

María Ojados Arroyo,
Sergio Amat Plata (UPCT)

LAS MATEMÁTICAS UTILIZADAS EN LAS PELÍCULAS DE ANIMACIÓN

ÍNDICE

- ⇒ Motivaciones y objetivos
- ⇒ Materiales y métodos
- ⇒ Desarrollo
 - ⇒ Introducción
 - ⇒ NURBS
 - ⇒ Curvas de Bezier
 - ⇒ Problemas con las NURBS
 - ⇒ Esquemas de subdivisión
 - ⇒ Tipos de superficies de subdivisión
 - ⇒ Pixar
 - ⇒ Esquemas lineales y no lineales
 - ⇒ Esquema lineal C2 sin fenómeno de Gibbs
- ⇒ Conclusiones

1. MOTIVACIONES Y OBJETIVOS



MOTIVACIONES

- › Interés películas de Disney
- › Realización
- › Función de las matemáticas en la realización

OBJETIVOS

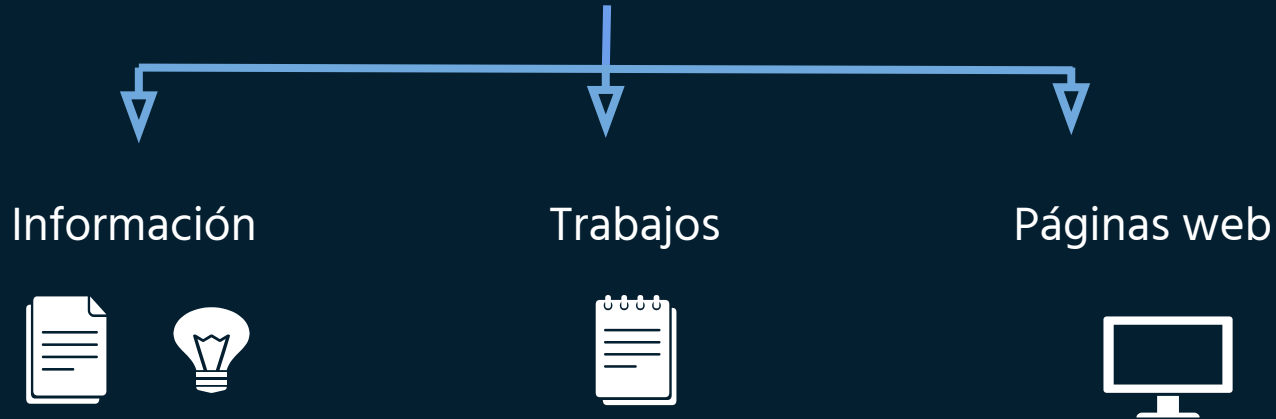
- › Estudiar sobre las aplicaciones de las matemáticas en el cine de animación.
- › Estudiar el funcionamiento de los esquemas de subdivisión y los tipos que hay.
- › Investigar sobre el modelo utilizado por pixar: algoritmo Catmull-Clark.
- › Analizar los fallos de este sistema.
- › Desarrollar un nuevo algoritmo para solucionar estos problemas.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

MATERIALES Y MÉTODOS



Profesor UPCT (Sergio Amat Plata)



3. DESARROLLO

INTRODUCCIÓN

Modelado, animación y renderizado de un objeto



Reconstruir un objeto en el ordenador



Posibilitar transformaciones



Personaje creado a mano

Escanear

Ausencia de continuidad

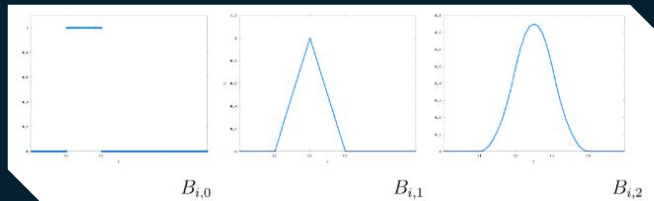


Algoritmos que permiten unir puntos



1. NURBS

- Non Uniform Rational B-Splines
- Curvas
- Bezier y Cateljau



Ecuación:

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) P_i w_i}{\sum_{i=0}^p B_{i,n}(t) w_i}$$

$w_i \rightarrow$ pesos asociados a P_i

$B_{i,n}(t)$ B-Splines.

1.1 CURVAS DE BÉZIER

Ecuación:

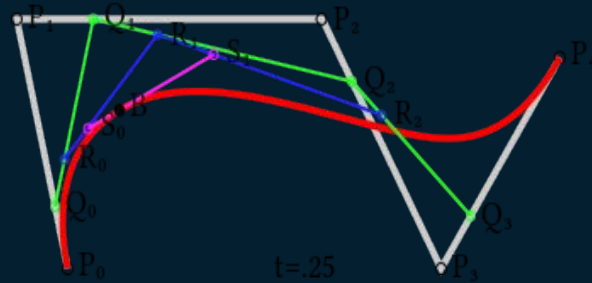
$$\begin{aligned} B(t) &= Q_0 + t(Q_1 - Q_0) = (1-t)Q_0 + tQ_1 \\ &= (1-t)\left((1-t)P_0 + tP_1\right) + t\left((1-t)P_1 + tP_2\right) \\ &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 \end{aligned}$$

$P_0, P_1, P_2 \rightarrow$ puntos de control

$Q_0 \rightarrow$ recorrido del segmento

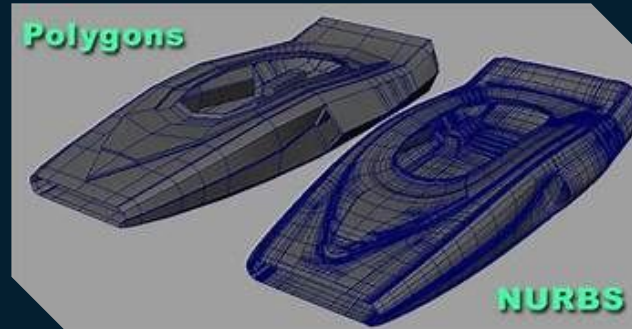
› Tipo de spline

› Suavizar



1.2 PROBLEMAS DE LAS NURBS

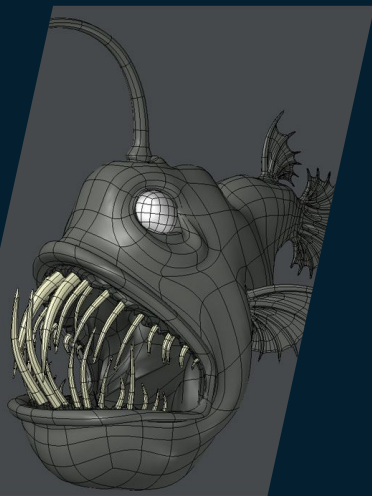
- › Cálculos complejos
- › Objeto animado :
gran dificultad para
mantener el suavizado



2. ESQUEMAS DE SUBDIVISIÓN

¿Cómo funcionan?

Malla poligonal



Ventajas sobre las NURBS:

- › Eficiencia
- › Formas arbitrarias
- › Control de las características de la superficie
- › Geometría compleja

2.1 TIPOS DE SUPERFICIES DE SUBDIVISIÓN

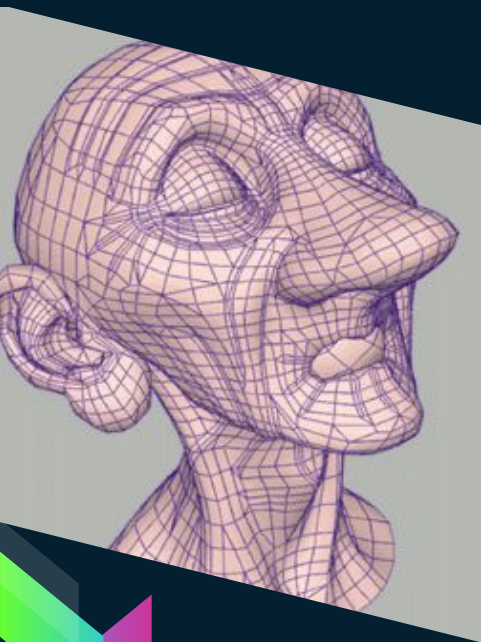
INSERCIÓN DE VÉRTICES

	Redes triangulares	Redes cuadriláteras
Aproximación	Loop	Catmull-Clark
Interpolación	Butterfly modificado	Koobelt

RECORTE DE ESQUINAS

Doo-Sabin

Midedge



2.2 PIXAR

Esquema de Catmull-Clark

Características :

1. Continuidad C^2 y C^1 en los vértices extraordinarios

- 2.

Facilita la creación

Reduce tiempo

Definición local

3. Problemas puntos angulosos

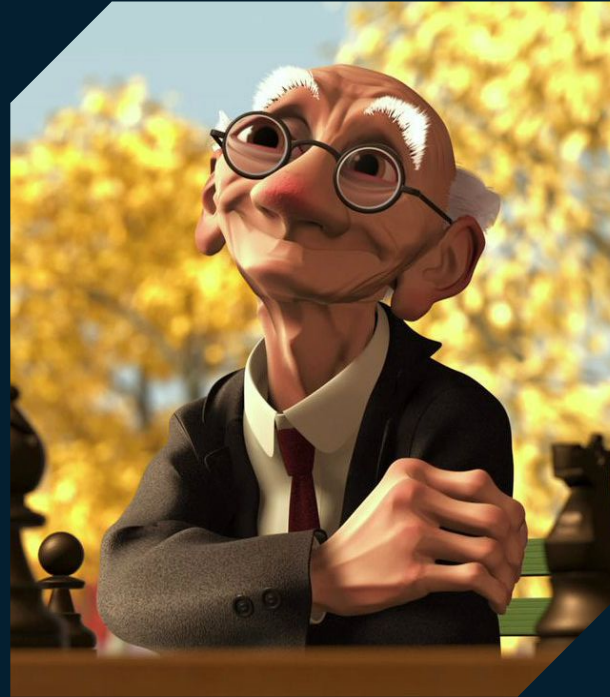
Solución problemas Catmull-Clark

¿Pliegues semipuntiagudos?



Subdivisión híbrida:

1. Esquemas puntos angulosos
2. Finalizar con Catmull-Clark para suavizar



2.3 SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

Sistemas lineales

Dubuc, Dyn, Gregory, Levin :

Interpolación **polinomios**

Lagrange; 4 puntos, grado 3
función límite de clase C^1 .

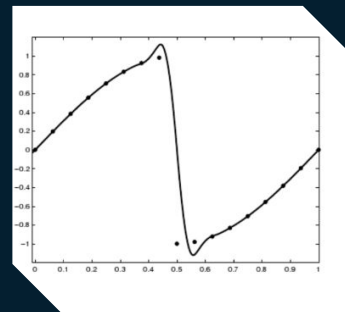
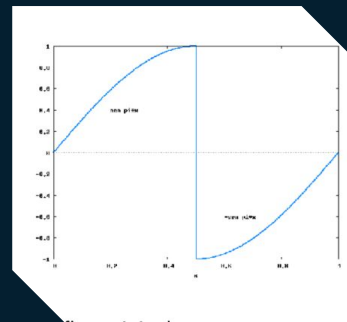
Chaikin :

Usa **splines**, más rápido y
función límite de clase C^2 .

Dyn, Floater y Hormann :

Interpolación **cúbica** local y
evaluación en $1/4$ y $3/4$.

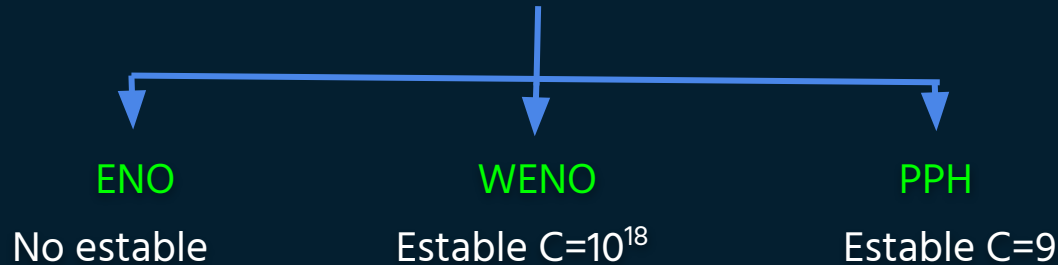
Límite C^2 .



Sistemas no lineales

Evitar fenómeno de Gibbs

ENO, WENO, PPH. Modificación de los polinomios interpolatorios de Lagrange de grado 3. Límite C^1 -



3.

Desarrollado por : Amat, Dadourian, Liandrat

- Si $|d^2 f_n| \geq |d^2 f_{n+1}|$,

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n} = \frac{49}{64} f_n + \frac{14}{64} f_{n+1} + \frac{1}{64} f_{n+2} - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n+1} = \frac{15}{64} f_n + \frac{50}{64} f_{n+1} - \frac{1}{64} f_{n+2} - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}).$$

- Si $|d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|$,

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n} = -\frac{1}{64} f_{n-1} + \frac{15}{64} f_n + \frac{50}{64} f_{n+1} - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

$$(S_{\text{PPHA}} f)_{2n+1} = \frac{1}{64} f_{n-1} + \frac{49}{64} f_n + \frac{14}{64} f_{n+1} - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

<< Inspirado en Dyn, Floater y Hormann que permite obtener C^2 :

4 puntos Lagrange grado 3 y sustituir el punto $1/2$ por $1/4$ y $3/4$. >>

Definición



$$\text{PPH}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x+y} & \text{si } xy > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

media armónica.

Mejor funcionamiento
debido a :

$$\frac{x+y}{2} \leq \max\{|x|, |y|\}$$

mientras que

$$\text{PPH}(x, y) \leq 2 \min\{|x|, |y|\}.$$

3.1 TEOREMAS

Teorema 1.

El esquema de subdivisión no lineal S_{PPHA} es **convergente** con regularidad como mínimo:

$$C^{\beta-} \text{ con } \beta \geq -\log_2\left(\frac{7}{16}\right) > 1.$$

Un esquema es convergente si :

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}), \exists S^\infty f \in C^0(\mathbb{R})$$

tal que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |(S^j f)_n - S^\infty f(n2^{-j})| = 0.$$

Teorema 2.

El esquema S_{PPHA} es **estable**

Un esquema convergente es estable si :

$$\exists C < +\infty$$

tal que

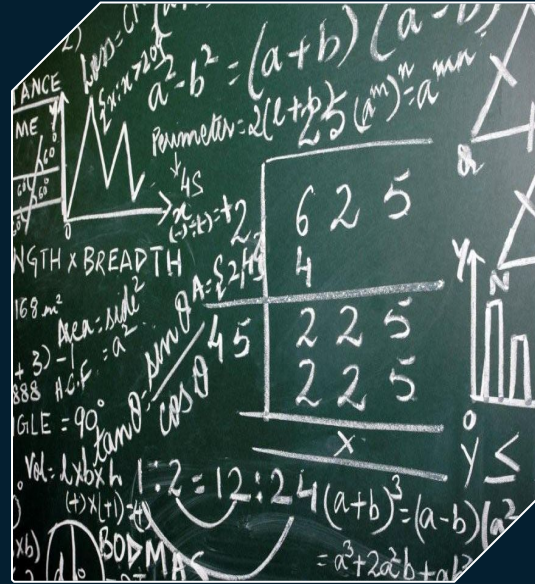
$$\forall f^0, g^0 \in l^\infty(\mathbb{Z})$$

$$\|S^\infty f - S^\infty g\|_{L^\infty} \leq C \|f^0 - g^0\|_{l^\infty}$$

4. CONCLUSIONES

4. CONCLUSIONES

- Uso de las matemáticas en diversos campos.
- Evolución continua de las matemáticas.
- Análisis del esquema no lineal S_{PPHA} .
- Se ha evitado el fenómeno de Gibbs.



5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Viñolo Locubiche, J. S. (2017). El modelo de producción industrial de animación 3D estadounidense.
- [2] Rosales, R., Murillo, D., & Miguelena, R. (2017). Modelado y Animación 3D. El Tecnológico, 27(1), 11-12.
- [3] Ali I., Amat S. y Trillo J.C., (2006). Point values Hermite multiresolution for non-smooth noisy signals. Computing, 77 3, 223–236.
- [4] Amat S., Busquier S., El Kebir D. y Molina J., (2002). Compression of locally oscillatory signals with discontinuities, International Mathematical J., 2(12), 1141-1156.
- [5] Amat S., Busquier S. y Trillo J.C., (2005). Stable Interpolatory Multiresolution in 3D , Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics, 2(2), 177-188.
- [6] Chaikin G., (1974). An algorithm for high speed curve generation. Computer Graphics and Image Processing, 3, 346-349.
- [7] Cohen, A. y Dyn, N., (1996). Nonstationary subdivision schemes and multiresolution analysis. SIAM J. Math. Anal., 27 6, 1745–1769.
- [8] Aràndiga, F. y Belda, Ana M., (2004). Weighted ENO interpolation and applications. Recent advances in computational and mathematical methods for science and engineering. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 9 2, 187–195
- [9] Amat S., Dadourian, K. y Liandrat J., (2006). On the convergence of various subdivision schemes using a perturbation teorema, Curves and Surfaces Fitting: Avignon 2006, 1-10, Nashboro Press, Editors A. Cohen, J.L. Merrien and L. L. Schumaker.

- [10] Catmull E.E y Clark J.H., (1978). Recursively generated B-spline surfaces on topological meshes. *Computer Aided Design*, 19 (453), 350-355.
- [11] Trillo, J.C. Multirresolución no lineal y Aplicaciones, PhD in the University of Valencia, Spain, 2006.vv
- [12] Dyn N., Floater M.S. y Hormann, K., (2005). A C2 four-point subdivision scheme with fourth order accuracy and its extensions. *Methods for Curves and Surfaces: Tromsø 2004*, 145-156, Nashboro Press, Editors M. Dæhlen and K. Mørken and L. L. Schumaker, Series: Modern Methods in Mathematics.
- [13] Dyn N., Gregory J. y Levin D., (1987). A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design, *Comput. Aided Geom. Design*, 4, 257- 268.
- [14] Dyn, N., Kuijt, F., Levin, D. y van Damme, R., (1999). Convexity preservation of the four-point interpolatory subdivision scheme. *Comput. Aided Geom. Design*, 16 8, 789–792.
- [15] Amat S., Busquier S. y Candela V.F., (2003). A polynomial approach to Piecewise Hyperbolic Method, *Int.J. Computational Fluid Dynamics* 17(3), 205-217.
- [16] Amat, S., Dadourian, K. Liandrat, J. (2008) On a C2-nonlinear subdivision schema avoiding Gibbs oscillations
- [17] Amat S., Donat R., Liandrat J. y Trillo J.C., (2006). Analysis of a fully nonlinear multiresolution scheme for image processing, *Foundations of Computational Mathematics*, 6(2), 193–225
- [18] Daubechies I., Runborg O. y Sweldens W., (2004). Normal multiresolution approximation of curves, *Const. Approx.*, 20 (3), 399-363.
- [19] Gottlieb D. y Shu C-W., (1997). On the Gibbs phenomenon and its resolution, *SIAM Rev.*, 39 (4), 644-668.