elements in Analysis and Design*, 24(4), 197-212.
- Clune, R.; Kelliher, D.; Robinson J.C. y Campbell J.S. (2014). NURBS modeling and structural shape optimization of cardiovascular stents. *Struct. Multidisc. Optim.* 50:159–168.
- Conti, S.; Held, H.; Pach, M.; Rump, M. y Schultz, R. (2009). Shape Optimization Under Uncertainty: A Stochastic Programming Perspective. *SIAM Journal on Optimization*, 19(4), 1610-1632.
- Cottrell, J.; Hughes, J. y Bazilevs, Y. (2009). *Isogeometric analysis: Towards Integration of CAD and FEA* (1st edition ed.). Wiley .
- Daneshmand, F. y Kazemzadeh-Parsi, M. (2009). Static and dynamic analysis of 2D and 3D elastic solids using the modified FGFEM . *Finite Elements in Analysis and Design*, 45, 755-765.
- Darwin, C. (1859). *On the Origin of Species*. Jhon Murray, Albemarle Street: London.
- Davis, L. (1989). Adapting Operator Probabilities in Genetic Algorithms. *Proc. of the Third Int. Conf. on Genetic Algorithms, J. Davis Schaffer (Ed.) (Morgan Kaufmann Publishers)*.
- Davis, Y. (1991). *Hanbook of Genetic Algorithms*. New york: Van Nostrand Reinold .
- De Jong, K. (1975). *An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*. PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA.
- Deaton, J. y Grandhi, R. (2014). A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Struct Multidisc Optim*, 49, 1-38.
- Deb, K. y Agrawal, R. (1994). *Simulated binary crossover for continuous search*. Technical report.
- Deb, K.; Joshi, D. y Anand, A. (2002). Real-coded evolutionary algorithms with parent-centric recombination. *In Evolutionary Computation, 2002. CEC '02. Proceedings of the 2002 Congress on, volume 1, pages 61-66*.

- Dejonghe, J. (1993). Allégement de platines métalliques par algorithmes génétiques. *Rapport de stage d'option B2 de l'Ecole Polytechnique*.
- Ding, Y. (1986). Shape optimisation of structures: a literature survey. *Computer y Structures*, 24(6), 985-1004.
- Dunning, P. y Kim, A. (2013). Robust Topology Optimization: Minimization of Expected and Variance of Compliance. *AIAA Journal*, 51(11), 2656-2664.
- Dunning, P. y Kim, H. (2013). A new hole insertion method for level set based structural topology optimization. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 93, 118-134.
- Dunning, P.; Kim, H. y Mullineux, G. (2008). Two-Dimensional Fixed Grid Based Element Structural Analysis. In: *12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Victoria, British Columbia*.
- Dunning, P.; Kim, A. y Mullineux, G. (2011). Introducing Loading Uncertainty in Topology Optimization. *AIAA Journal*, 49(4), 760-768.
- Duysinx, P.; Miegroet, L.; Jacobs, T. y Fleury, C. (2006). GENERALIZED SHAPE OPTIMIZATION USING X-FEM AND LEVEL SET METHODS. *Structures, Machines and Materials: Status and Perspectives*, 23-32.
- Edwards, C.; Kim, H. y Budd, C. (2007). An evaluative study on ESO and SIMP for optimising a cantilever tie-beam. *Struct Multidisc Optim*, 34, 403-414.
- Eiben, A. y Smith, J. (2003). *Introduction to Evolutionary Computing*. Amsterdam, Amsterdam, Budapest: Springer.
- Engelund, S. y Rackwitz R. (1993). A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. *Struct. Saf.* 12:255-276.
- Eschenauer, H. y Olhoff, N. (2001). Topology optimization of continuum structures: A review. *AIAA Journal*, 54(4), 331-390.
- Eschenauer, H. y Schumacher, A. (1994). Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 8, 42-51.
- Eshelman, L. y Schaffer, J. (1993). Real-Coded Genetic Algorithms and Interval-Schemata. *Foundation of Genetic Algorithms 2*, L. Darrell Whitley (ed.) (Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo), 187-202.
- Flemming, W. (1882). *Zellsubstanz, kern and Zelltheilung*. FCW Vogel: Leipzig.
- Fogel, D. (1992). *Evolving artificial intelligence*. San Diego: Ph.D. Thesis. University of California.
- Fogel, L. (1962). En *Autonomous automata Industrial Research* (págs. 4:14-9).
- Fourie, P. y Groenwold, A. (2001). The particle swarm algorithm in topology optimization. *Proc. Fourth World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, 154.
- Fowlkes, W.V. y Creveling, C.M. (1995). *Engineering Methods for Robust Product Design: Using Taguchi Methods in Technology and Product Development*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA.

- Francavilla, A.; Ramakrishnan, C. y Zienkiewicz, O. (1975). Optimization of shape to minimize stress concentration. *Journal of Strain Analysis*, 10(2), 63-70.
- Frangopol, D. y Maute, K. (2004). Reliability-based optimization of civil and aerospace structural system. En *Eng. Des. Handbook*, CRC, Boca Raton, FL, Chap. 24.
- Frangopol, D. y Maute, K. (2004). Reliability-based optimization of civil and aerospace structural system. En *Eng. Des. Handbook*, CRC, Boca Raton, FL, Chap. 24.
- Fysher, R. (1930). *The Genetical Theory of Natural Selection*. Oxford University Press.
- Gallagher, R. (1977). *Optimum Structural Design*. Wiley.
- García, M. (1999). *Fixed Grid Finite Element Analysis in Structural Design and Optimisation*. Ph. D. Thesis. Departament of Aeronautical Engineering: University of Sidney.
- García, C. H.; Cuevas, F.; Trejo, G. y Rostro, H. (2015). A hierarchical genetic algorithm approach for curve fitting with B-Spline. *Genet Program Evolvable Mach*, 16, 151-166.
- García, N.P.; Sanchez, M.; Medaglia, A.L. y Chateauneuf, A. (2013). An improved robust topology optimization approach using multiobjective evolutionary algorithms, *Computers and Structures* 125: 1-10.
- García, M. y Steven, G. (1998). Optimisation of structures by using fixed grid representation of the finite element domain. *Australasian Conference on Structural Optimisation*.
- García, M. y Steven, G. (1999). Fixed Grid finite elements in elasticity problems. *Engineering Computations*, 16(2), 145-164.
- García, M. y Steven G. (2000). Fixed grid finite element analysis in structural design and optimization, *In proceedings of the Second ISSMO/AIAA Internet Conference on Approximations and Fast Reanalysis in Engineering Optimization*.
- Ghanen, R.G. y Spanos, P.D. (1991). *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer, New York.
- Golberg, D. (1989). *Genetic Algorithm in Search, Optimization & Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc.
- Goldberg, D.; Deb, K. y Clark, J. (1992). Genetic algorithms, noise, and the sizing of populations. *Complex systems*, 6, 333-362.
- Gordon, W.J. y Riesenfeld, R. F. (1974). *B-Spline Curves and Surfaces. Computer Aided Geometric Design*. R.E. Barnhill and R.F. Riesenfeld, eds., Academic Press, New York.
- Grefenstette, J. (1986). Optimization of control parameters for genetic algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 16(1), 122-128.
- Guest, J.; Asadopoure, A. y Ha, S. (2011). Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms. *Struct Multidiscip Optim*, 44(4), 2011.
- Guest, J.; Prévost, J. y Belytschko, T. (2004). Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *Int J Numer Method Eng*, 61(2), 238-254.

- Haber, R.; Jog, C. y Bendsoe, M. (1996). New Approach to VARIable-Topology Shape Design Using a Constraint on Perimeter . *Structural Optimisation*, 11, 1-12.
- Hadj-Alouane, A. y Bean, J. (1997). A genetic algorithm for the multiple-choice integer program. *Operations Research*, 45(1), 92-101.
- Haftka, R. y Gürdal, Z. (1992). *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers.
- Haftka, R. T. y Grandhi, R. (1986). Structural shape optimisation—a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57(1), 91-106.
- Hamda, H. y Schoenauer, M. (2000). Adaptative techniques for Evolutionary Topological Optimum Design. *ACDM 2000*.
- He, L., Kao, C. y Osher, S. (2007). Incorporating topological derivatives into shape derivatives based level set methods. *J. Comput. Phys.*, 225(1), 891-909.
- Heshmati, M., Daneshmand, F. y Amini, Y. (2014). Modified fixed-grid finite element method in shape optimization problems based on the gradientless method. *Scientia Iranica*, 21(1), 147-161.
- Hinton, A y Illingworth, J. (1997). *Marching Triangles: Delaunay implicit surface triangulation*. Technical Report CVSSP 01, University of Surrey, Guildford, UK.
- Hinton, E. y Sienz, J. (1995). Fully stressed topology design of structures using an evolutionary procedure. *Engrg. Comput.*, 12, 229-244.
- Hoffmeister, F. y Sprave, J. (1996). Problem-independent handling of constraints by use of metric penalty functions. *Optimization*.
- Holland, J. (1975). *Adaptation in a natural and artificial system*. Ann Arbor: The University of Michigan Press.
- Homaifar, A.; Qi, C. y Lai, S. (1994). Constrained optimization via genetic algorithms. *Simulation*, 62(4), 242.
- Horby, G. (2003). *Generative representations for evolutionary design automation*. Ph. D. Dissertation. Department of Computer Science. Brandeis University: Walthman.
- Horn, J.; Goldberg, D. y Kalyanmoy, D. (1994). Implicit Niching in a Learning Classifier System:Nature's Way. *Evolutionary Computation*, 2(1), 37-66.
- Hu, C. y Youn, B. (2011). An asymmetric dimension-adaptative tensor-product method for reliability analysis. *Structural Safety*, 33:218-231.
- Huang, X. y Xie, Y. (2010). *Evolutionary topological optimization of continuum structures: methods y applications*. New York: Wiley.
- Iman, R.L. y Conover, J.L. (1982). A distribution-free approach to inducing rankcorrelation among input variables. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, B11(3):311–334.

- 
- Jakiela, M.; Chapman, C.; Duda, J.; Adewuya, A. y Saitou, K. (2000). Continuum structural topology design with genetic algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 186, 339-356.
- Jansen, M.; Lombaert, G.; Diehl, M.; Lazarov, B.; Sigmund, O. y Schevenels, M. (2013). Robust topology optimization accounting for misplacement of material. *Struct Multidisc Optim*, 47, 317-333.
- Jong, D. (1975). *Analysis of behaviour of a class of genetic adaptative systems*. Ph. D. Thesis. Univerity of Michigan: Ann Arbor.
- Joines, J. y Houck, C. (1994). On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with ga's. In *Evolutionary Computation. IEEE World Congress on Computational Intelligence. Proceedings of the First IEEE Conference*, 2, 579-584.
- Jurecka, F. (2007). *Robust Design Optimization Based on Metamodeling Techniques*. Technique Universität München, München.
- Kafka, R. T. y Gürdal, Z. (1992). *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers.
- Kazarlis, S. y Petridis, V. (1998). Varying fitness functions in genetic algorithms: Studying the rate of increase of the dynamic penalty terms. In *Parallel Problem Solving from Nature V—PPSN V*, pages 211–220. Springer-Verlag,.
- Kazemzadeh-Parsi, M. y Daneshmand, M. (2009-b). Solution of geometric inverse heat problems by smoothed fixed grid finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45, 599-611.
- Kelly, J. y Davis, L. (1991). Hybridizing the GA and the K Nearest Neighbors Classification Algorithm. *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Genetic Algorithms*, R. Belew and L.B. Booker (Ed.) (Morgan Kaufmann, San Mateo) , 377-383.
- Kennedy, J. y Eberhart, R. (1995). Particle swarms optimization. *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, 1942-1948.
- Kharmanda, G.; Olhoff, N.; Mohamed, A. y Lemaire, M. (2004). Reliability-based topology optimization. *Struct. Multidis. Optim.* 26(5):295–307.
- Kim, L. y Weck, O. (2005). Variable chromosome length genetic algorithm for progressive refinement in topology optimization. *Structural. Multidisciplinary Optimization*, 29, 445-456.
- Kim, H.; Querin, O.; Steven, G. y Xie, Y. (2000). A method for varying the number of cavities in an optimised topology using evolutionary structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 19, 140-147.
- Kim, H.; Querin, O.; Steven, G. y Xie, Y. (2003). Improving efficiency of evolutionary structural optimization by implementing fixed grid mesh. *Struct. Multidisc*, 24, 441-448.

- Kirkpatrick, S.; Gellat, C. y Vecchi, M. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science* , 220(4598), 671-680.
- Kita, H.; Ono, I. y Kobayashi, S. (1998). Theoretical analysis of the unimodal normal distribution crossover for real-coded genetic algorithms. *In Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference* , 529-534.
- Kobayashi, M. (2010). On a biologically inspired topology optimization method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 15(3), 787-802.
- Koza, J. (1992). *Genetic Programming*. Mit Press: Cambridge, MA.
- Lazarov, B.; Schevenels, M. y Sigmund, O. (2011). Robust design of large displacement compliant mechanisms. *Mech. Sci.*, 2(2), 175-182.
- Lazarov, B.; Schevenels, M. y Sigmund, O. (2012a). Topology optimization with geometric uncertainties by perturbation techniques. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.*, 90, 1321-1336.
- Lazarov, B.; Schevenels M., y Sigmund, O. (2012b). Topology optimization considering material and geometric uncertainties iusing stochastic collocations methods. *Struct Multidisc Optim*, 46, 597-612.
- Le, C.; Beuns, T. y Tortorelli, D. (2010). A gradient-based, parameter free approach to shape optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 200, 9-12.
- Lee, S. y Chen, W., 2008. A comparative study of uncertainty propagations methods for black-box type functions. *Struct. Multidisc. Optim.*, 37(3):227-243.
- Lee, M.; Mikukik, Z.; Kelly, D. T. y Degenhardt, R. (2010). Robust Design-A concept for imperfection insensitive composite structures. *Composite Structures*, 9(6), 1469-1477.
- Lee, S. y Kwak, B. M. (2007). Smooth Boundary Topology Optimization Using B-Spline and Hole Generation. *International Journal of CAD/CAM*, 7(1), 16-31.
- Lee, M. y Takagi, H. (1995). *A Framework for Studying the Effects of Dynamic Crossover, Mutation, and Population Sizing in Genetic Algorithms*. Springer Verlag, 1011:111-126.
- Lemonge, A. y Barbosa, H. (2004). An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(5), 703-736.
- Lencus, A.; Querin, O. y Steven, G. X. (2002). Aircraft wing design automation with ESO and GESO. *Int. J. Vehicle Design* , 28(4), 356-369.
- Li, C.; Hiroyasu, T. y Miki, M. (2008). Stress-based Crossover Operator for Structures Topology Optimization using Small Population Size and Variable Length Chromosome. *GRECO'08*. Atlanta, Georgia, USA.
- Li, C.; Hiroyasu, T. y Miki, M. (2009). Shape Optimization using GA with Stress-based Crossover. *Japan Society for Computational Engineering and Science*.
- Li, H. S. y Ma, C. (2013). Hybrid Dimension-Reduction Method for Robust Design Optimization. *AIAA Journal* 56(1):138-144.

- Liang, Q. y Steven, G. (2002). A performance-based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints. *Computer methods in applied mechanics and Engineering*, 191, 1471-1489.
- Liang, Q.; Xie, Y. y Steven, G. (2000). Optimal topology selection of continuum structures with displacement constraints. *Comput Struct*, 77(6), 635-644.
- Lin, C. y Chao, L. (2001). Constant-weight fully stressed methods for topological design of continuum structures. *Computer methods in applied mechanics and Engineering*, 190, 6867-6879.
- Liu, X.; Yi, W.; Li, Q. y Shen, P. (2008). Genetic evolutionart Structural optimization. *J Constr Steel Res*, 64, 305-311.
- LuenBerger, D. (1989). *Programación lineal y no lineal*. 2ª Ed, Addison Wesley Longman.
- Luo, Z.; Zhang, N.; Gao, W. y Ma, H. (2012). Structural shape and topology optimization using a meshless Galerkin level set method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 90(3), 369-389.
- Maan, F.S.; Querin, O. M. y Barton, D. C. (2007), Extension of the fixed grid finite element method to eigenvalue problems, *Advances in Engineering Software*, 38: 607-617.
- Madsen, H.O.; Krenk, S. y Lind, N, C. (2006). *Methods of structural safety*. Dover, Mineola, NY.
- Maitre, O.P. y Knio, O.M. (2010). *Spectral methods for uncertainty quantification: with applications to computational fluids dynamics*. Springer, Berlin.
- Malthus, T. (1798). *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson.
- Martin, J.D. y Simpson, T.W., 2005. Use of Kriging models to approximate deterministic computer models. *AIAAJ*, 43(4), 853-863.
- Martínez, J. (2013). *Diseño óptimo robusto de estructuras utilizando meta-modelos estocásticos*. Ph.D. Universidad Politécnica de Cartagena.
- Mattheck, C. y Burkhardt, S. (1990). A new method of structural shape optimization based on biological growth. *Int. Journal of Fatigue*, 12(3), 185-190.
- McKAY, M.D.; Beckman, R.J. y Conover, W.J. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from computer code. *Technometrics*, 21(2):239-245.
- McWilliams, S. (2000). Anti-optimization of uncertainty structures using interval analysis. *Computers and structures*, 79, 421-430.
- Mendel, G. (1865). Versuche uber Pflanzen-Hybriden. *Verh. Naturforsch. Ver. Brunn*, 4, 3-47.
- Metropolis, N. y Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method, *Journal of the American Statistical Association* 44(247):335-341.
- Michalewicz, Z. (1992). *GeneticAlgorithm + data structures = evolutions programs*. Berlin: Springer.

- Michalewicz, Z. (1995). A survey of constraint handling techniques in evolutionary computation methods. *In Proceedings of the 4th Annual Conference on Evolutionary Programming*. MIT Press, 135-155.
- Michalewicz, Z.; Logan, T. y Swaminathan, S. (1994). Evolutionary operators for continuous convex parameter space. *Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming*. World Scientific Publishing, 84-97.
- Mitchell, M. (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. The MIT Press.
- Moes, D.; Sukumar, N.; Choop, N. y Belytschko, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190, 6183-6200.
- Montgomery, D.C. y Runger, G.C. (2003). *Applied Statistics and Probability for Engineers*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 3rd edition.
- Morales, A. y Quezada, C. (1998). A universal eclectic genetic algorithm for constrained optimization. *In Proceedings of 6th European Congress on Intelligent Techniques & Soft Computing (EUFIT)*, 518-522.
- Mühlenbein, H. y Schlierkamp-Voosen, D. (1993). Predictive Models for Breeder Genetic Algorithm I. Continuous Parameter Optimization. *Evolutionary Computation*, 1, 25-49.
- Nadal, E.; Ródenas, J.; Albelda, J.; Tur, M.; Tatrancón, J. y Fuenmayor, F. (2013). Efficient Finite Element Methodology Based on Cartesian Grids: Application to SStructural Shape Optimization. *Abstract and Applied Analysis*, 1-19.
- Nocedal, J. y Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Second Edition. Springer Series in Operations Research, Springer Verlag.
- Oñate, E. (1995). *Cálculo de estructuras por el Método de los Elementos Finitos, análisis estático lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería: Barcelona.
- Osyczka, A. (2002). *Evolutionary Algorithms for Single and Multicriteria Design Optimization*. Heidelberg New York: Physica-Verlag.
- Pantelides, C. y Ganzerli, S. (1998). Design of trusses under uncertain loads convex models. *journal of Structural Engineering*, 124, 318-329.
- Parkinson, A.; Sorensen, S. y Pourhassan, N. (1993). A general approach for robust optimal design. *ASME J Mech. Des.*, 115, 74-80.
- Piegl, L. y Tiller, W. (1995) *The NURBS Book*. 2<sup>nd</sup> ed. Springer-Verlag.
- Poles, s. y Lovison, A. (2009). *A Polynomial Chaos Approach to Robust Multiobjective Optimization*. Dagstuhl Seminar Proceedings 09041, Hybrid and Robust Approaches to Multiobjective Optimization.
- Qiu, Z.; Huang, R.; Wang, X. y Qi, W. (2013). Structural reliability analysis and reliability-based design optimization: Recent advances. *Physics, Mechanics y Astronomy*, 56(9), 1611-1618.
- Querin, O.; Steven, G. y Xie, Y. (1999). Morphing Evolutionary Structural Optimisation (MESO). En 1. A. Optimization (Ed.).

- Querin, O.; Steven, G. y Xie, Y. (2000). Evolutionary structural optimization using an additive algorithm. *Finite elements in Analysis and Design*, 34, 291-308.
- Radcliffe, N. (1991). Equivalence Class Analysis of Genetic Algorithms. *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Genetic Algorithms*. R. Belew and L.B. Booker (Eds.) (Morgan Kaufmann, San Mateo), 222-229.
- Rahman, S. y Xu, H. (2004). A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics. *Probab. Eng. Mech.* 19:393–408.
- Rakesh, J. (2012). Novel Encoding Scheme in Genetic Algorithms for Better Fitness. *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)*, 1(6), 214-218.
- Rakesh, J. (2012). Novel Encoding Scheme in Genetic Algorithms for Better Fitness. *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)*, 1(6), 214-218.
- Ramírez, W. y Garcia, M. (2014). A fixed Grid method for hyperelastic models in large strain analysis using Level Set Method. *Universidad EAFIT*, 1-12.
- Rao, S. (1987). Optimum design of structures in a fuzzy environment. *AIAA Journal*, 25, 1633-1636.
- Rechenberg, I. (1965). *Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem*. Ministry of Aviation. Royal Aircraft Establishment:UK.
- Rechenberg, I. (1973). *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt.
- Renders, J. y Bersini, H. (1994). Hybridizing genetic algorithms with hill-climbing methods for global optimization: two possible ways. In *Evolutionary Computation 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence., Proceedings of the First IEEE Conference on, pages 312 –317 vol.1, jun 1994*.
- Reynolds, D.; Christie, W.; Bettess, P. y McConnachie, J. B. (2001). Evolutionary material translation: a tool for the automatic design of low weight, low stress structures. *International Journal for numerical methods in engineering*, 50, 147-167.
- Reynolds, D.; McConnachie, J.; Bettess, P.; Christie, W. y Bull, J. (1999). Reverse Adaptativity-A new evolutionary tool for structural optimisation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 529-552.
- Ródenas, E. N.; Albelda, J.; Tur, M.; Tatrancón, J. y Fuenmayor, F. (2013). Efficient Finite Element Methodology Based on Cartesian Grids: Application to Structural Shape Optimization. *Abstract and Applied Analysis*, 1-19.
- Rong, J. y Liang, Q. (2008). A level set method for topology optimization of continuum structures with bounded design domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 1447-1465.
- Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. *Ann. Math. Statist.*, 23:470-472.

- Ross, S.M. (1987). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- Rozvany, G. (1989). *Structural design via optimality criteria*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Rozvany, G. (2009). A critical review of established methods of structural topology optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 37, 217-237.
- Rozvany, G. y Lewinski, T. (2013). *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. International Centre for Mechanical Sciences, Springer.
- Rozvany, G.; Bendsøe, M. y Kirsch, U. (1995). Layout optimization of structures. *Applied Mechanics Reviews*, 48(2), 41-119.
- Rubinstein, R.Y. y Kroese, D.P. (2008). *Simulation and the Monte Carlo Method*. 2nd Edition, John Wiley and Sons, inc.
- Sakawa, M. (1993). *Fuzzy sets and interactive Multi-objective Optimization*. Plenum Press.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non-homogeneous media and vibration theory*. Berlin: Lecture notes in physics, 127.
- Savage, L.J. (1951). The theory of statistical decision. *Journal of the American Statistical Association*, 46:55–67.
- Schmit, L. y Miura, H. (1976). Some approximation concepts for structural synthesis. *AIAA Journal*, 14(5), 661-671.
- Schoenauer, M.; Kallel, L. y Jouve, F. (1996). Mechanical Inclusions Identification by Evolutionary Computation. *Revue européenne des éléments finis*, 5, 619-648.
- Schuëller, G. y Jensen, H. (2008). Computational methods in optimization considering uncertainties-An overview. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198, 2-13.
- Seo, Y.; Kim, H. y Youn, S. (2010). Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces. *Comput. Method Appl. Mech Eng.*, 199(49-52), 3270-3296.
- Seo, Y.; Kim, H. y Youn, S. (2010). Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 47 (11-12): 1618-1640.
- Sethian, J. (1999). *Level set method and fast marching methods* (2nd edition ed.). New york: Cambridge University Press.
- Shikui, C. y Wei, C. (2011). A new level-set based approach to shape and topology optimization under geometric uncertainty. *Struct. Multidisc. Optim.*, 44, 1-18.
- Shikui, C.; Wei, C. y Sanghoon, L. (2010). Level set based robust shape and topology optimization under random field uncertainty. *Struct. Multidisc. Optim.*, 41, 507-524.
- Shinozuka, M. y Deodatis, G. (1991). Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Appl. Mech. Rev. (ASME)* 44:191–203.
- Sivanandam, S. y Deepa, S. (2008). *Introduction to Genetic Algorithms*. Springer.

- Sigmund, O. (2009). Manufacturing tolerant topology optimization. *Acta. Mech. Sin.*, 25, 227-239.
- Sigmund, O. y Peterson, J. (1998). Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16, 68-75.
- Smolyak, S. (1963). Quadrature and interpolation formulas for tensor product of certain classes of functions. *Soviet Mathematics – Doklady*, 4(3-4):209-32.
- Snásel, V.; Platos, J. y Krömer, P. (2008). Developing Genetic Algorithms for Boolean Matrix Factorization. *ISBN 978-80-248-1746-0*, 61-70.
- Standler, W. (1984). Multicriteria optimization in mechanics (a survey). *Appl. Mech. Rev.*, 37, 277-286.
- Stefanou, G. (2009). The stochastic finite element method: past, present and future. *Comput. Methods and Appl. Mech. Engrg.*, 198:1031:1051.
- Stolpe, M. y Svanberg, K. (2001). An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Struct Multidiscip*, 22(2), 16-124.
- Sudret, B. (2012). Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification. *arXiv preprint ar Xiv: 1203.2062*.
- Syswerda, G. (1989). Uniform crossover in genetic algorithms. *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithm*, 2-8.
- Taguchi, G. (1991). *Taguchi Methods: Signal-To-Noise Ratio for Quality Evaluation*. American Supplier Institute
- Takezawa, A.; Nishiwaki, S. y Kitamura, M. (2010). Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis. *J. Comput. Phys.*, 229(7), 2697-2718.
- Tai, K. y Akhtar, S. (2005). Structural topology optimization using a genetic algorithm with a morphological geometric representation scheme. *Struct Multidisc. Optim.*, 30, 113 - 127.
- Tang, P. y Chang, K. (2001). Integration of topology and shape optimization for design of structural components. *Struct Multidisc Optim*, 22, 65-82.
- Tootkaboni, M.; Asadpoure, A. y Guest, J. (2012). Topology optimization of continuum structures under uncertainty- A Polynomial Chaos approach. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 201-204, 263-275.
- Tsutsui, S. y Goldberg, D. (2002). Simplex crossover and linkage identification: Single-stage evolution vs. multi-stage evolution. *In in: Proceedings IEEE International Conference on Evolutionary Computation, 2002, pages 974–979*.
- Tuson, A. y Ross, P. (1996). Co-evolution of operator settings in genetic algorithms. *EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 6, 161-184.
- van Dijk, N.; Maute, K.; Langelaar, M. y van Keulen, F. (2013). Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Struct Multidiscip Optim*, 48, 437-472.

- Victoria, M. (2006). *Optimización de forma y topología con malla fija y algoritmos genéticos*. Ph.D Universidad Politécnica de Cartagena, Departamento de Estructuras y Construcción.
- Victoria, M.; Martí, P. y Querin, O. (2009). Topology design of two-dimensional continuum structures using isolines. *Computers and Structures*, 87, 101-109.
- Voigt, H. y Anheyer, T. (1994). Modal Mutations in Evolutionary Algorithms. *Proc. of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation*, 88-92.
- Wall, A.; Frenzel, A. y Cyron, C. (2008). Isogeometric Structural shape optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197, 2976-2988.
- Wall, M. y Wang, M. (2008). A level set method for structural topology optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 197, 2976-2988.
- Wallace, A. (1855). On the law which has regulated the introduction of new species. *Annals and Magazine of Natural History*, 16, 184-196.
- Walters, G. y Smith, D. (1995). Evolutionary design for optimal layout of tree networks. *Engineering Optimization*, 24(4), 261-281.
- Wang, F.; Lazarov, B. y Sigmund, O. (2011). On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 43(6), 767-784.
- Wang, S.; Lim, K.; Khoo, B. y Wang, M. (2007). An unconditionally time-stable level set method and its application to shape and topology optimization. *Comput. Model. Eng. Sci.*, 27, 1-40.
- Wang, S. y Tai, K. (2004). Graph representation for structural topology optimization using genetic algorithm. *Computers and Structures*, 82, 1609-1622.
- Wang, N. y Yang, Y. (2009). Structural design optimization subjected to uncertainty using fat Bezier curve. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199, 210-219.
- Wei, P.; Wang, M. y Xing, X. (2010). A study on x-fem in continuum structural optimization using a level set model. *Comput. Aided Des.*, 42(8), 708-719.
- Whitley, D. (1989). The genitor algorithm and selection pressure: Why rank-based allocation of reproductive trials is best. *In Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, 116-121.
- Wolfe, P. (1959). The Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica*, 27(3):382-398.
- Woon, S.; Tong, L.; Querin, O. y Steven, G. (2003). Knowledge-based algorithms in fixed-grid GA shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, 643-660.
- Wright, A. (1991). Genetic Algorithms for Real Parameter Optimization. *Foundations of Genetic Algorithms I*, G.J.E Rawlin (Morgan Kaufmann, San Mateo), 205-218.
- Xie, Y. y Steven, G. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Comput. Struct.*, 49(5), 885-896.

- Xie, Y. y Steven, G. (1997). *Evolutionary Structural Optimization (ESO)*. Springer.
- Xiu, D. y Karniadakis, G.E. (2003). Modelling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *J. Comput. Phys.* 187:137–167.
- Yamasaki, S.; Nomura, T. K.; Sato, K. y Nishiwaki, S. (2011). A level set-based topology optimization method targeting metallic waveguide design problem. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 87(9), 844-868.
- Young, V.; Querin, O. y Steven, G. X. (1999). 3D and Multiple Load Case B-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO). *Structural Optimization*, 18, 183-192.
- Zang, T.; Hemsh, M.; Hilburger, S.; Kenny, S.; Luckring, J; Maghami, P. y Stroud, W. (2002). *Needs and opportunities for uncertainty-based multidisciplinary design methods for aerospace vehicles*. NASA/ TM-2002-211462, Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- Zhao, Q.; Chen, X.; Ma, Z.D. y Lin, Y. (2015). Robust Topology Optimization Based on Stochastic Collocation Methods under Loading Uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume (2015), Article ID 580980, 14 pages.
- Zhao, J. y Wang, C. (2014-a). Robust topology optimization under loading uncertainty based on linear elastic theory and orthogonal diagonalization of symmetric matrices. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 273, 204-218.
- Zhao, J. y Wang, C. (2014-b). Robust structural topology optimization under random field loading uncertainty. *Struct Multidisc Optim*, 50, 517-522.
- Zhao, J. y Wang, C. (2014c). Robust Topology Optimization of Structures Under Loading Uncertainty. *AIAA JOURNAL*, 52(2), 398-407.
- Zhou, M. y Rozvany, G. (1996). An improved approximation technique for the DCOC method of sizing optimization. *Computers y Structures*, 60, 763-769.
- Zhou, M. y Rozvany, G. (2001). On the validity of ESO type methods in topology optimization . *Structural optimization*, 21, 80-83.
- Zienkiewicz, O. y Cheung, Y. (1967). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. MacGraw-Hill.
- Zienkiewicz, O. y Campbell, J. (1997). *Optimum Structural Design*. Wilay.
- Zochowski, A. y Mizukami, J. (1983). A comparison of BEM and FEM in minimum weight design. *Proceedings 5th BEM conference*, 901-911