



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIÓN

**“OPTIMIZACIÓN DE FORMA Y TOPOLOGÍA
CON MALLA FIJA Y ALGORITMOS
GENÉTICOS”**

Mariano Victoria Nicolás

2006



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIÓN

PROGRAMA DE DOCTORADO
ANÁLISIS Y DISEÑO AVANZADO DE ESTRUCTURAS

**“OPTIMIZACIÓN DE FORMA Y TOPOLOGÍA
CON MALLA FIJA Y ALGORITMOS
GENÉTICOS”**

TESIS DOCTORAL

Presentada por: D. Mariano Victoria Nicolás

Dirigida por: Dr. Pascual Martí Montrull

Cartagena, abril de 2006



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
Comisión de Doctorado

D-12

AUTORIZACIÓN DEL DEPARTAMENTO RESPONSABLE

D. Pascual Martí Montrull, Director del Departamento de Estructuras y Construcción

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral titulada “Optimización de forma y topología con malla fija y algoritmos genéticos”, ha sido realizada por D. Mariano Victoria Nicolás, bajo la dirección y supervisión de D. Pascual Martí Montrull y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Cartagena, a 27 de abril de 2006

EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo.: Pascual Martí Montrull

Abstract

The objective of the optimization of structures is to obtain a design, that is to say, a group of values for some design variables that minimizes a function, and satisfy a series of constraints that depend on these variables. The optimization problems of structures can be divided in three categories: size, shape, and topology.

The development of methods to optimize structures has been quite lawless due to division of ideologies: mathematical programming (MP), optimality criteria (OC), evolutionary structural optimization (ESO), solid isotropic microstructure with penalization (SIMP), biological growth structural optimization (BGSO), level set method (LSM), evolutionary computation (EC), etc.

Different evolutionary methods exist: evolution strategies (ESs), evolutionary programming (EP), genetic programming (GP), and genetic algorithms (GAs); the last ones have a strong theoretical basis and are the most biologically adapted method.

Fixed grid method (FG) has been previously used in problems in which the geometry of the object or the physical properties of the body change with time. In this work is shown the feasibility of using FG as an alternative to conventional finite elements method (FEM) to solve elasticity problems.

The main objective of this thesis is to introduce a new procedure, called MFAG, for the shape and topology optimization of bidimensional continuum structures. The topology and shape of the design depend on a genetic algorithm, which, through the problem isolines defines the number, shape and distribution of the contours. The analysis of the structure is carried out by a fixed grid of finite elements. The procedure has been implemented in the programming language FORTRAN 95.

The versatility and flexibility of this procedure has been proven through several examples. The results have been compared with those obtained in the most recent bibliography (multi-GA, MMA, SIMP, PBO, ESO, etc.). The results demonstrate the effectiveness of the procedure, providing quality solutions with perfectly defined contours, without the need to interpretate the topology to obtain a final design.

Resumen

El objetivo de la optimización de estructuras es obtener un diseño, es decir, un conjunto de valores para las variables de diseño que hacen mínima una función objetivo, y satisfacen un conjunto de restricciones que dependen de estas variables. Los problemas de optimización de estructuras se pueden dividir en tres categorías: propiedades, forma, y topología.

El desarrollo de los métodos para la optimización de estructuras ha sido bastante desordenado como resultado de la división de ideas: programación matemática (MP), criterios de optimalidad (OC), optimización estructural evolucionaria (ESO), microestructuras sólidas isótropas con penalización (SIMP), optimización estructural basada en el crecimiento biológico (BGSO), método de la curva de nivel (LSM), computación evolutiva (EC), etc.

Existen diferentes métodos evolucionarios: estrategias evolutivas (ESs), programación evolucionaria (EP), programación genética (GP), y algoritmos genéticos (GAs); éstos últimos disponen de una base teórica más robusta, y están biológicamente mejor adaptados.

El método de la malla fija ha sido utilizado en problemas en donde la geometría del objeto, o las propiedades físicas del cuerpo cambian con el tiempo. En este trabajo se muestra la posibilidad de utilizar el método de la malla fija como alternativa al método de los elementos finitos convencional, para resolver problemas de elasticidad.

El principal objetivo de esta tesis es introducir un nuevo procedimiento, denominado MFAG, para la optimización de forma y topología de estructuras continuas bidimensionales. La forma y la topología de la estructura dependen de un algoritmo genético, el cual, a través de las isolíneas del problema define el número, forma y distribución de las cavidades. El análisis de la estructura se realiza mediante una malla fija de elementos finitos. El procedimiento ha sido implementado en el lenguaje de programación FORTRAN 95.

La versatilidad y la flexibilidad del procedimiento han sido probadas a través de varios ejemplos. Los resultados han sido comparados con los obtenidos en la bibliografía más reciente (multi-GA, MMA, SIMP, PBO, ESO, etc.). Los resultados demuestran la efectividad del procedimiento, proporcionando soluciones de calidad con contornos perfectamente definidos, sin la necesidad de interpretar la topología para obtener un diseño final.

A mis padres

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Pascual Martí Montrull sus inestimables consejos y el continuo estímulo para llevar a buen término esta tesis doctoral.

A Conchi, por su tiempo, paciencia, comprensión, y por enseñarme a enfrentar los obstáculos con alegría.

Y, finalmente, a mi familia, a mis compañeros del área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, especialmente a Pedro y Santiago, y a mis amigos, por su ánimo y apoyo desinteresados.

A todos, GRACIAS.

Índice

| | |
|---|-------------|
| LISTA DE TABLAS | xxi |
| LISTA DE FIGURAS | xxv |
| LISTA DE SÍMBOLOS | xxxv |
| CAPÍTULO 1 | |
| INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS | 1 |
| 1.1 Introducción..... | 1 |
| 1.2 Formulación del diseño óptimo de estructuras..... | 2 |
| 1.2.1 Variables de diseño | 3 |
| 1.2.2 Función objetivo..... | 3 |
| 1.2.3 Restricciones | 4 |
| 1.3 Optimización de propiedades, forma, y topología | 4 |
| 1.4 Métodos de optimización para estructuras continuas..... | 5 |
| 1.4.1 Programación matemática..... | 6 |
| 1.4.2 Criterios de optimalidad..... | 7 |
| 1.4.3 Método de homogenización | 7 |
| 1.4.4 Métodos de distribución de material sin homogenización..... | 8 |
| 1.4.5 Optimización sin un modelo de material | 8 |
| 1.4.5.1 Optimización estructural evolucionaria..... | 9 |
| 1.4.5.2 Optimización estructural evolucionaria aditiva..... | 10 |
| 1.4.5.3 Optimización estructural evolucionaria bidireccional..... | 10 |
| 1.4.5.4 Optimización estructural evolucionaria morfológica..... | 11 |
| 1.4.5.5 Optimización estructural evolucionaria en grupo..... | 12 |
| 1.4.5.6 Creación inteligente de cavidades | 12 |

| | | |
|----------|---|----|
| 1.4.6 | Adaptatividad inversa..... | 13 |
| 1.4.7 | Métodos basados en el crecimiento biológico..... | 13 |
| 1.4.8 | Métodos de optimización por enjambre de partículas..... | 14 |
| 1.4.9 | Solidificación simulada..... | 14 |
| 1.4.10 | Método de burbuja..... | 15 |
| 1.4.11 | Método de la curva de nivel..... | 15 |
| 1.4.12 | Algoritmos evolucionarios..... | 15 |
| 1.4.12.1 | Estrategias evolutivas..... | 16 |
| 1.4.12.2 | Programación evolucionaria..... | 16 |
| 1.4.12.3 | Algoritmos genéticos..... | 17 |
| 1.4.12.4 | Programación genética..... | 17 |
| 1.4.13 | Algoritmos de optimización híbridos..... | 17 |
| 1.5 | Discusión de los métodos de optimización..... | 18 |
| 1.6 | Objetivos de la tesis..... | 19 |
| 1.7 | Organización de la tesis..... | 20 |

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS POR ELEMENTOS FINITOS CON MALLA FIJA 23

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Introducción..... | 23 |
| 2.2 | Teoría de la elasticidad bidimensional..... | 24 |
| 2.2.1 | Desplazamientos..... | 25 |
| 2.2.2 | Deformaciones..... | 25 |
| 2.2.3 | Tensiones..... | 26 |
| 2.2.4 | Relación tensión-deformación..... | 26 |
| 2.3 | Aproximación mediante elementos finitos..... | 27 |
| 2.3.1 | Elemento finito rectangular de cuatro nodos..... | 27 |
| 2.3.2 | Integración numérica en regiones rectangulares..... | 29 |
| 2.4 | Formulación de la malla fija..... | 30 |
| 2.4.1 | Matriz de rigidez para elementos interiores y exteriores..... | 31 |
| 2.4.2 | Matriz de rigidez para elementos de borde..... | 32 |
| 2.5 | Análisis de las tensiones en los nodos de la malla fija..... | 34 |
| 2.6 | Optimización de estructuras con malla fija..... | 37 |

CAPÍTULO 3

DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS CON ALGORITMOS GENÉTICOS 41

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Introducción..... | 41 |
| 3.2 | El origen de los algoritmos genéticos..... | 42 |
| 3.3 | Fundamentos biológicos de los algoritmos genéticos..... | 43 |
| 3.4 | Fundamentos matemáticos de los algoritmos genéticos..... | 45 |

| | | |
|---------|---|----|
| 3.4.1 | El efecto de la selección..... | 46 |
| 3.4.2 | El efecto del cruce..... | 47 |
| 3.4.3 | El efecto de la mutación..... | 48 |
| 3.5 | Elementos de un algoritmo genético..... | 49 |
| 3.6 | Estructura de un algoritmo genético simple..... | 50 |
| 3.7 | Operadores genéticos..... | 51 |
| 3.7.1 | Selección..... | 51 |
| 3.7.1.1 | Selección por ruleta..... | 53 |
| 3.7.1.2 | Selección por torneo..... | 53 |
| 3.7.1.3 | Selección por rango..... | 53 |
| 3.7.2 | Cruce..... | 54 |
| 3.7.2.1 | Cruce por un punto..... | 54 |
| 3.7.2.2 | Cruce por dos puntos..... | 54 |
| 3.7.2.3 | Cruce uniforme..... | 54 |
| 3.7.2.4 | Cruce adaptativo..... | 54 |
| 3.7.3 | Mutación..... | 55 |
| 3.7.4 | Otros operadores..... | 56 |
| 3.7.4.1 | Operadores de nicho..... | 56 |
| 3.7.4.2 | Elitismo..... | 56 |
| 3.7.4.3 | Operador micro-genético..... | 56 |
| 3.8 | Ajuste y control de un algoritmo genético simple..... | 57 |
| 3.8.1 | Ajuste..... | 57 |
| 3.8.2 | Control..... | 58 |
| 3.8.2.1 | Tamaño de la población..... | 58 |
| 3.8.2.2 | Probabilidad de cruce..... | 59 |
| 3.8.2.3 | Probabilidad de mutación..... | 59 |
| 3.9 | Codificación de las variables de diseño..... | 60 |
| 3.10 | Función de aptitud..... | 63 |
| 3.10.1 | Penalización estática..... | 65 |
| 3.10.2 | Penalización dinámica..... | 65 |
| 3.10.3 | Penalización adaptativa..... | 66 |

CAPÍTULO 4

OPTIMIZACIÓN DE FORMA CON ALGORITMOS GENÉTICOS Y MALLA FIJA 69

| | | |
|-------|--|----|
| 4.1 | Introducción..... | 69 |
| 4.2 | Optimización de forma con malla fija..... | 70 |
| 4.2.1 | Clasificación de los nodos..... | 71 |
| 4.2.2 | Clasificación de los elementos a partir de la diferenciación de los nodos..... | 72 |
| 4.2.3 | Recorte de los elementos de borde..... | 73 |
| 4.2.4 | Ratio de área normalizado por elemento..... | 76 |
| 4.3 | Codificación para la optimización de forma..... | 77 |

| | | |
|-------|--|----|
| 4.4 | Función de aptitud | 78 |
| 4.4.1 | Área y desplazamientos | 79 |
| 4.4.2 | Volumen y compliance | 79 |
| 4.4.3 | Área y desviación de tensiones | 80 |
| 4.5 | Operadores genéticos | 80 |
| 4.6 | Metodología para la optimización de forma con malla fija y algoritmos genéticos... | 80 |
| 4.7 | Ejemplos numéricos | 82 |
| 4.7.1 | Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre | 82 |
| 4.7.2 | Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre | 85 |
| 4.7.3 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 88 |
| 4.7.4 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 90 |

CAPÍTULO 5

OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y MALLA FIJA 95

| | | |
|---------|--|-----|
| 5.1 | Introducción | 95 |
| 5.2 | Optimización de topología con isolíneas | 97 |
| 5.3 | Criterios de referencia para la extracción de isolíneas | 99 |
| 5.4 | Tipos de isolíneas de referencia | 101 |
| 5.5 | Representación de las isolíneas de referencia | 102 |
| 5.6 | Análisis por elementos finitos con malla fija e isolíneas | 103 |
| 5.7 | Metodología para la optimización de topología con malla fija e isolíneas | 104 |
| 5.8 | Ejemplos numéricos | 106 |
| 5.8.1 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$) | 107 |
| 5.8.1.1 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$) | 109 |
| 5.8.1.2 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$) | 111 |
| 5.8.2 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$) | 113 |
| 5.8.3 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 115 |
| 5.8.4 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 117 |
| 5.8.5 | Viga MBB | 119 |
| 5.8.6 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida | 122 |

CAPÍTULO 6

OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS 125

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Introducción | 125 |
| 6.2 | Codificación para la optimización de topología | 126 |
| 6.3 | Criterios para la obtención del valor de referencia | 127 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 6.4 | Función de aptitud | 130 |
| 6.5 | Operadores genéticos | 132 |
| 6.6 | Metodología para la optimización de topología con isolíneas y algoritmos genéticos | 133 |
| 6.7 | Ejemplos numéricos | 134 |
| 6.7.1 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$) | 136 |
| 6.7.1.1 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$) | 143 |
| 6.7.1.2 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$) | 146 |
| 6.7.2 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$) | 149 |
| 6.7.3 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 156 |
| 6.7.3.1 | Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior | 161 |
| 6.7.3.2 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 163 |
| 6.7.4 | Viga MBB | 166 |
| 6.7.5 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida | 173 |
| 6.7.6 | Viga con disco circular rígido | 177 |

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES 181

| | | |
|-----|---------------------------|-----|
| 7.1 | Introducción | 181 |
| 7.2 | Trabajos realizados | 181 |
| 7.3 | Conclusiones | 182 |
| 7.4 | Trabajos futuros | 184 |

APÉNDICE A

ORGANIZACIÓN GENERAL DEL PROGRAMA MFAG 185

| | | |
|-----|-----------------------|-----|
| A.1 | Introducción | 185 |
| A.2 | Módulos básicos | 185 |
| A.3 | Subrutinas | 188 |

APÉNDICE B

INTERFASE MFAG CON EL USUARIO 191

| | | |
|-------|---------------------------|-----|
| B.1 | Descripción general | 191 |
| B.2 | Interfase gráfica | 193 |
| B.2.1 | Barra de títulos | 193 |
| B.2.2 | Barra de menús | 194 |

| | |
|---|------------|
| B.2.3 Barra de botones | 199 |
| B.3 Entrada de datos..... | 200 |
| B.4 Ficheros de resultados..... | 201 |
| B.4.1 Resultados del análisis..... | 202 |
| B.4.2 Resultados de la optimización | 203 |
| B.5 Ordenador utilizado | 203 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 205 |

Lista de tablas

| | | |
|-----------|---|----|
| Tabla 2.1 | Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería | 23 |
| Tabla 2.2 | Valor de las constantes constitutivas para los estados de tensión y deformación plana, siendo E el módulo de elasticidad, y ν el coeficiente de Poisson | 26 |
| Tabla 2.3 | Valores para la relación entre el módulo de elasticidad real E , y el módulo de elasticidad virtual E_0 | 32 |
| Tabla 3.1 | Analogía entre los términos de un sistema natural y un algoritmo genético | 44 |
| Tabla 3.2 | Valores asignados por diferentes autores para el ajuste de los parámetros de un AG | 58 |
| Tabla 3.3 | Clasificación de las codificaciones utilizadas en algoritmos evolucionarios ... | 60 |
| Tabla 3.4 | Codificaciones más utilizadas para la optimización de estructuras con algoritmos genéticos. Tipo de optimización y longitud del cromosoma | 63 |
| Tabla 3.5 | Funciones de aptitud empleadas en algoritmos genéticos para la optimización de forma y topología de estructuras continuas..... | 64 |
| Tabla 4.1 | Clasificación de los nodos pertenecientes a la columna c_{n-2} | 72 |
| Tabla 4.2 | Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, el análisis del modelo con malla fija de elementos finitos, y el algoritmo genético | 82 |
| Tabla 4.3 | Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Resultados para diferentes generaciones | 84 |
| Tabla 4.4 | Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Resultados para diferentes generaciones | 87 |
| Tabla 4.5 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones | 89 |

| | | |
|------------|---|-----|
| Tabla 4.6 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones..... | 92 |
| Tabla 5.1 | Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, y el análisis del modelo con malla fija de elementos finitos..... | 106 |
| Tabla 5.2 | Parámetros que controlan el algoritmo de optimización..... | 107 |
| Tabla 5.3 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes iteraciones | 108 |
| Tabla 5.4 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Resultados para diferentes iteraciones | 110 |
| Tabla 5.5 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Resultados para diferentes iteraciones | 112 |
| Tabla 5.6 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes iteraciones | 114 |
| Tabla 5.7 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes iteraciones | 117 |
| Tabla 5.8 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes iteraciones | 119 |
| Tabla 5.9 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes iteraciones | 121 |
| Tabla 5.10 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Resultados para diferentes iteraciones | 124 |
| Tabla 6.1 | Codificación binaria para la extracción del valor de referencia..... | 129 |
| Tabla 6.2 | Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, y el análisis del modelo con malla fija de elementos finitos..... | 135 |
| Tabla 6.3 | Parámetros del algoritmo genético, y parámetros para la extracción del valor de referencia para la definición del contorno | 136 |
| Tabla 6.4 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes mallas y generaciones | 138 |
| Tabla 6.5 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 192×120 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig | 142 |
| Tabla 6.6 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Resultados para diferentes generaciones..... | 145 |
| Tabla 6.7 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Malla de 152×76 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig..... | 145 |
| Tabla 6.8 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Resultados para diferentes generaciones..... | 147 |
| Tabla 6.9 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Malla de 160×40 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig..... | 148 |

| | | |
|------------|--|-----|
| Tabla 6.10 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes mallas y generaciones | 151 |
| Tabla 6.11 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 96×60 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig | 154 |
| Tabla 6.12 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones | 157 |
| Tabla 6.13 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig..... | 159 |
| Tabla 6.14 | Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones | 162 |
| Tabla 6.15 | Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig..... | 163 |
| Tabla 6.16 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones | 165 |
| Tabla 6.17 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Malla de 70×35 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig | 165 |
| Tabla 6.18 | Viga MBB. Resultados para diferentes mallas y generaciones | 168 |
| Tabla 6.19 | Viga MBB. Malla de 180×30 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig..... | 171 |
| Tabla 6.20 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Resultados para diferentes generaciones | 174 |
| Tabla 6.21 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig..... | 176 |
| Tabla 6.22 | Viga con disco circular rígido. Resultados para diferentes generaciones..... | 179 |
| Tabla A.1 | Principales subrutinas incluidas en el programa MFAG | 188 |

Lista de figuras

| | | |
|------------|---|----|
| Figura 2.1 | (a) Alargamiento en la dirección x . (b) Alargamiento en la dirección y . (c) Deformación tangencial pura sin rotación ($\theta_1 = \theta_2$)..... | 25 |
| Figura 2.2 | Discretización de una viga de gran canto con elementos rectangulares lineales de cuatro nodos. Definición de los ejes locales r y s | 27 |
| Figura 2.3 | Dominio de la malla fija Ω_{fg} , región de diseño Ω , y contorno de la estructura Γ | 31 |
| Figura 2.4 | Aproximación de la geometría con una malla fija. Clasificación de los elementos finitos con respecto del contorno de la estructura | 31 |
| Figura 2.5 | Aproximación de la geometría con una malla fija. Clasificación en elementos exteriores, interiores y de borde (a) Aproximación FG_1 . (b) Aproximación FG_0 | 33 |
| Figura 2.6 | Desplazamientos incógnita, puntos de Gauss, sistemas de coordenadas global y local, y numeración de nodos..... | 34 |
| Figura 2.7 | Tensiones en los nodos a partir de las tensiones en los elementos que comparten, y el ratio de área normalizado | 37 |
| Figura 2.8 | Diagramas de flujo. (a) Método FG. (b) Método clásico EF | 38 |
| Figura 3.1 | Interpretación de los hipercubos, hiperplanos, e hiperlíneas de dimensión l comprendidas entre 1 y 4 | 45 |
| Figura 3.2 | Diagrama de flujo de un algoritmo genético simple..... | 51 |
| Figura 4.1 | Clasificación de los nodos pertenecientes a la columna c_{n-2} con respecto del contorno de la estructura | 71 |
| Figura 4.2 | Clasificación de los elementos como interiores (I), exteriores (O) y de borde (B), a partir de la clasificación de los nodos en interiores (i), exteriores (o) y de borde (b) | 72 |

| | | |
|-------------|---|----|
| Figura 4.3 | (a) Pérdida de precisión del procedimiento para la clasificación de elementos a partir de la diferenciación de los nodos. (b) Solución de la indeterminación mediante una malla más fina..... | 73 |
| Figura 4.4 | Recorte entre polígonos. (a) Convexo y cóncavo, resultado polígonos múltiples. (b) Convexo y cóncavo, resultado polígono simple..... | 73 |
| Figura 4.5 | Recorte de un polígono paso a paso. (a) Arista de corte x_{max} . (b) Arista de corte y_{min} . (c) Arista de corte x_{min} . (d) Arista de corte y_{max} | 74 |
| Figura 4.6 | Polígono recortado y vértices obtenidos durante el proceso de recorte..... | 74 |
| Figura 4.7 | Casos de recorte entre una arista del polígono y una arista infinita..... | 75 |
| Figura 4.8 | Área encerrada entre los segmentos de un polígono..... | 77 |
| Figura 4.9 | Representación de un cromosoma..... | 78 |
| Figura 4.10 | Diagrama de flujo del método MFAG-f para la optimización de forma con con malla fija y algoritmos genéticos..... | 81 |
| Figura 4.11 | Voladizo 1 con fuerza vertical de 1 kN centrada en el extremo libre. Dominio de diseño..... | 83 |
| Figura 4.12 | Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Formas óptimas para diferentes generaciones..... | 83 |
| Figura 4.13 | Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación..... | 84 |
| Figura 4.14 | Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Método FG-GA. (b) Método Nibbling ESO. (c) Método MFAG-f..... | 85 |
| Figura 4.15 | Forma óptima teórica para una viga completamente tensionada..... | 85 |
| Figura 4.16 | Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Formas óptimas para diferentes generaciones..... | 86 |
| Figura 4.17 | Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación..... | 87 |
| Figura 4.18 | Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Método FG-GA. (b) Método MFAG-f..... | 88 |
| Figura 4.19 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño..... | 88 |
| Figura 4.20 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Formas óptimas para diferentes generaciones..... | 89 |
| Figura 4.21 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación..... | 90 |
| Figura 4.22 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Método FG-GA. (b) Método MFAG-f..... | 90 |
| Figura 4.23 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño..... | 91 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figura 4.24 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Formas óptimas para diferentes generaciones | 91 |
| Figura 4.25 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación..... | 92 |
| Figura 4.26 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Método FG-GA. (b) Método Nibbling ESO. (c) Método MFAG-f..... | 93 |
| Figura 5.1 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Curvas isostáticas. Tensiones principales de tracción (líneas sólidas). Tensiones principales de compresión (líneas de trazos)..... | 97 |
| Figura 5.2 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Isolíneas para las tensiones principales de tracción | 98 |
| Figura 5.3 | Segmentos de isolínea obtenidos mediante intersección de cuatro planos triangulares con el plano de referencia | 102 |
| Figura 5.4 | Aproximación de la topología con una malla fija. Clasificación de los elementos finitos con respecto a las isolíneas de referencia reales (línea continua) y virtuales (línea a trazos)..... | 104 |
| Figura 5.5 | Diagrama de flujo del método MFAG-i para la optimización de topología con isolíneas y malla fija | 105 |
| Figura 5.6 | Voladizo con fuerza vertical de 100 N centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Dominio de diseño..... | 107 |
| Figura 5.7 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones..... | 108 |
| Figura 5.8 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración..... | 109 |
| Figura 5.9 | Voladizo con fuerza vertical de 1 kN centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Dominio de diseño..... | 109 |
| Figura 5.10 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones..... | 110 |
| Figura 5.11 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración..... | 111 |
| Figura 5.12 | Voladizo con fuerza vertical de 10 N centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Dominio de diseño..... | 111 |
| Figura 5.13 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones..... | 112 |
| Figura 5.14 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración..... | 113 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figura 5.15 | Voladizo con fuerza vertical de 100 N en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Dominio de diseño | 113 |
| Figura 5.16 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones | 114 |
| Figura 5.17 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración | 115 |
| Figura 5.18 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño | 116 |
| Figura 5.19 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes iteraciones | 116 |
| Figura 5.20 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración | 117 |
| Figura 5.21 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical de 100 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño | 118 |
| Figura 5.22 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes iteraciones | 118 |
| Figura 5.23 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración | 119 |
| Figura 5.24 | Viga MBB. Dominio de diseño | 120 |
| Figura 5.25 | Viga MBB. Topologías óptimas para diferentes iteraciones..... | 120 |
| Figura 5.26 | Viga MBB. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima /iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración | 121 |
| Figura 5.27 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida de 250 N/mm. Dominio de diseño | 122 |
| Figura 5.28 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Topologías óptimas para diferentes iteraciones | 123 |
| Figura 5.29 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración | 124 |
| Figura 6.1 | Alteración del campo de tensiones de Von Mises tras introducir en el diseño de la estructura dos nuevas cavidades (Woon, 2002)..... | 130 |
| Figura 6.2 | Pieza prismática sometida a una carga aplicada estáticamente..... | 130 |
| Figura 6.3 | (a) Diagrama fuerza-desplazamiento. (b) Diagrama fuerza-desplazamiento para una pieza de material con comportamiento elástico lineal..... | 131 |
| Figura 6.4 | Diagrama de flujo del método MFAG-ig para la optimización de topología con isolíneas y algoritmos genéticos..... | 134 |
| Figura 6.5 | Voladizo con fuerza vertical de 100 N centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Dominio de diseño | 136 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figura 6.6 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). De izquierda a derecha, mallas de 64×40 , 96×60 y 192×120 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones | 137 |
| Figura 6.7 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución aptitud/generación. (b) Evolución aptitud/tiempo. (c) Evolución compliance/generación. (d) Evolución compliance/tiempo. (e) Evolución fracción de volumen/generación. (f) Evolución fracción de volumen/tiempo. | 139 |
| Figura 6.8 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución desplazamiento máximo/generación. (b) Tensión de Von Mises media/generación | 140 |
| Figura 6.9 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución aptitud/compliance con el número de elementos. (b) Desplazamiento máximo/volumen con el número de elementos..... | 141 |
| Figura 6.10 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 192×120 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Métodos MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO | 141 |
| Figura 6.11 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 192×120 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración | 142 |
| Figura 6.12 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Método multi-GA. (b) Método PLATO-am. (c) Método MFAG-ig..... | 143 |
| Figura 6.13 | Voladizo con fuerza vertical de 1 kN centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Dominio de diseño..... | 144 |
| Figura 6.14 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Malla de 152×76 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones..... | 144 |
| Figura 6.15 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Malla de 152×76 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig..... | 145 |
| Figura 6.16 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). (a) Método ESO. (b) Método MFAG-ig..... | 146 |
| Figura 6.17 | Voladizo con fuerza vertical de 10 N centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Dominio de diseño..... | 146 |
| Figura 6.18 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Topologías óptimas para diferentes generaciones | 147 |
| Figura 6.19 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Malla de 160×40 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig | 148 |
| Figura 6.20 | Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). (a) Método MMA. (b) Método MFAG-ig..... | 148 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figura 6.21 | Voladizo con fuerza vertical de 100 N en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Dominio de diseño | 149 |
| Figura 6.22 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). De izquierda a derecha, mallas de 64×40 , 96×60 y 192×120 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones | 150 |
| Figura 6.23 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución desplazamiento máximo/generación. (b) Tensión de Von Mises media/generación | 151 |
| Figura 6.24 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución aptitud/generación. (b) Evolución aptitud/tiempo. (c) Evolución compliance/generación. (d) Evolución compliance/tiempo. (e) Evolución fracción de volumen/generación. (f) Evolución fracción de volumen/tiempo | 152 |
| Figura 6.25 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución aptitud/compliance con el número de elementos. (b) Desplazamiento máximo/volumen con el número de elementos | 153 |
| Figura 6.26 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 96×60 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Método MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO | 154 |
| Figura 6.27 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 96×60 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración | 155 |
| Figura 6.28 | Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre. (a) Método SIMP. (b) Método funciones implícitas con regulación. (c) Método MFAG-ig | 155 |
| Figura 6.29 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño | 156 |
| Figura 6.30 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones | 157 |
| Figura 6.31 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/generación. (b) Evolución aptitud/generación. (c) Evolución desplazamiento máximo/generación. (d) Evolución compliance/fracción de volumen/generación | 158 |
| Figura 6.32 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Malla de 110×44 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Método MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO | 159 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figura 6.33 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración..... | 160 |
| Figura 6.34 | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Método multi-GA. (b) Método MFAG-ig..... | 160 |
| Figura 6.35 | Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada 45° de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño | 161 |
| Figura 6.36 | Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones | 162 |
| Figura 6.37 | Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig..... | 163 |
| Figura 6.38 | Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Malla de 100×50 elementos. (a) Método ESO. (b) Método MFAG-ig | 163 |
| Figura 6.39 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical de 100 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño | 164 |
| Figura 6.40 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones | 164 |
| Figura 6.41 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Malla de 70×35 elementos (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig..... | 165 |
| Figura 6.42 | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Método PBO. (b) Método MFAG-ig..... | 166 |
| Figura 6.43 | Viga MBB. Dominio de diseño | 166 |
| Figura 6.44 | Viga MBB. De izquierda a derecha, mallas de 90×15, 120×60 y 180×30 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones | 167 |
| Figura 6.45 | Viga MBB. (a) Evolución desplazamiento máximo/generación. (b) Tensión de Von Mises media/generación | 169 |
| Figura 6.46 | Viga MBB. (a) Evolución aptitud/compliance con el número de elementos. (b) Desplazamiento máximo/volumen con el número de elementos..... | 169 |
| Figura 6.47 | Viga MBB. (a) Evolución aptitud/generación. (b) Evolución aptitud/tiempo. (c) Evolución compliance/generación. (d) Evolución compliance/tiempo. (e) Evolución fracción de volumen/generación. (f) Evolución fracción de volumen/tiempo | 170 |
| Figura 6.48 | Viga MBB. Malla de 180×30 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Método MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO | 171 |
| Figura 6.49 | Viga MBB. Malla de 180×30 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración..... | 172 |
| Figura 6.50 | Viga MBB. (a) Método multi-GA. (b) Método MFAG-ig..... | 172 |
| Figura 6.51 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida de 250 N/mm. Dominio de diseño..... | 173 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figura 6.52 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Topologías óptimas para diferentes generaciones..... | 174 |
| Figura 6.53 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/generación. (b) Evolución aptitud/generación. (c) Evolución desplazamiento máximo/generación. (d) Evolución compliance/fracción volumen/generación | 175 |
| Figura 6.54 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Malla de 270×90 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig | 175 |
| Figura 6.55 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Malla de 270×90 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación /iteración..... (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración | 176 |
| Figura 6.56 | Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. (a) Método PBO. (b) Método MFAG-ig | 176 |
| Figura 6.57 | Viga con disco circular rígido con fuerza vertical centrada de 100 N. Dominio de diseño | 177 |
| Figura 6.58 | Viga con disco circular rígido. Topologías óptimas para diferentes generaciones | 178 |
| Figura 6.59 | Viga con disco circular rígido. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/generación. (b) Evolución aptitud/generación.(c) Evolución desplazamiento máximo/generación. (d) Evolución compliance/fracción de volumen/generación..... | 179 |
| Figura 6.60 | Viga con disco circular rígido.(a) Método PBO. (b) Método MFAG-ig | 180 |
| Figura A.1 | Entorno de programación. Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0 | 186 |
| Figura A.2 | Diagrama de flujo principal del módulo de análisis del programa MFAG..... | 187 |
| Figura B.1 | Ventana principal y subventanas de MFAG. Sin datos..... | 192 |
| Figura B.2 | Ventana principal y subventanas de MFAG-ig. Diseño óptimo de topología. Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$)..... | 192 |
| Figura B.3 | Icono del programa MFAG | 193 |
| Figura B.4 | Ventana principal y subventanas de MFAG. Datos cargados en memoria..... | 194 |
| Figura B.5 | Barra de menús. <i>Ficheros</i> | 194 |
| Figura B.6 | Ventana principal y subventanas de MFAG. Datos cargados en memoria. Editor de textos para la apertura y edición de ficheros | 195 |
| Figura B.7 | Barra de menús. <i>Optimización</i> | 195 |
| Figura B.8 | Barra de menús. <i>Análisis</i> | 196 |
| Figura B.9 | Barra de menús. <i>Alg_Genético>Función de Aptitud</i> | 196 |
| Figura B.10 | Barra de menús. <i>Alg_Genético>Selección</i> | 197 |
| Figura B.11 | Barra de menús. <i>Alg_Genético>Emparejamiento</i> | 197 |
| Figura B.12 | Barra de menús. <i>Alg_Genético>Cruce</i> | 198 |

| | |
|--|-----|
| Figura B.13 Barra de menús. Criterio_Evolucionario>Estrategia Evolucionaria..... | 198 |
| Figura B.14 Barra de menús. Escritura_RST>Formato Imágenes | 198 |
| Figura B.15 Barra de menús. Avisos_Pantalla | 199 |
| Figura B.16 Barra de menús. Avisos_Pantalla>Avisos Final | 199 |
| Figura B.17 Barra de menús. Acerca de... | 199 |

Lista de símbolos

MAYÚSCULAS ROMANAS

| | |
|-------------------------|---|
| A | Factor de severidad. |
| $A^{(e)}$ | Área del elemento. |
| $A_i^{(e)} (A_o^{(e)})$ | Área interior (exterior) que cubre un elemento sobre la estructura. |
| B | Factor para el nivel de penalización. |
| C | Compliance. Energía de deformación. Constante. |
| C_i | Energía de deformación en el nudo i . |
| $C_j^{(e)}$ | Energía de deformación en el elemento j . |
| C_m | Coefficiente de modulación. |
| $D_{max} (D_{min})$ | Desplazamiento máximo (mínimo). |
| D_{max}^0 | Desplazamiento máximo inicial. |
| E | Módulo de elasticidad longitudinal real. |
| E_0 | Módulo de elasticidad longitudinal virtual. |
| ER | Ratio evolucionario. |
| F | Función de aptitud. |
| $H_i (H_j)$ | Peso correspondiente en la dirección $i (j)$. |
| H | Función de Heaviside. |
| I | Integral. |
| I,O,B | Interiores, exteriores, y de borde. |
| I_t | Iteración. |
| IR | Ratio de inclusión. |
| IR_{min} | Ratio de inclusión mínimo. |

| | |
|-----------------|--|
| L | Longitud. |
| M | Momento flector. |
| N | Número total de generaciones. |
| N_i | Función de forma. |
| N_{bit} | Número de bits. |
| NO | Número de oscilación. |
| P | Carga. Población. |
| $P(\mathbf{x})$ | Función de penalización. |
| RR | Ratio de rechazo. Coeficiente definido por el usuario. |
| RR_{max} | Ratio de rechazo máximo. |
| RR_s | Ratio de rechazo superior. |
| RR_i | Ratio de rechazo inferior. |
| R_{cav} | Número de refinamientos de cavidades. |
| S_σ | Desviación estándar de la tensión de Von Mises. |
| SS_a | Porcentaje de ascenso. |
| SS_d | Porcentaje de descenso. |
| SS | Número de óptimos locales (Steady State). |
| U^{po} | Energía potencial. |
| U^{pl} | Energía por deformación plástica. |
| U_s | Energía por rigidización tensional. |
| V | Volumen. |
| $V_I (V_O)$ | Volumen del elemento interior (exterior) a la estructura exterior. |
| V_0 | Volumen inicial. |
| V_r | Valor real. |
| V_r^{max} | Valor máximo real. |
| V_r^{min} | Valor mínimo real. |
| W | Módulo resistente. Trabajo. |

MAYÚSCULAS ROMANAS (VECTORES Y MATRICES)

| | |
|--|--|
| B | Matriz de deformación. |
| C_{xy} | Matriz de coordenadas nodales. |
| D | Matriz de constantes elásticas. |
| H | Esquema. |
| J | Jacobiano. |
| K | Matriz de rigidez de la estructura. |
| K^(e) | Matriz de rigidez del elemento. |
| K_{real}^(e) | Matriz de rigidez del elemento en una isolínea real. |
| K_{virtual}^(e) | Matriz de rigidez del elemento en una isolínea real. |
| K_I, K_O, K_B | Matriz de rigidez elemento interior, exterior, y de borde. |

| | |
|----------|---|
| N | Matriz de funciones de forma. |
| S | Matriz operador lineal. Matriz de rigidez por rigidización tensional. |

MINÚSCULAS ROMANAS

| | |
|--------------------|--|
| a_0, a_1, a_2 | Coefficientes determinados por el usuario. |
| a_{RR}, a_{IR} | Constantes determinadas por el usuario. |
| a, b | Dimensiones. |
| b | Número de barras. |
| d_{ij} | Constantes elásticas. |
| e | Elemento/s. |
| \bar{f} | Aptitud media. |
| f_i | Aptitud. |
| $f(\mathbf{x})$ | Función objetivo. |
| g | Generación. Número de cadenas tomadas de H . |
| $g(\mathbf{x})$ | Restricción de desigualdad. |
| h | Altura. |
| k | Constante. |
| l | Número de niveles de violación. |
| m | Número total de restricciones. |
| m_d | Número de restricciones de desigualdad. |
| m_i | Número de restricciones de igualdad. |
| n | Tamaño de población. |
| n_d | Número de desplazamientos críticos. |
| n_e | Número de elementos. |
| n_i | Número de puntos de integración en una dirección. |
| n_{int} | Número de puntos de integración. |
| n_n | Número de nodos. |
| n_{ref} | Número de valores de referencia. |
| n_p | Número de puntos de control. |
| n_v | Número de vértices. |
| $n_x (n_y)$ | Número de nodos en la dirección x (y). |
| p_i | Probabilidad. |
| p_c | Probabilidad de cruce. |
| p_m | Probabilidad de mutación. |
| p_r | Probabilidad de ruptura. |
| q | Carga uniformemente repartida. |
| s | Número de restricciones satisfechas. Segundos. |
| r, s | Ejes locales del elemento. |
| t | Espesor. Tiempo. |
| $u(x, y), v(x, y)$ | Desplazamientos de un punto en las direcciones de los ejes x e y . |

| | |
|--------------------------------|---|
| $u_x (u_y)$ | Componente del desplazamiento paralelo al eje x (y). |
| v_i | Volumen del punto de integración i . |
| v | Desplazamiento crítico. |
| w_i | Peso para la restricción i . |
| x_i^I | Límite inferior de las variables de diseño i . |
| x_i^S | Límite superior de las variables de diseño i . |
| x_i | Variable de diseño i . |
| $x_1 (x_n)$ | Valor discreto inicial (valor discreto n). |
| $x (y)$ | Eje de coordenadas x (y). |
| $x_{max}^{cs}, (x_{max}^{ci})$ | Cota máxima paralela al eje x para el cordón superior (inferior). |
| $x_{min}^{cs}, (x_{min}^{ci})$ | Cota mínima paralela al eje x para el cordón superior (inferior). |
| y_{max} | Cota máxima paralela al eje y . |
| y_{min} | Cota mínima paralela al eje y . |
| $z_{xi,yi}$ | Altura de los vértices i en la dirección z . |

MINÚSCULAS ROMANAS (VECTORES Y MATRICES)

| | |
|----------------------|--|
| $\mathbf{a}_i^{(e)}$ | Vector de desplazamientos del elemento del nodo i . |
| \mathbf{f} | Vector de cargas en los nodos. |
| \mathbf{u} | Vector de desplazamientos en un punto. |
| \mathbf{x} | Vector n-dimensional de variables de diseño. |
| $\mathbf{x}(x, y)$ | Vector de desplazamientos en un punto. |
| \mathbf{x}_i | Vector de valores discretos. |
| \mathbf{z} | Vector del valor del estimador de referencia en cada nodo. |

MAYÚSCULAS GRIEGAS

| | |
|------------------|-------------------------------|
| Δ | Incremento. |
| Δ_r | Intervalo real de referencia. |
| ΔV | Variación de volumen. |
| ΔV_{min} | Variación de volumen mínimo. |
| Γ | Contorno estructural. |
| Ω | Dominio del diseño. |
| Ω_{fg} | Dominio de la malla fija. |

MINÚSCULAS GRIEGAS

| | |
|-------------------------|----------------------------------|
| α | Ratio de referencia. |
| α_i | Coefficientes de desplazamiento. |
| α_0 | Ratio de referencia inicial. |
| α, β, γ | Constantes. |
| δ | Desplazamiento. |

| | |
|--|---|
| δ_s | Factor binario. |
| $\varepsilon_x (\varepsilon_y, \varepsilon_z)$ | Alargamiento unitario en la dirección x (y, z). |
| ε_{xy} | Deformación tangencial en el plano xy . |
| ξ, η | Direcciones coordenadas naturales. |
| ξ | Ratio de área normalizado. |
| γ | Densidad de energía de deformación. |
| $\gamma_{xy} (\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ | Deformación angular en el plano xy (xz, yz). |
| ν | Coefficiente de Poisson. |
| θ | Ángulo. |
| $\theta(\mathbf{H})$ | Orden del esquema. |
| $\partial(\mathbf{H})$ | Longitud característica del esquema. |
| ρ | Densidad del material. |
| $\sigma_{1,2}$ | Tensiones principales. |
| σ_{adm} | Tensión admisible. |
| σ_{med} | Tensión promedio. |
| σ_{min} | Tensión mínima. |
| σ_{ref} | Tensión de referencia. |
| $\sigma_{\%,ref}$ | Porcentaje de la tensión de referencia. |
| σ_{ref}^{max} | Tensión de referencia máxima. |
| σ_{ref}^{med} | Tensión de referencia promedio. |
| σ_{ref}^{min} | Tensión de referencia mínima. |
| σ_{vm} | Tensión de Von Mises. |
| $\sigma_{vm,i}$ | Tensión de Von Mises en el punto clave i . |
| $\sigma_{vm}^{(e)}$ | Tensión de Von Mises para el elemento. |
| $\sigma_{vm,e}^{max}$ | Tensión de Von Mises máxima en los elementos. |
| σ_{vm}^{max} | Tensión máxima de Von Mises. |
| σ_{vm}^{med} | Tensión media de Von Mises. |
| $\sigma_{vm,0}^{med}$ | Tensión media de Von Mises inicial. |
| σ_{vm}^{min} | Tensión mínima de Von Mises. |
| $\sigma_x (\sigma_y, \sigma_z)$ | Tensión normal en la dirección x (y, z). |
| $\tau_{xy} (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ | Tensión tangencial en el plano xy (xz, yz). |

MINÚSCULAS GRIEGAS (VECTORES Y MATRICES)

| | |
|---------------------------------|---|
| $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ | Vector de deformaciones elásticas. |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | Vector de deformaciones. Matriz de deformación. |
| $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ | Vector de deformaciones iniciales. |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | Vector de tensiones. |
| $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ | Tensiones en el elemento. |

| | |
|---------------|---|
| σ_{Gi} | Tensiones en el punto de Gauss i . |
| σ_0 | Vector de tensiones residuales iniciales. |

ACRÓNIMOS

| | |
|----------|--|
| ADN | Ácido Desoxirribonucleico. |
| AESO | Additive Evolutionary Structural Optimization. |
| AG | Algoritmo Genético. |
| AGs | Algoritmos Genéticos. |
| BEM | Boundary Element Method. |
| BESO | Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization. |
| BGSO | Biological Growth Structural Optimization. |
| CAD | Computer Aided Design. |
| CAO | Computer Aided Optimization. |
| CE | Computación Evolutiva. |
| CFS | Constant-weight Fully Stressed. |
| EADS | European Aeronautic Defence and Space Company. |
| EF | Elementos Finitos. |
| EP | Evolutionary Programming. |
| ESO | Evolutionary Structural Optimization. |
| ESs | Evolution Strategies. |
| FDM | Finite Difference Method. |
| FEA | Finite Elements Analysis. |
| FG | Fixed Grid. |
| FG-FEA | Fixed Grid-Finite Elements Analysis. |
| FG-GA | Fixed Grid-Genetic Algorithm. |
| FS | Fully Stressed. |
| FSM | Finite State Machines. |
| GAs | Genetic Algorithms. |
| GESO | Group Evolutionary Structural Optimization. |
| GP | Genetic Programming. |
| MBB | Messerschmidt-Bölkow-Blohm. |
| MEF | Método de los Elementos Finitos. |
| MESO | Morphing Evolution Structural Optimization. |
| MFAG | Malla Fija Algoritmos Genéticos. |
| MFAG-a | Malla Fija Algoritmos Genéticos-adición. |
| MFAG-c | Malla Fija Algoritmos Genéticos-contorno. |
| MFAG-f | Malla Fija Algoritmos Genéticos-forma. |
| MFAG-i | Malla Fija Algoritmos Genéticos-isolíneas. |
| MFAG-ig | Malla Fija Algoritmos Genéticos-isolíneas y genéticos. |
| MMA | Method of Moving Asymptotes. |
| Multi-GA | Multi-Genetic Algorithm. |

| | |
|------|--|
| OC | Optimality Criteria. |
| PBO | Performance Based Optimization. |
| PBOC | Performance Based Optimality Criteria. |
| PSO | Particle Swarms Optimization. |
| PTV | Principio de los Trabajos Virtuales. |
| RA | Reverse Adaptivity. |
| RKPM | Reproducing Kernel Particle Method. |
| SA | Simulated Annealing. |
| SERA | Sequential Element Rejections and Admissions. |
| SIMP | Solid Isotropic Microstructure with Penalization. |
| TTO | Truss Topology Optimization. |
| VCFS | Variable element dimension Constant-weight Fully Stresses. |
| XESO | Extended Evolutionary Structural Optimization. |

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1 INTRODUCCIÓN

Antes de la aplicación de las modernas técnicas de optimización al diseño, el proceso de diseño óptimo requería fundamentalmente una gran experiencia por parte del diseñador, el cual debía utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño. El método que se empleaba era el siguiente: el ingeniero definía un diseño inicial cuyo comportamiento era analizado numéricamente; de los resultados de dicho análisis se podían deducir (por experiencia o intuición) los cambios a realizar para mejorar dicho diseño. Se finalizaba el proceso cuando se consideraba que el diseño era lo suficientemente bueno. Este método denominado de *prueba y error*, presentaba el inconveniente de que las modificaciones dependían totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose soluciones buenas, pero no las mejores, y además con un alto precio por parte del diseñador.

La teoría de la optimización matemática está constituida por un conjunto de resultados y métodos numéricos enfocados a encontrar el mejor candidato entre una colección de alternativas, sin tener que evaluar explícitamente todas esas alternativas. El concepto de optimización está en la base de la ingeniería, puesto que la función clásica del ingeniero es diseñar sistemas novedosos, mejores, más eficientes, y menos costosos. La potencia de los métodos de optimización para determinar el mejor diseño sin comprobar todos los posibles, se basa en la utilización de un nivel relativamente modesto de matemáticas y la tarea de realizar cálculos numéricos iterativos, utilizando procedimientos lógicos claramente definidos o algoritmos implementados en ordenadores.

En general, un problema de optimización consiste en buscar ciertos valores para determinadas variables, de forma que cumpliendo un conjunto de requisitos representados

habitualmente por ecuaciones o inecuaciones algebraicas, nos proporcionan el mejor valor posible para una función que es utilizada para medir el rendimiento de nuestro diseño.

La optimización de estructuras es actualmente un campo en constante evolución, en el cual se ha progresado de forma importante en estos últimos años, siendo en la actualidad reconocida como una herramienta de diseño práctica.

1.2 FORMULACIÓN DEL DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS

Antes de emprender cualquier estudio de optimización, es importante definir los límites del sistema que se investiga. Generalmente, el diseño que se pretende optimizar pertenece a un conjunto mayor, y estos límites son las acotaciones que lo separan del mismo. Sirven para aislar el sistema de su entorno, puesto que para su análisis, todas las interacciones entre el sistema y su entorno se suponen invariables a un determinado nivel.

El problema de diseño óptimo se entiende actualmente como aquél que se plantea determinar el valor de una serie de variables de manera que se minimice (ó maximice) el valor de una función objetivo, a la vez que se cumplen una serie de restricciones impuestas. En términos matemáticos, el problema se puede formular como: encontrar el vector de variables de diseño \mathbf{x} que

$$\begin{aligned} &\text{minimice} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a} && h_j(\mathbf{x}) = 0 && j = 1, \dots, m_i \\ &&& g_k(\mathbf{x}) \geq 0 && k = 1, \dots, m_d \\ &&& x_i^I \leq x_i \leq x_i^S && i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde

| | |
|-------------------|--|
| \mathbf{x} | vector n-dimensional de variables de diseño |
| $f(\mathbf{x})$ | función objetivo, representa el criterio óptimo |
| $h_j(\mathbf{x})$ | restricción de diseño de igualdad j |
| $g_k(\mathbf{x})$ | restricción de diseño de desigualdad k |
| m_i | número de restricciones de igualdad |
| m_d | número de restricciones de desigualdad |
| x_i^I | límite inferior de las variables de diseño i |
| x_i^S | límite superior de las variables de diseño i |
| x_i | variable de diseño i |
| n | número de variables |

Al espacio n -dimensional definido por el vector de variables \mathbf{x} se le denomina *espacio de diseño*. Las restricciones definen hipersuperficies que acotan un entorno en el espacio de diseño. Un conjunto de variables de diseño define un punto en el espacio de diseño. Si un punto es tal que se cumplen todas las restricciones, ese punto es un *diseño válido* o *factible*; si, por el contrario, viola alguna restricción, el punto del espacio de diseño corresponde a un *diseño no válido* o *no factible*.

1.2.1 Variables de diseño

En primer lugar, es necesario distinguir entre las magnitudes que intervienen en un diseño, cuyos valores pueden ser modificados, y aquellas magnitudes cuyos valores están fijados por factores externos, y por tanto fuera de los límites del diseño. Los *parámetros* del problema representan magnitudes cuyo valor es constante durante todo el diseño y son consecuencia, en general, de una serie de condiciones impuestas externamente al problema. Por el contrario, las *variables* hacen referencia a magnitudes cuyos valores pueden cambiar a lo largo de la evolución del diseño.

En el caso más general, se distinguen cuatro tipos de variables:

- Propiedades de la sección de la pieza: área, momentos de inercia, y de torsión, etc.
- Geometría de la estructura: altura, longitud, espesor, etc.
- Topología de la estructura: densidad del material, perímetro total, etc.
- Propiedades constitutivas: módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, etc.

Actualmente, no existen aún técnicas de optimización que consideren eficientemente los cuatro tipos de variables. Por ello, lo habitual es establecer como parámetros las características del material e incluso la topología de la estructura.

Según su campo de existencia, las variables se pueden clasificar en *continuas* y *discretas*. Los métodos de optimización disponibles actualmente trabajan, en su mayoría, sólo con variables continuas. Por lo que el uso de variables discretas queda limitado a algunos métodos aún no muy establecidos.

1.2.2 Función objetivo

Una vez que hemos construido y delimitado el problema de interés, el siguiente paso es elegir un criterio con el que evaluar los diseños, de forma que podamos identificar cual es el “mejor” diseño según este criterio. Por tanto, la función objetivo suele ser una función escalar de las variables que intervienen en el diseño, y la condición habitual que se le exige a dicha función es que para la solución óptima tome un valor mínimo (o máximo).

Hasta el momento, la función objetivo que se ha utilizado con mayor frecuencia es la masa del diseño, debido a que las primeras optimizaciones estructurales se desarrollaron en el campo de la aeronáutica, en la cual el valor del peso resulta un condicionamiento esencial.

El planteamiento tradicional es pues, expresar la masa de la pieza en función de las variables de diseño, y tratar de obtener el mínimo valor para dicha masa. Esta práctica se sigue realizando actualmente con una gran eficacia, puesto que la masa estructural está directamente relacionada con el coste total de la misma. Cuanto menos material se utilice, más económica será la pieza en términos generales. Sin embargo, en la evaluación del coste total entran en juego aspectos tales como: costes de fabricación, mano de obra, tiempo de producción mínimo, máxima tasa de producción, mínima energía utilizada, máxima carga, etc. Estos aspectos pueden llegar a ser decisivos a la hora de evaluar la rentabilidad de uno u otro diseño, y es por ello que conviene tenerlos en cuenta al plantear la expresión de la función objetivo. Asimismo, pueden emplearse como función objetivo otros estimadores:

coste anual, beneficio anual neto, tasa coste-beneficio, fiabilidad estructural, frecuencias naturales, tensión máxima, desplazamientos en puntos críticos, rigidez de la estructura, etc.

1.2.3 Restricciones

La mayoría de los casos prácticos se formulan como problemas con restricciones. Esto se debe a que en la mayor parte de los problemas complejos, como es el diseño de una estructura, no pueden tratarse libremente teniendo en cuenta todas las elecciones posibles, sino que debe de descomponerse en subproblemas separados. En donde, cada uno de estos subproblemas tienen restricciones que han sido impuestas para acotar el campo de exploración. Por lo tanto, las restricciones son condiciones que debe de cumplir el diseño para que pueda ser considerado como válido, planteándose en función de las variables, a las que se les exige tener un valor o mantenerse dentro de unos límites.

Una primera clasificación de las restricciones las divide en *explícitas* o *implícitas*. Las primeras actúan directamente imponiendo condiciones a una variable (o un grupo de ellas), mientras que las segundas imponen condiciones sobre magnitudes que dependen a su vez de las variables. Es importante la distinción entre ambas porque las restricciones explícitas tienen un tratamiento más sencillo en la mayoría de los métodos de diseño.

Una segunda división de las restricciones las agrupa en restricciones de *igualdad* o *desigualdad*. Las restricciones de igualdad suelen estar asociadas a las relaciones que fijan el comportamiento de la estructura, tales como condiciones de equilibrio, compatibilidad, ley de comportamiento del material, etc. Otras relaciones de igualdad están asociadas a las relaciones entre las variables de diseño del problema (condiciones de simetría, tangencia, curvatura, etc.). Las restricciones de desigualdad suelen estar asociadas con limitaciones impuestas a la respuesta del elemento estructural, tales como tensiones, desplazamientos máximos, frecuencias de vibración, etc., así como, aquellas que delimitan el rango de los valores posibles de las variables.

1.3 OPTIMIZACIÓN DE PROPIEDADES, FORMA, Y TOPOLOGÍA

Los diferentes tipos de optimización estructural dependen de cuáles sean las variables de diseño utilizadas. De los cuatro tipos de variables, el material de la estructura suele plantearse como un parámetro, siendo fijado inicialmente por el diseñador. Quedan pues, como variables de diseño más habituales, las propiedades de la sección, la geometría, y la topología de la estructura. Estos tres tipos de variables son el origen de tres tipos de optimización estructural distintos, cuyas características se pasan a exponer.

En la optimización de *propiedades*, las variables de diseño están asociadas a propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos que componen la estructura (áreas de las barras, momentos de inercia, etc.). Éste es el tipo más sencillo de optimización estructural, y sus fundamentos están bastante establecidos. En el caso de estructuras continuas, las variables de diseño suelen ser los espesores de los elementos. Ahora bien, dado que el análisis suele resolverse mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF), habría que asignar una variable por cada uno de los elementos resultantes de la

división. Lo que obligaría a adoptar, algún tipo de relación, que reduzca el excesivo número de variables de diseño.

En la optimización de *forma*, también denominada de *geometría*, además de las variables empleadas en la optimización de propiedades, son utilizadas variables asociadas a la forma de la estructura. Estas variables controlan la geometría del diseño y requieren a menudo de un modelo de análisis que se readapte durante el proceso de optimización.

El creciente interés por la optimización de forma se debe a dos motivos: en primer lugar, proporciona diseños mucho mejores que la optimización de propiedades; y en segundo lugar, la mayor disponibilidad actual de herramientas de análisis, y optimización que permite resolver de forma más eficiente este tipo de problemas.

Un factor crucial para alcanzar un diseño óptimo es la *topología* de la estructura. Es decir, la definición del número de elementos (o cavidades) que configuran la estructura. En este sentido, la optimización de forma tradicional no resulta válida dado que, en este tipo de problemas el *género topológico* (número de cavidades) del modelo permanece invariable durante la optimización, es decir la topología inicial y final es la misma. Sin embargo, en muchos problemas es conveniente introducir cavidades interiores no existentes en el diseño de partida, a través de las cuales se puede por ejemplo, disminuir el peso de la estructura sin que por ello, se viole obligatoriamente alguna de las restricciones impuestas.

Por tanto, podemos resumir que la diferencia esencial entre la optimización de forma y la optimización de topología es que en la primera la mejora de la función objetivo depende exclusivamente de la forma del contorno para un género dado, y en la optimización de topología depende de la variación del mismo.

1.4 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN PARA ESTRUCTURAS CONTINUAS

Los principios básicos sobre la teoría de la optimización se sitúan cronológicamente entre los siglos XVII y XVIII:

- Galilei (1638): forma óptima de una viga en voladizo, con una carga puntual en su extremo libre.
- Leibniz (1646-1716): cálculo infinitesimal.
- Lagrange (1736-1813): cálculo de variaciones (valores extremos de una función de funciones).
- Hamilton (1808-1865): principio de mínima acción.
- Michell (1904): principios fundamentales para el diseño óptimo de barras de peso mínimo.

Entre los años 1940 y 1950 el trabajo fundamentalmente fue analítico. Schmit y Farshi (1974) estuvieron entre los primeros autores que propusieron una declaración comprensiva sobre las técnicas de programación matemática.

Durante la década de 1970, la optimización de estructuras disfrutó de una intensiva investigación, pero desgraciadamente fueron pocas las aplicaciones prácticas. Francavilla, Ramakrishnan, y Zienkiewicz (1975) propusieron caracterizar la forma óptima con el objetivo de minimizar la concentración de tensiones, a través de parámetros geométricos predefinidos.

Oda (1977) presentó un estudio donde se obtienen las formas óptimas correspondientes a dos problemas planos introduciendo cambios en algunos elementos finitos preseleccionados.

Rodríguez y Sereig (1985) introducen un algoritmo basado en FEA (*Finite Elements Analysis*) donde la forma óptima se alcanza maximizando el empleo del material.

Mattheck y Burkhardt (1990) plantearon un método de optimización basándose en la analogía entre la geometría de la estructura, y el mecanismo de crecimiento del árbol con el objetivo de minimizar las concentraciones de tensiones.

Xie y Steven (1993) presentan un método denominado ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), el cual mediante un sencillo proceso iterativo va retirando el material menos eficiente del diseño.

Bendsøe y Kikuchi (1993) desarrollaron el método de homogenización en el cual un modelo de material con pequeñas cavidades se introduce en el diseño, resolviendo el problema de diseño óptimo mediante la determinación de la porosidad ideal.

En la actualidad, los algoritmos basados en el proceso de la selección natural y evolución biológica (algoritmos evolucionarios) se confirman como la metodología más potente y robusta para el diseño óptimo (Woon, Tong, Querin, y Steven, 2003).

En los sucesivos apartados se elabora una descripción más extensa sobre algunos de estos métodos, así como otras técnicas que establecen el actual marco para la resolución del problema de diseño óptimo en estructuras continuas.

1.4.1 Programación matemática

Las técnicas de programación matemática obtienen la solución al problema de diseño aplicando métodos numéricos de minimización (o maximización) de funciones objetivo, sujetas o no a unas restricciones, siendo las características particulares del problema las que condicionan el método numérico más apropiado.

En la mayoría de las aplicaciones para el diseño óptimo de estructuras la función objetivo consiste en minimizar la masa de la misma, y las restricciones que se le imponen suelen derivarse a causa de limitaciones de tensión, de pandeo, o de desplazamientos en puntos específicos de la estructura.

En función de las características de las variables se tiene la *programación continua*, cuando las variables pueden adoptar cualquier valor, *programación entera*, cuando las variables pueden adoptar únicamente valores enteros, y *programación discreta*, cuando las variables pueden adoptar solamente valores enteros o no, dentro de una gama predefinida.

Otra clasificación se puede realizar atendiendo a la linealidad o no linealidad de las funciones. Si la función objetivo y todas las restricciones son funciones lineales, el problema es de *programación lineal*, en caso de que la función objetivo o alguna de las restricciones no lo fuera, el problema es de *programación no lineal*.

1.4.2 Criterios de optimalidad

Los criterios de optimalidad OC (*Optimality Criteria*) proporcionan soluciones a problemas concretos de optimización, dirigiendo la solución por medio de la aplicación de criterios que se sabe (o se cree) que son apropiados para el problema tratado (Rozvany, 1989).

Algunos criterios de optimalidad presentan un claro sentido físico, tal es el caso del diseño totalmente tensionado FS (*Fully Stressed*), en el que cada elemento de la estructura soporta la tensión máxima, bajo al menos uno de los estados de cargas especificados. El método FS es un diseño óptimo a resistencia, con variables de propiedades de los elementos. Inicialmente, el método no considera otro tipo de restricciones, si bien se puede generalizar para tratar restricciones de desplazamiento. La característica más destacada del método FS es la ausencia de una función objetivo, por tanto no existe una cantidad a minimizar, y no se puede asegurar que un algoritmo FS converja al diseño de mínima masa, ya que no se puede explicitar dicha condición. Para una estructura sometida a un único estado de cargas el método FS ofrece la solución de mínima relación masa/resistencia (Gellatly, 1973). Sin embargo, esta condición no es generalizable para más estados de carga. Esto se debe a que un diseño FS no es único para diferentes estados de cargas. Por tanto, un algoritmo FS puede conducir a una solución óptima en ciertos casos, pero también puede llevar a una solución no óptima, o incluso puede no encontrarse una solución.

El algoritmo FS propuesto por Hinton y Sienz (1995), se resume en los siguientes pasos:

1. Dividir la estructura en un gran número de elementos finitos.
2. Establecer los parámetros de la optimización.
3. Analizar la estructura mediante el método de los elementos finitos.
4. Ordenar los elementos atendiendo a su nivel de tensión.
5. Encontrar y eliminar un número de elementos N , para el cual el valor de la tensión resulta inferior al establecido por un valor de corte.
6. Si el criterio de convergencia es satisfecho (fracción de volumen), finalizar. En caso contrario, continuar en el paso 7.
7. Incrementar el valor de corte, y volver al paso 3.

Tomando como punto de partida el algoritmo desarrollado por Hinton, han aparecido diferentes metodologías que intentan mejorar la eficiencia del procedimiento: CFS (*Constant-weight Fully Stressed*) y VCFS (*Variable element dimension Constant-weight Fully Stressed*) propuestos por Lin y Chao (2001), y PBO (*Performance Based Optimization*) y PBOC (*Performance Based Optimality Criteria*) desarrollados por Liang y Steven (2002).

1.4.3 Método de homogenización

Murat y Tartar (1985), Lurie y Cherkasov (1986), y Kohn y Strang (1986) iniciaron la aplicación del método de homogenización al diseño óptimo de estructuras. Sin embargo, la eficiencia numérica del método fue probada posteriormente (Bendsøe y Kikuchi, 1988), e implementado en programas como PLATO-am (Bulman, Sienz, y Hinton, 2001).

En este método, el volumen que va a ocupar la estructura se divide mediante una malla fija de elementos finitos. El objetivo del método consiste en determinar la microestructura para cada uno de los elementos, de forma que minimice el peso y maximice la rigidez de la estructura.

Existen diferentes tipos de microestructuras o celdas base (Hassani y Hinton, 1999). Una opción común es emplear microestructuras con distintos rangos para cada capa de material. Sin embargo, las estructuras optimizadas sobre la base de una microestructura óptima presentan diseños con una gran cantidad de áreas porosas, lo cual no resulta práctico en la mayoría de las aplicaciones en ingeniería (Rozvany, 1995).

1.4.4 Métodos de distribución de material sin homogenización

Existe otro conjunto de métodos que resuelven la distribución de material sin tener que recurrir a un modelo de microestructuras, para ello se emplea un material ficticio cuya densidad se convierte en una variable de diseño. Esta es la idea que básicamente se repite en los métodos propuestos por Rossow y Taylor (1973), Yang y Chuang (1994), Maute y Ramm (1994), Zhou (1991), y Bendsøe (1995).

El método SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) es el método de máxima rigidez más extendido en la actualidad (Bendsøe, 1999; Muiños, 2001; Navarrina, Muiños, Colominas y Casteleiro, 2002). En esta formulación existe una variable de diseño (densidad relativa) por elemento, cuyo valor adimensional puede presentar cualquier valor comprendido entre “0” y “1”. Donde “0” significa la ausencia de material y “1” cuando es completamente sólido.

El objetivo del método SIMP es determinar los valores de las variables, es decir, la cantidad de material que hay que disponer por elemento de forma que, minimice una función objetivo (energía de deformación) con una sola restricción, la cantidad total de material está acotada superiormente por un porcentaje, denominado factor de llenado, del volumen del dominio. Sin embargo, y a pesar de las aparentes ventajas, se producen de forma sistemática inestabilidades numéricas que dificultan la convergencia, produciendo configuraciones en forma de tablero de ajedrez (*checkerboard*). Por ello, es habitual imponer penalizaciones o restricciones adicionales, tanto para estabilizar la solución como, para impedir la existencia de valores intermedios de densidad relativa (carentes de una correlación física). Por último, al resultado obtenido se le suele aplicar un filtro de imagen con el objeto de favorecer su interpretación.

Los diseños resultantes, tras todas estas correcciones, reproducen en muchas ocasiones modelos de estructuras de barras (Bendsøe y Sigmund, 2003). Sin embargo, la bondad de las soluciones es por lo menos discutible, ya que dependen de numerosos parámetros (factor de llenado, discretización de la malla, penalizaciones, filtros de imagen, etc.).

1.4.5 Optimización sin un modelo de material

Existen otros métodos alternativos, mucho más intuitivos y fáciles de implementar que los métodos de homogenización, y de distribución de material. Estos métodos producen de un

modo sencillo, formas y topologías optimizadas, aunque se conoce, que la calidad de las soluciones depende del tamaño del elemento. A continuación, se describen los principales métodos, en ausencia de un modelo de material, que se emplean con más frecuencia para la optimización de estructuras.

1.4.5.1 Optimización estructural evolucionaria

La optimización estructural evolucionaria se basa en que, mediante una progresiva y lenta eliminación del material menos eficiente de la estructura, la forma (y/o topología) de la misma evoluciona hacia el óptimo.

Xie y Steven (1993) introdujeron el método ESO, el cual, mediante un criterio de rechazo, elimina una pequeña cantidad de material en cada iteración. En su forma original, el método ESO determina la eficiencia del material, a partir de la tensión en los elementos. Es decir, si un elemento presenta una tensión (generalmente de Von Mises) mínima, el elemento es ineficiente. Desde el punto de vista ingenieril, el método presenta las siguientes ventajas: facilidad de programación, y un acoplamiento rápido con programas de elementos finitos.

Los pasos que definen el método ESO, son:

1. Decidir el volumen que la estructura original va a ocupar.
2. Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
3. Aplicar las cargas y las condiciones de apoyo.
4. Establecer las propiedades del material.
5. Definir el criterio a optimizar. Generalmente, la tensión de Von Mises.
6. Analizar la respuesta de la estructura.
7. Eliminar los elementos que satisfacen la inecuación ESO, Ec. (1.2).

$$\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR \sigma_{vm,e}^{max} \quad (1.2)$$

$$RR = a_0 + a_1 SS + a_2 SS^2$$

donde

| | |
|-----------------------|--|
| $\sigma_{vm}^{(e)}$ | tensión de Von Mises para el elemento e . |
| $\sigma_{vm,e}^{max}$ | máxima tensión de Von Mises en los elementos. |
| RR | ratio de rechazo. |
| a_0, a_1, a_2 | coeficientes a partir de la experiencia con ESO. |
| SS | número de óptimos locales. |

8. Si en una iteración no se eliminan nuevos elementos, se aumenta en una unidad el valor del número SS .
9. Repetir los pasos 6 a 8, hasta satisfacer el criterio de parada, RR_{max} .

Aunque originalmente el método ESO no fue concebido para la optimización de forma (Nibbling ESO), el procedimiento se puede adaptar rápidamente. Para ello solo debemos reemplazar el paso 6 anterior, por:

6. Eliminar aquellos elementos que satisfacen la Ec. (1.2), y que tienen al menos uno de sus lados no conectado a otros elementos.

1.4.5.2 Optimización estructural evolucionaria aditiva

Como su propio nombre sugiere en la optimización estructural evolucionaria aditiva ((AESO) *Additive Evolutionary Structural Optimization*), los elementos se incorporan a la estructura en aquellas regiones donde resultan necesarios (Querin, Steven, Xie, 2000), de forma similar a la eliminación de los elementos en el método ESO.

Los pasos que definen el método AESO, son:

1. Decidir el volumen máximo que la estructura puede ocupar.
2. Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
3. Aplicar las cargas y las condiciones de apoyo.
4. Establecer las propiedades del material.
5. Disponer un número de elementos mínimo capaz de conectar los soportes de la estructura con las cargas aplicadas.
6. Definir el criterio a optimizar. Generalmente, la tensión de Von Mises.
7. Analizar la respuesta de la estructura.
8. Añadir los elementos que satisfacen la inecuación AESO, Ec. (1.3).

$$\sigma_{vm}^{(e)} \geq IR \sigma_{vm,e}^{max} \quad (1.3)$$

$$IR = a_0 - a_1 SS - a_2 SS^2$$

donde

| | |
|-----------------------|---|
| $\sigma_{vm}^{(e)}$ | tensión de Von Mises para el elemento e . |
| $\sigma_{vm,e}^{max}$ | máxima tensión de Von Mises en los elementos. |
| IR | ratio de inclusión. |
| a_0, a_1, a_2 | coeficientes a partir de la experiencia con AESO. |
| SS | número de óptimos locales. |

9. Si en una iteración no se añaden nuevos elementos, se aumenta en una unidad el valor del número SS .
10. Repetir los pasos 7 a 9, hasta satisfacer el criterio de parada, IR_{min} .

1.4.5.3 Optimización estructural evolucionaria bidireccional

El método ESO proporciona soluciones óptimas (Chu, 1996), y esto se debe en parte, al lento pero progresivo proceso iterativo. Sin embargo, si el dominio presenta una malla densa ó es un modelo tridimensional, el coste computacional puede ser bastante elevado (Young, Querin, Steven, y Xie, 1998). Con el propósito de mejorar tanto la eficacia, como la eficiencia del método ESO surge el método bidireccional BESO (*Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization*), en el cual los elementos de la estructura pueden ser eliminados (método ESO)

o añadidos (método AESO). La combinación de estas dos metodologías bajo las siglas BESO, consigue reducir en cantidades significativas el tiempo total de la optimización (Young, Querin, Steven, y Xie, 1999). Sin embargo, cuando ambos métodos son combinados para que trabajen de forma conjunta, algunas de sus ecuaciones deben ser modificadas, con el objetivo de que ambas metodologías funcionen de forma correcta.

Los pasos que definen el método BESO, son:

1. Decidir el volumen máximo que la estructura puede ocupar.
2. Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
3. Aplicar las cargas y las condiciones de apoyo.
4. Establecer las propiedades del material.
5. Disponer un número de elementos mínimo capaz de conectar los soportes de la estructura con las cargas aplicadas.
6. Definir el criterio a optimizar. Generalmente, la tensión de Von Mises.
7. Analizar la respuesta de la estructura.
8. Eliminar los elementos que satisfacen la inecuación ESO, y añadir los elementos que cumplen la inecuación AESO.

$$\begin{aligned} \sigma_{vm}^{(e)} &\leq RR \sigma_{vm,e}^{max} \\ \sigma_{vm}^{(e)} &\geq IR \sigma_{vm,e}^{max} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$RR = a_0 + a_1 SS + a_2 SS^2 + a_{RR} NO$$

$$IR = a_0 - a_1 SS - a_2 SS^2 - a_{IR} NO$$

donde NO es el número de oscilación, y a_{RR}, a_{IR} constantes determinadas por la experiencia con BESO.

11. En el caso de que no se añadan, ni se eliminan elementos, se aumenta en una unidad el valor del número SS .
12. Si se llega a un estado de oscilación en el cual, grupos de elementos son eliminados en una iteración, y reintroducidos en la siguiente, el número NO se aumenta en una unidad.
13. Repetir los pasos 7 a 12, hasta satisfacer el criterio de parada, IR_{min}, RR_{max} .

1.4.5.4 Optimización estructural evolucionaria morfológica

En ocasiones, una de las variables a optimizar en el diseño de una estructura es el espesor. El método ESO clásico no está preparado para incluir este tipo de variables, ya que en su formulación básica el elemento solo puede presentar dos alternativas, estar presente o no. Sin embargo, si en vez de utilizar un esquema binario, empleamos para definir el elemento un conjunto de variables discretas mucho mayor, el método ESO en vez de eliminar el elemento por completo, lo realiza de forma gradual (Querin, 1999). Esta variación del método ESO se

denomina optimización estructural evolucionaria morfológica ((MESO) *Morphing Evolution Structural Optimization*).

Los pasos que definen el método MESO, son:

1. Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
2. Aplicar las cargas y las condiciones de apoyo.
3. Establecer las propiedades del material.
4. Definir el criterio a optimizar. Generalmente, la tensión de Von Mises.
5. Establecer el conjunto de valores discretos x_i , donde x_1 es el valor discreto inicial, pudiendo intercambiarse por x_2 , y así sucesivamente hasta x_n .

$$\mathbf{x}_{i=1,\dots,n} = \{ x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n \} \quad (1.5)$$

6. Analizar la respuesta de la estructura.
7. Determinar el conjunto de elementos que satisfacen la Ec. (1.1), y sustituir sus valores discretos x_i por x_{i+1} .
8. Si en una iteración no se produce ningún intercambio en los valores discretos, se aumenta en una unidad el valor del número SS .
9. Repetir los pasos 6 y 8, hasta satisfacer el criterio de parada, RR_{max} .

1.4.5.5 Optimización estructural evolucionaria en grupo

La optimización estructural evolucionaria en grupo ((GESO) *Group Evolutionary Structural Optimization*) optimiza conjuntos estructurales, proporcionando el número de componentes, la situación, y los espesores (o alturas) óptimos (Lencus, Querin, Steven, y Xie, 1999, 2002).

1.4.5.6 Creación inteligente de cavidades

A menudo, el ingeniero y/o diseñador se ven en la obligación de optimizar una estructura, atendiendo a variables de diseño que no son de tipo estructural (condicionantes estéticos, funcionales, fabricación, etc.). Por lo que, un método para el diseño óptimo de estructuras debería poder incluir restricciones no estructurales, si se pretende que los diseños obtenidos se apliquen a casos prácticos.

Las últimas investigaciones han demostrado que el método ESO permite incluir con éxito todo tipo de elementos finitos, múltiples estados de carga, análisis no lineales, etc. Sin embargo, hasta ahora no se había podido incorporar en esta metodología restricciones de tipo no estructural (p. Ej. el número de cavidades).

Un primer intento para controlar el número de cavidades en el óptimo es el llamado método del perímetro. Propuesto por Haber (1996), y basado en el método de homogenización (Bendsøe, 1995), este método controla el número de cavidades, restringiendo la longitud total del perímetro. De modo que, las estructuras con perímetros pequeños presentan un número mínimo de cavidades (pero de gran tamaño), aumentando en número, y disminuyendo su tamaño en el caso de que el perímetro total aumente.

A partir de la extensión y modificación del método ESO, el método para la creación inteligente de cavidades ((ICC) *Intelligent Cavity Creation*) tiene como objetivo, obtener el diseño óptimo de una estructura para un número determinado de cavidades (Kim, Querin, Steven, Xie, 2000).

El método ICC optimiza el diseño mediante la eliminación de un pequeño número de elementos en cada iteración. El procedimiento seguido por el método ICC establece que, en cada iteración los elementos que en primer lugar deben ser eliminados son los situados en el contorno de la estructura (Nibbling ESO). A continuación, se contempla la posibilidad de introducir una nueva cavidad mediante la valoración del índice ICC. En caso afirmativo, los elementos retirados serán los interiores al contorno (Classic ESO). Y en caso contrario, se continúa eliminando los elementos situados en el contorno de la estructura.

Al igual que ocurre con el método ESO, el método ICC carece de una formulación matemática que apoye este procedimiento. Sin embargo, cuando se aplica al conjunto de los problemas clásicos en optimización, obtenemos una gama de soluciones óptimas, donde el número de cavidades puede ser controlado.

1.4.6 Adaptatividad inversa

A diferencia del método ESO, en el método de la adaptatividad inversa ((RA) *Reverse Adaptivity*) los elementos de menor tensión no son eliminados directamente de la estructura.

En el método RA (Reynolds, McConnachie, Bettess, Christie, y Bull, 1999), tanto la estructura inicial como las estructuras optimizadas se definen a partir de una malla de elementos finitos. Mediante el análisis de la estructura obtenemos el valor de las tensiones principales en los nodos de la malla, a partir de las cuales se obtienen las tensiones de Von Mises en los elementos. A continuación, se ordenan los elementos según el valor de su tensión, dividiendo el tamaño de aquellos elementos cuya tensión resulta inferior o igual a una tensión de referencia (*threshold stress*). Tras el refinamiento de los elementos, la estructura se analiza identificando de nuevo los elementos, cuya tensión es inferior a la de referencia pero, con la diferencia que, en esta segunda fase del método los elementos sí son eliminados.

Destacar que el método RA es capaz de generar diseños (Reynolds, Christie, Bettess, McConnachie, y Bull, 2001) con detalles extremadamente bien definidos, siendo su principal inconveniente: el elevado coste asociado al proceso de remallado.

1.4.7 Métodos basados en el crecimiento biológico

El estudio de las estructuras biológicas (huesos, anillos de crecimiento, etc.) revela que existe una fuerza impulsora que conduce los mecanismos de crecimiento hacia estados de tensión constante (*constant stress axiom*).

A raíz de estas observaciones, Mattheck (1990) desarrolló un método al que denominó CAO (*Computer Aided Optimization*) capaz de simular el crecimiento biológico con el propósito de optimizar estructuras. De modo que, los elementos con un nivel de tensión elevado, aumentan su volumen (*swelling*) reproduciendo la agregación de material. Mientras

que, los elementos con niveles de tensión inferior ven decrecer su volumen (*shrinkage*), simulando con ello la sustracción de material.

En la actualidad, existen muchos métodos de optimización asistidos por ordenador, por lo que el procedimiento se ha renombrado como BGSO (*Biological Growth Structural Optimization*), lo que traducido significaría optimización de estructuras mediante crecimiento biológico.

El método BGSO se desarrolló originalmente para optimizar estructuras sujetas a un solo estado de carga. Sin embargo, Querin y Lencus (1998) demuestran que al igual que las estructuras biológicas crecen óptimamente frente a múltiples cargas, un método que simula las reglas biológicas también puede adaptar su metodología.

1.4.8 Métodos de optimización por enjambre de partículas

La optimización mediante enjambres de partículas ((PSO) *Particle Swarms Optimization*) es un método estocástico inspirado en el comportamiento social de algunas especies (pájaros, peces, etc.). Este método fue propuesto por Kennedy y Eberhart (1995), modificado por Shi y Eberhart (1998), y posteriormente utilizado por Fourie y Groenwold (2000) para el diseño óptimo de forma y topología.

Los aspectos del comportamiento social que motivaron el desarrollo del método PSO están inmersos en reglas que permiten que un grupo de pájaros que viajan de forma sincronizada, cambie rápidamente de dirección, se disperse, o se vuelva a reagrupar. Pájaros, peces, hormigas, y abejas son ejemplos de partículas que forman grupos sociales, y adaptan su comportamiento (y movimientos físicos) para buscar alimento, emparejarse, etc.

Los individuos intercambian información a cerca de su posición, velocidad, y nivel de bienestar. Surgiendo la posibilidad, que algunas de estas partículas abandonen sus grupos para explorar regiones con mejores niveles de bienestar.

Los resultados obtenidos por Fourie y Groenwold (2001), aún no satisfacen por completo, pero muestran un procedimiento con muchas posibilidades de desarrollo, principalmente por su carácter evolutivo, su aplicación en sistemas distribuidos, y la cantidad de partículas que pueden mimetizar el comportamiento social.

1.4.9 Solidificación simulada

Solidificación simulada, agregación simulada, o recocido simulado son algunas de las traducciones para *Simulated Annealing* (SA). El origen del método SA se sitúa en la física estadística, y fue introducido por Metropolis (1953).

El procedimiento físico para la solidificación controlada conlleva el calentamiento de un sólido (o un líquido), para posteriormente ser enfriado hasta cristalizar en una estructura perfecta (sin malformaciones locales), con un nivel de energía inferior al inicial.

La idea de que este proceso físico pudiera ser aprovechado para resolver problemas de optimización fue propuesta de forma independiente por Kirkpatrick, Gellat, y Vecchi (1983) y Cerny (1985), quedando patente el paralelismo entre minimizar la función objetivo, y la disminución de energía durante el proceso de la solidificación (Hasançebi y Erbatur, 2002).

1.4.10 Método de burbuja

Eschenauer (1990) y sus colaboradores proponen un nuevo método para la optimización de topología, y al que denominaron método de burbuja (*Bubble method*). El procedimiento se basa en introducir pequeñas burbujas (poros o agujeros) en aquellas regiones de la estructura donde el nivel de tensión es inferior. El principal inconveniente del método reside en las dificultades que presenta implementar un algoritmo que obtenga eficazmente el número de burbujas y la posición que deben ocupar. Eschenauer (1994) y (Olhoff y Eschenauer, 1999) insisten en que el método es particularmente atractivo de cara a la fabricación de un diseño, ya que este se genera a partir de formas geométricas muy suavizadas.

1.4.11 Método de la curva de nivel

El método de la curva de nivel ((LSM) *Level Set Method*) ha experimentado un gran auge en estos últimos años (Alexandrov y Santosa, 2004; Yulin y Xiaoming, 2004). Propuesto por Sethian y Wiegmann (1999), son muchos los trabajos que demuestran como acoplar el método de las diferencias finitas ((FDM) *Finite Difference Method*) y el método de los elementos finitos. Comparado con el método SIMP, este procedimiento plantea un nuevo enfoque para conseguir el movimiento del contorno durante la optimización. En el método de la curva de nivel, la estructura se representa a través de una función alisada de alto orden cuyo contorno de nivel cero coincide con la topología de la estructura. La diferencia entre estos dos métodos es, que el método SIMP calcula la sensibilidad para cada elemento, y modifica la topología mediante la actualización de las densidades de los elementos, mientras que con el método LSM, la sensibilidad es para la estructura completa, y el movimiento de los contornos es introducido mediante el desarrollo de la superficie de nivel.

1.4.12 Algoritmos evolucionarios

En 1859, el naturalista Charles Darwin¹ definió el concepto de selección natural como un proceso en el cual se preservan las diferencias individuales favorables y se erradican aquellas que son perjudiciales. El origen de la computación evolutiva (CE), es decir, el estudio de los fundamentos y aplicaciones de ciertas técnicas heurísticas de búsqueda basadas en los principios naturales de la evolución, se establece en los años 1950, con los trabajos de Box (1957), Friedman (1959), Bledsoe (1961), y Bremermann (1962).

Desafortunadamente, este campo permaneció en el desconocimiento (ausencia de un soporte computacional), hasta que los trabajos de Rechenberg (1965), Fogel, Owens y Walsh (1966), y Holland (1975) comenzaron a cambiar lentamente este escenario.

El principio de la CE consiste en evolucionar una población de individuos (candidatos a ser la solución de un problema conocido) utilizando operadores inspirados en la selección

¹ Charles Darwin nació en Shrewsbury el 9 de febrero de 1809. Al finalizar sus estudios en la escuela de Shrewsbury, ingresó en la Universidad de Edimburgo para cursar medicina. Abandonó esta carrera en 1827, y comenzó estudios de teología en la Facultad de Estudios Cristianos, en la Universidad de Cambridge. A fines del siglo XVIII, la teoría de la evolución se gestaba entre los naturalistas. El 24 de noviembre de 1859 Charles Darwin publicó "El origen de las especies", cuya primera edición se agotó ese mismo día.

natural y en la variación genética. Históricamente, los principales algoritmos evolucionarios desarrollados hasta el momento son: estrategias evolucionarias, programación evolucionaria, algoritmos genéticos, y programación genética. Además de los cuatro anteriores, existe una gran variedad de técnicas mixtas, tales como: algoritmos messy GA (Goldberg, Korb y Deg, 1989), CHC (Eshelman, 1991), structured GA (Dasgupta y MacGregor, 1991), breeder GA (Mühlenbein y Schlierkamp-Voosen, 1993), etc.

1.4.12.1 Estrategias evolutivas

El método de las estrategias evolutivas ((ES) *Evolution Strategies*) fue desarrollado por Rechenberg (1965). A diferencia del resto de los algoritmos evolucionarios, el método ESs fue concebido como un procedimiento para la optimización numérica.

Las ESs pueden incorporar en su algoritmo (y en este orden) los siguientes operadores: (1) recombinación, (2) mutación, y (3) selección. Siendo habitual:

- Representación: vectores de valores reales
- Recombinación: discreta o intermediaria.
- Mutación: perturbación Gaussiana.
- Selección de los progenitores: aleatoria uniforme.
- Selección de los descendientes: modelos² (μ, λ) , $(\lambda + \mu)$, (μ, λ, θ) .

1.4.12.2 Programación evolucionaria

A mediados de los años 1960, el método de la programación evolucionaria ((EP) *Evolutionary Programming*) fue concebido por Fogel (1966), y posteriormente revisado por su hijo (Fogel, 1992, 1995). El interés de Fogel se concentró en la simulación del comportamiento inteligente (*machine learning*) empleando para ello, máquinas FSM (*Finite State Machines*) capaces de aprender una secuencia de símbolos, para predecir los siguientes.

El procedimiento es similar al utilizado por las estrategias evolutivas (excluyendo la recombinación), estableciendo la mutación (Gaussiana) como principal operador de búsqueda.

La programación evolucionaria usa normalmente selección estocástica, mientras que las estrategias evolutivas utilizan selección determinística. Ambas técnicas operan a nivel fenotípico (es decir, no requieren la codificación de las variables del problema).

La programación evolucionaria es una abstracción de la evolución al nivel de las especies, por lo que no se requiere el uso de un operador de recombinación (diferentes especies no se pueden cruzar entre sí). En contraste, las estrategias evolutivas son una abstracción de la evolución al nivel de un individuo, por lo que la recombinación es posible.

² La versión original usaba un solo padre, y con él se generaba un solo hijo. Este hijo se mantenía si era mejor que el padre, o de lo contrario se eliminaba (a este tipo de selección se le llama *extintiva*, porque los peores individuos obtienen una probabilidad de ser seleccionado de cero).

1.4.12.3 Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos ((GAs) *Genetic Algorithms*) están basados en la evolución de los organismos vivos. Es decir, que una población de individuos evoluciona de acuerdo con los principios (postulados por Darwin) de selección natural, y supervivencia de los más fuertes.

Los principios básicos sobre los algoritmos genéticos fueron establecidos por Holland (1975), y se encuentran recogidos en multitud de textos: Goldberg (1989), Davis (1991), Michalewicz (1992), y Reeves (1993).

Koza (1992), propone una definición bastante completa de algoritmo genético:

« Es un algoritmo matemático altamente paralelo que transforma un conjunto de objetos matemáticos individuales con respecto al tiempo, usando operaciones modeladas de acuerdo al principio Darwiniano de reproducción y supervivencia del más apto, y tras haberse presentado una serie de operaciones genéticas entre las que se destaca la recombinación sexual. Cada uno de estos objetos matemáticos suele ser una cadena de caracteres (letras o números) de longitud fija que se ajusta al modelo de las cadenas de cromosomas, y se les asocia con una cierta función matemática que refleja su aptitud ».

El algoritmo genético utiliza una selección probabilística, al igual que la programación evolucionaria, y en contraposición a la selección determinística de las estrategias evolutivas. El GA utiliza generalmente la representación binaria para la codificación de los individuos, por lo que se evoluciona el genotipo, y no el fenotipo como en la programación evolucionaria o en las estrategias evolutivas.

El operador principal en el GA es el cruce, y la mutación es un operador secundario. En la programación evolucionaria, no existe cruce, y en las estrategias evolutivas es un operador secundario.

1.4.12.4 Programación genética

Derivada de los algoritmos genéticos, y propuesta por Koza (1992, 1994), la programación genética ((GP) *Genetic Programming*) es una rama de la computación evolutiva en la cual, los individuos que componen la población son programas ejecutables, organizados en forma de árboles sintácticos.

El proceso de optimización comienza con la definición de las funciones necesarias para realizar el programa. A continuación, se genera una población inicial de árboles que utilizan estas funciones. Sobre esta población se aplican los operadores (utilizados en los GAs): selección, cruce, y mutación. El operador cruce funciona intercambiando subárboles entre distintas soluciones, la mutación modifica de forma aleatoria alguno de los nodos, y para la selección de los individuos que sobreviven a la siguiente generación se utiliza (al igual que en un GA) una función de evaluación que comprueba los resultados obtenidos.

1.4.13 Algoritmos de optimización híbridos

La idea de hibridar un método para compensar sus carencias, se lleva estudiando bastante tiempo. La gran variedad de algoritmos dificulta en ocasiones la construcción de algoritmos

híbridos. En este sentido, Davis (1991) es pionero en intentar definir una metodología para abordar la resolución de problemas mediante algoritmos híbridos.

Cotta (1998) propone una clasificación general en la cual, se distinguen dos enfoques: (1) aquellos que modifican internamente alguno de los componentes básicos del algoritmo, y (2) los que combinan diferentes algoritmos a alto nivel. El primero de los mecanismos se denomina *hibridación fuerte* (Woo, Kwon, y Tahk, 2004), y el segundo *hibridación débil*.

Entre los diferentes criterios para clasificar los métodos de hibridación débil podemos utilizar la propia naturaleza de los algoritmos combinados. Así pues, podemos obtener algoritmos deterministas, heurístico/determinista, y heurísticos.

Papadrakakis (1991) combina estrategias evolucionarias con programación secuencial cuadrática. Waagen, Diercks, y McDonell (1992) emplean la programación evolucionaria y el método de las direcciones de Hooke-Jeeves. Van Le (1995) propone una combinación entre lógica difusa (*fuzzy logic*) y la programación evolucionaria. Kim y Myung (1997) proponen una combinación entre un método de optimización evolucionario y una función lagrangiana aumentada (*augmented lagrangian*). Vargas, Torres, y Ruiz (2002) combinan un algoritmo genético y un algoritmo de solidificación simulada. Woon, Tong, Querin y Steven (2003) utilizan algoritmos genéticos múltiples (Multi-GA). Casillas, Cordon, Herrera, y Villar (2004), y Ming y Qiang (2005) presentan un modelo coevolucionario basado en la combinación de un algoritmo genético y un algoritmo mediante colonias de hormigas.

1.5 DISCUSIÓN DE LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

En estos últimos años, los algoritmos basados en la evolución biológica de los organismos, se han confirmado como un procedimiento de búsqueda potente y robusto. La aplicación extendida de la computación evolutiva a la optimización de estructuras se debe en parte a los problemas encontrados en los métodos tradicionales, incluyendo la programación matemática y los criterios de optimalidad, cuando se aplican en problemas cuyos espacios de diseño son bastante complicados.

En la actualidad existen tres grandes aproximaciones para la resolución del problema de optimización formulado en la Ec. (1.1):

- Métodos indirectos.
- Métodos formales.
- Métodos heurísticos.

La primera aproximación es la formada por los métodos indirectos (ESO, AESO, BESO, ICC, GESO, MESO, RA, OC, FS, etc.). El objetivo de dichos métodos es obtener un diseño que satisfaga un criterio específico, y que a su vez, implica el cumplimiento del objetivo buscado. El criterio utilizado puede ser intuitivo, o deducido matemáticamente de las características particulares del problema.

La segunda aproximación (programación matemática) es más general. En lugar de basarse en aspectos “físicos” del problema, trata de llegar a una formulación matemática del mismo, intentando que dicha formulación matemática sea general.

La coexistencia de ambas tendencias se debe a que los resultados obtenidos con los métodos indirectos dependen del problema y no pueden ser generalizados, por lo que se requiere un método para cada tipo de problema, y un mínimo de experiencia para elegir el método apropiado. Por el contrario, los métodos desarrollados hasta la fecha a partir de la formulación matemática son capaces de resolver problemas generales, pero resultan menos eficientes que los métodos indirectos para los casos en que estos últimos tienen solución.

Uno de los inconvenientes de la programación matemática es que suele requerir información que no siempre está disponible. Por ejemplo, métodos como el del gradiente conjugado requieren de la primera derivada de la función objetivo. Otros métodos, como el de Newton, requieren además de la segunda derivada. Por tanto, si la función objetivo no es diferenciable (y en algunos casos, ni siquiera está disponible en forma explícita), estos métodos no pueden aplicarse.

La tercera aproximación está formada por los métodos heurísticos (PSO, SA, ESs, EP, GP, GAs, etc.). Los algoritmos genéticos son los que disponen de una mayor base teórica, y están biológicamente mejor adaptados. Hay que tener en cuenta que la formulación de un algoritmo genético es independiente del problema, lo cual lo hace un algoritmo robusto, por ser útil para cualquier problema, pero a la vez débil, por no estar especializado. Los GAs se diferencian del resto de las aproximaciones por:

- Ser algoritmos sencillos, y fáciles de implementar en máquinas paralelas.
- No necesitar un conocimiento específico del problema a resolver.
- Considerar de forma simultánea varias soluciones, en vez de trabajar de forma secuencial (punto a punto) como en los métodos tradicionales, siendo menos sensibles a los óptimos locales.
- Presentar un adecuado balance entre exploración y explotación de las soluciones.
- Trabajar con variables de diseño codificadas, lo que permite utilizar variables de tipo continuo, discreto, entero, o ambas.
- Considerar solo una función de aptitud, y no necesitar sus derivadas.
- Utilizar operadores probabilísticos (no determinísticos), consiguiendo una búsqueda ampliamente exploratoria, lo que no significa que operen de manera análoga a una simple búsqueda aleatoria.

La potencia de los algoritmos genéticos proviene del hecho de que se trata de una técnica robusta, pudiendo tratar una gran variedad de problemas, incluyendo aquellos en los que otros métodos encuentran dificultades. Si bien no se garantiza que el algoritmo genético encuentre la solución óptima, la experiencia con estos algoritmos demuestra que se obtienen soluciones aceptables, con un coste computacional relativamente competitivo.

1.6 OBJETIVOS DE LA TESIS

El objetivo principal de esta tesis es el desarrollo e implementación de un nuevo procedimiento que permita la optimización simultánea de forma y topología de estructuras continuas bidimensionales. El proceso de optimización es dirigido por un algoritmo genético el cual, a través de las isolíneas del problema define la forma, el número, y la distribución de

cavidades. Mientras que el análisis de la estructura se realiza con una malla fija de elementos finitos. Resaltar que en esta tesis, el esfuerzo invertido se ha encaminado a la implementación de una nueva metodología para la optimización conjunta de forma y de topología. El interés principal de esta tesis no se centra ni en el estudio de los algoritmos genéticos, ni en el empleo particular del método de los elementos finitos, si no profundizar en la integración, resultados, y perspectivas de esta nueva aplicación para la optimización forma y topología de estructuras continuas.

El trabajo desarrollado en esta tesis contempla los siguientes objetivos parciales:

- Implementar un algoritmo para el análisis de estructuras continuas bidimensionales mediante el método de la malla fija.
- Implementar un algoritmo para la optimización de forma de estructuras continuas, empleando algoritmos genéticos, y una malla fija de elementos finitos para el análisis.
- Aplicar el algoritmo de optimización de forma. Analizar y comparar los resultados obtenidos con la bibliografía más reciente.
- Desarrollar e implementar un algoritmo para la optimización de topología de estructuras continuas a partir de las isolíneas del problema, y una malla fija de elementos finitos para el análisis.
- Aplicar el algoritmo para la optimización de topología con isolíneas, y malla fija. Analizar y comparar los resultados obtenidos con la bibliografía más reciente.
- Desarrollar e implementar un algoritmo para la optimización de topología empleando algoritmos genéticos, las isolíneas del problema, y una malla fija de elementos finitos.
- Aplicar el algoritmo para la optimización de topología con algoritmos genéticos, isolíneas y malla fija. Analizar y comparar los resultados obtenidos con los algoritmos anteriores y con la bibliografía más reciente.

1.7 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

La tesis se ha estructurado en siete capítulos y dos apéndices, incluyendo este primer capítulo introductorio.

En el capítulo 1 se ha realizado una introducción general al diseño óptimo de estructuras, describiendo de forma más extensa los principales métodos empleados para la optimización de estructuras continuas. Así como los objetivos y organización de esta tesis.

En el capítulo 2 se realiza una introducción al análisis por elementos finitos con malla fija, describiendo los fundamentos, y la formulación utilizada para el análisis de estructuras continuas bidimensionales.

El capítulo 3 está dedicado al diseño óptimo de estructuras con algoritmos genéticos, exponiendo los fundamentos biológicos y matemáticos de los algoritmos genéticos. Así como su aplicación al diseño óptimo de estructuras continuas.

El capítulo 4 está dedicado al método implementado para la optimización de forma de estructuras continuas en problemas bidimensionales.

En el capítulo 5 se presenta la metodología desarrollada para el diseño óptimo de topología mediante las isolíneas del problema.

El capítulo 6 describe el método desarrollado para la optimización de topología con algoritmos genéticos, isolíneas y malla fija.

El capítulo 7 recoge las conclusiones que se derivan de la tesis, y algunas sugerencias para trabajos futuros.

El Apéndice A muestra la organización general de la aplicación desarrollada para esta tesis, describiendo brevemente su diagrama de flujo, y una lista de las principales subrutinas programadas.

En el Apéndice B se describe brevemente la interfase de la aplicación, así como las principales características de sus ficheros.

Finalmente, la memoria de la tesis se concluye con las referencias bibliográficas. Dichas referencias se citan en la tesis con el apellido de los autores, y el año de la publicación, recogiendo alfabéticamente al final del texto de forma completa.

Capítulo 2

Análisis de estructuras por elementos finitos con malla fija

2.1 INTRODUCCIÓN

El análisis por elementos finitos (EF) ha jugado un papel crucial en el desarrollo del diseño mecánico, y seguramente constituye hoy en día la herramienta de cálculo más potente para la resolución de problemas de análisis en mecánica estructural y mecánica de sólidos, con aplicaciones en numerosas ramas de la ingeniería (civil, mecánica, aeronáutica, eléctrica, aeroespacial, etc.). En la tabla 2.1 se recogen algunas de aplicaciones de este método.

Tabla 2.1 Aplicaciones del método de los elementos finitos en ingeniería

| Campos de Estudio | Equilibrio | Autovalores | Propagación |
|--|--|---|--|
| Ingeniería estructural Ingeniería mecánica Ingeniería aeroespacial | Análisis de vigas, placas, láminas. Análisis bi y tridimensional de tensiones | Estabilidad de estructuras. Frecuencias naturales y modos de vibración de estructuras | Propagación de ondas de tensión. Respuesta dinámica de estructuras. Problemas viscoelásticos |
| Mecánica de suelos Ingeniería de cimentaciones y mecánica de rocas | Análisis bi y tridimensional de tensiones. Problemas de excavaciones. Interacción suelo/estructura | Frecuencias naturales y modos de vibración de combinaciones suelo/estructura | Propagación de ondas de tensión en medios porosos deformables. Interacción dinámica suelo/estructura |

La mayoría de los métodos de optimización emplean el método de los elementos finitos para el análisis de la estructura. Durante el proceso de optimización, el diseño original puede sufrir cambios que afectan tanto a su forma como a su topología. Cambios que obligan a revisar la forma de los elementos de la malla, para evitar su excesiva distorsión, y el deterioro general de los resultados obtenidos del análisis.

En contraste con esta situación, las primeras etapas del proceso de diseño solo requieren estimaciones de la rigidez y el estado tensional del diseño. Por tanto, la disponibilidad de una estimación rápida y fiable acerca del comportamiento estructural mejoraría las posibilidades de búsqueda y exploración dentro del espacio de diseño.

Una alternativa, al método clásico de los EF es el Método de los Elementos de Contorno ((BEM) *Boundary Element Method*) cuyas ventajas se derivan directamente del menor número de elementos, y la mayor precisión con la que se obtienen los resultados en el contorno de la estructura.

Las primeras aplicaciones del método BEM se desarrollaron en el campo de la optimización de forma, Zochowski y Mizukami (1983), Mota Soares y Choi (1986), Kamiya y Kita (1987), Zhao y Adey (1989). Por el contrario, y a pesar de las supuestas ventajas del método, se han demostrado comportamientos erráticos (Haftka y Grandhi, 1986) que devuelven un mayor grado de fiabilidad al método de los elementos finitos.

La segunda alternativa, es el método de la Malla Fija ((FG) *Fixed Grid*), introducido por García y Steven (1997). Este método se basa en que los cambios que se producen en el medio son capturados numéricamente mediante la modificación de las propiedades de sus elementos. Para ello, el método FG superpone una rejilla de elementos finitos sobre la estructura. La identificación de los elementos que se encuentran dentro o fuera de la estructura, transforma el problema en otro equivalente con diferentes materiales. Las principales ventajas de la malla fija son la simplicidad y la velocidad. Lo que hace que, el método resulte muy interesante para su aplicación en el campo de la optimización de estructuras (García y Steven, 1998), y el diseño interactivo (García y Steven, 1999).

En este capítulo se presenta una breve revisión de los conceptos mínimos que se deben conocer de la teoría de la elasticidad para el análisis con una malla fija de elementos finitos, para seguidamente plantear: la solución con elementos finitos rectangulares de cuatro nodos, el uso de la integración numérica en problemas bidimensionales, la formulación para aproximar el problema elástico plano con una malla fija de elementos finitos, las matrices de rigidez utilizadas para cada uno de los casos geométricos en los que se puede encontrar el elemento, y las aplicaciones del método de la malla fija en el campo de la optimización de estructuras continuas.

2.2 TEORÍA DE LA ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

Existe una gran variedad de estructuras de interés práctico dentro de la ingeniería, en las que se puede hacer uso de las hipótesis de la elasticidad bidimensional. Estas estructuras se caracterizan por tener formas similares a un prisma recto. Una de las principales ventajas de la teoría de la elasticidad bidimensional es que permite el estudio de los problemas de tensión y deformación plana de forma unificada, aunque de hecho, cada uno de ellos represente, una serie de tipologías estructurales que funcionalmente no guardan ninguna relación entre si (Oñate, 1995). A continuación, se presentan los conceptos básicos que hay que conocer de la teoría de la elasticidad bidimensional para su utilización a través del método de los elementos finitos.

2.2.1 Desplazamientos

Las especiales características presentadas por la geometría y las cargas aplicadas en la estructura, que hacen tan particulares los estados de tensión y deformación plana, permiten establecer la hipótesis de que todas las secciones perpendiculares al eje prismático z se deforman en su plano y de forma idéntica. Por lo tanto, basta con conocer el comportamiento de cualquiera de dichas secciones. Si consideramos una sección genérica contenida en el plano xy , el campo de desplazamientos de la sección está perfectamente definido si se conocen los desplazamientos en las direcciones x e y de todos sus puntos. El vector de desplazamientos de un punto se define como

$$\mathbf{x}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son los desplazamientos del punto en las direcciones de los ejes coordenados x e y , respectivamente.

2.2.2 Deformaciones

En la Fig. 2.1 se muestran tres casos simples de deformación. En cada caso, la posición inicial del elemento se indica con línea de trazos, y la posición final con línea continua.

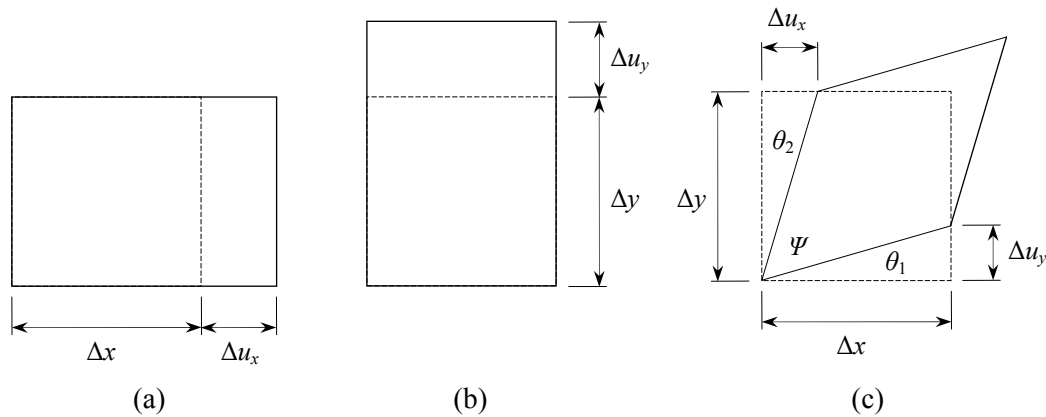


Figura 2.1 (a) Alargamiento en la dirección x . (b) Alargamiento en la dirección y . (c) Deformación tangencial pura sin rotación ($\theta_1 = \theta_2$)

Si los alargamientos unitarios ε_x y ε_y se definen como cambios de longitud por unidad de longitud inicial, y la deformación tangencial ε_{xy} se define como la mitad del decremento del ángulo recto que forma inicialmente los lados del elemento paralelos a los ejes x e y , tenemos

$$\varepsilon_x \approx \frac{\Delta u_x}{\Delta x} ; \varepsilon_y \approx \frac{\Delta u_y}{\Delta y} ; \gamma_{xy} \approx \frac{\pi}{2} - \psi = \theta_1 + \theta_2 ; \varepsilon_{xy} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_x}{\Delta y} + \frac{\Delta u_y}{\Delta x} \right) \quad (2.2)$$

y en el límite, cuando Δx y Δy tienden a cero

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \varepsilon_y \approx \frac{\partial u_y}{\partial y} ; \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

donde u_x, u_y son las componentes del desplazamiento paralelas a los ejes x e y . Para obtener la expresión de la deformación tangencial se han aproximado los ángulos θ_1, θ_2 por sus tangentes $\Delta u_y / \Delta x$ y $\Delta u_x / \Delta y$.

La deformación longitudinal ε_z hay que señalar que, en el caso de deformación plana, se hace la hipótesis de que es nula. Por otra parte, en un estado de tensión plana dicha deformación no es nula, pero se supone que lo es la tensión σ_z . Por consiguiente, en ninguno de los dos casos hay que considerar la deformación ε_z ya que no interviene en las ecuaciones del trabajo de deformación al ser nulo el producto $\sigma_z \varepsilon_z$. Así pues el vector de deformaciones significativas para tensión y deformación plana se define como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T = \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right]^T \quad (2.4)$$

2.2.3 Tensiones

De la Ec. (2.4) se deduce que, las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} son nulas. Por los mismos motivos que los explicados en el apartado 2.2.2 para la deformación ε_z , la tensión σ_z resulta nula, y el vector de tensiones significativas es

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (2.5)$$

2.2.4 Relación tensión-deformación

La relación entre tensiones y deformaciones se deduce de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional, con las hipótesis simplificadoras descritas anteriormente ($\sigma_z = 0$, para tensión plana, $\varepsilon_z = 0$ para deformación plana, y $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ en ambos casos). Tras realizar las correspondientes operaciones se obtiene la siguiente relación matricial entre tensiones y deformaciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

donde \mathbf{D} es la matriz de constantes elásticas (ver tabla 2.2).

Tabla 2.2 Valor de las constantes elásticas para los estados de tensión y deformación plana, siendo E el módulo de elasticidad, y ν el coeficiente de Poisson.

| Constante | d_{11} | d_{12} | d_{21} | d_{22} | d_{33} |
|-------------------|----------------------------|---------------------|----------|----------|--------------|
| Tensión plana | $E/1-\nu^2$ | $d_{11}\nu$ | d_{12} | d_{11} | $E/2(1+\nu)$ |
| Deformación plana | $E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu)$ | $d_{11}\nu/(1-\nu)$ | d_{12} | d_{11} | $E/2(1+\nu)$ |

2.3 APROXIMACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

A continuación, se estudia el elemento finito rectangular de cuatro nodos para problemas de elasticidad plana. Por su sencillez, interés práctico, y por ser el elemento utilizado en todos los ejemplos numéricos que se presentan en esta tesis.

2.3.1 Elemento finito rectangular de cuatro nodos

El elemento rectangular de cuatro nodos ofrece un alto grado de precisión para problemas en los que el comportamiento de la estructura sea principalmente tracción o compresión pura. Por el contrario, en problemas en los que el comportamiento predominante es la flexión, el elemento proporciona poca precisión, siendo necesario emplear mallas densas para obtener resultados con una precisión aceptable. Por este motivo, para aumentar su rendimiento resulta conveniente hacer uso de técnicas especiales como: la adición de nodos internos, la integración reducida de los términos de deformación tangencial, la adición de modos incompatibles, y más recientemente, la imposición de un campo de deformaciones.

En la Fig. 2.2 se muestra una viga biapoyada de gran canto discretizada con elementos rectangulares de cuatro nodos. Si consideramos un elemento aislado, con el sistema de coordenadas locales r y s que se indica. Por tener cuatro desplazamientos nodales en cada dirección, hay que definir el campo de desplazamiento en el interior del elemento mediante un polinomio de cuatro coeficientes en r y s .

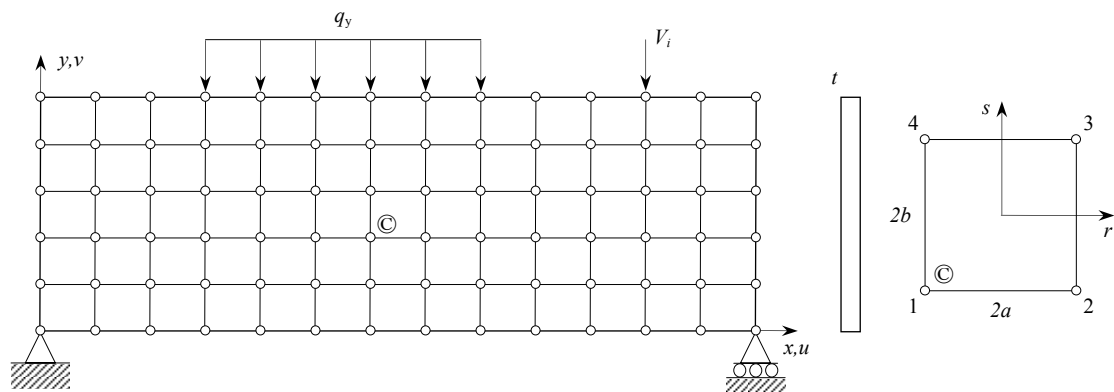


Figura 2.2 Discretización de una viga de gran canto con elementos rectangulares lineales de cuatro nodos. Definición de los ejes locales r y s

La interpolación más simple que cumple las condiciones de compatibilidad entre elementos e invariancia geométrica es la siguiente

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 r + \alpha_7 s + \alpha_8 rs \end{aligned} \quad (2.7)$$

De la Ec. (2.7) se deduce que la distribución de u y v a lo largo de cada uno de los lados es lineal, y depende solamente de los valores de los desplazamientos en los nodos que conectan cada lado con su elemento contiguo. Por lo tanto, la interpolación escogida garantiza la compatibilidad del campo de desplazamientos. Las cuatro constantes para cada

desplazamiento se determinan utilizando las ocho condiciones siguientes en el sistema de coordenadas r y s

$$\begin{aligned} u &= u_1, & v &= v_1; & r &= -a, & s &= -b \\ u &= u_2, & v &= v_2; & r &= -a, & s &= -b \\ u &= u_3, & v &= v_3; & r &= +a, & s &= +b \\ u &= u_4, & v &= v_4; & r &= +a, & s &= +b \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituyendo la Ec. (2.8) en la Ec. (2.7), y resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas para calcular los coeficientes α_i , la Ec. (2.7) se puede expresar como se representa en la Ec. (2.9). Puesto que se utiliza la misma interpolación para u y v , basta con obtener las funciones de forma para uno de los desplazamientos

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (2.9)$$

siendo las funciones de forma N_i

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{b}\right); & N_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{b}\right) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right); & N_4 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

la Ec. (2.9) se puede expresar como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]; & \mathbf{N}_i &= \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}^{(e)} &= \{\mathbf{a}_1^{(e)}, \mathbf{a}_2^{(e)}, \mathbf{a}_3^{(e)}, \mathbf{a}_4^{(e)}\}^T; & \mathbf{a}_i^{(e)} &= \{u_i, v_i\}^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

siendo \mathbf{N}_i la matriz de funciones de forma y $\mathbf{a}_i^{(e)}$ el vector de desplazamientos del nodo i .

La matriz de deformación del elemento se obtiene de las Ecs. (2.2) y (2.8)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i^{(e)} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \\ \mathbf{a}_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.13)$$

El cálculo de la matriz \mathbf{B} es inmediato y su expresión se muestra en la Ec. (2.14)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_2 & 0 & | & b_2 & 0 & | & b_1 & 0 & | & -b_1 & 0 \\ 0 & -a_2 & | & 0 & -a_1 & | & 0 & a_1 & | & 0 & a_2 \\ -a_2 & b_2 & | & -a_1 & b_2 & | & a_1 & b_1 & | & a_2 & b_1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$a_1 = \frac{1}{4b} \left(1 + \frac{r}{a} \right) ; \quad a_2 = \frac{1}{4b} \left(1 - \frac{r}{a} \right) ; \quad b_1 = \frac{1}{4a} \left(1 + \frac{1}{b} \right) ; \quad b_2 = \frac{1}{4a} \left(1 - \frac{1}{b} \right)$$

la matriz de rigidez y los vectores de fuerzas nodales equivalentes se obtienen a partir del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV). Así, la matriz de rigidez de los elementos resulta

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t \, dr \, ds = \iint_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ & & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \\ \text{sim.} & & & \mathbf{B}_4^T \mathbf{D} \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} t \, dr \, ds \quad (2.15)$$

donde $A^{(e)}$ es el área del elemento.

2.3.2 Integración numérica en regiones rectangulares

Mediante la formulación isoparamétrica se pueden transformar todas las integrales sobre el dominio del elemento en otras sobre el espacio de coordenadas naturales. Para el cálculo de dichas integrales, que suelen contener términos racionales, puede hacerse uso de cualquiera de las cuadraturas sobre dominios bidimensionales.

La manera más evidente de calcular la integral

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.16)$$

es calcular primero la integral interior manteniendo η constante, es decir

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i, \eta) = \psi(\eta) \quad (2.17)$$

calculando de igual manera la integral exterior, se obtiene

$$\int_{-1}^{+1} \psi(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^{n_j} H_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (2.18)$$

esto es

$$I = \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{i=1}^{n_i} H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (2.19)$$

donde n_i es el número de puntos de integración seleccionados en cada una de las direcciones, ξ y η las direcciones coordenadas naturales del punto de integración, y H_i y H_j los pesos correspondientes a cada dirección en dicho punto.

En las expresiones anteriores se ha supuesto un número igual de puntos de integración en cada dirección. Evidentemente esto no es necesario, y en ocasiones puede ser conveniente utilizar un número diferente en cada dirección de integración.

Al sustituir la integración exacta por la numérica se introduce un error adicional en los cálculos, y a primera vista parece que el mismo debería reducirse lo máximo posible. Es evidente que el coste de la integración numérica es considerable. Por lo que, resulta conveniente determinar los requisitos de integración mínimos que permitan la convergencia, y los requisitos de integración necesarios para que se preserve el orden de convergencia que resultaría si se efectuará una integración exacta.

2.4 FORMULACIÓN DE LA MALLA FIJA

En el análisis tradicional por elementos finitos, el dominio habitualmente es representado por una malla no estructurada de elementos (para ello se emplean sofisticados algoritmos como la triangulación de Delaunay), y la determinación de las matrices de rigidez se suelen realizar mediante integración numérica. Aunque los resultados obtenidos con estas técnicas resultan apropiados, requieren de una interacción con el usuario, a la vez que, computacionalmente resultan bastante costosos. Estos aspectos resultan de especial importancia, sobre todo en las primeras fases del proceso de diseño, cuando la geometría del diseño no es definitiva, y se ve continuamente modificada, generando una nueva malla de elementos finitos para volver a analizar la nueva estructura.

En este apartado se van a introducir las diferentes aproximaciones para representar un dominio mediante una malla fija de elementos finitos. Los principales objetivos de esta representación son:

1. Establecer un vínculo eficiente entre el modelo CAD (*Computer Aided Design*) y el modelo de análisis por elementos finitos.
2. Disminuir el coste para obtener la matriz de rigidez de la estructura.

La primera fase consiste en definir el dominio de los elementos finitos.

$$\Omega_{fg} = \{x \mid \min x_i(\Gamma) \leq x_i \leq \max x_i(\Gamma)\} \quad (2.20)$$

Si permitimos que Ω_{fg} sea el dominio (en forma de “caja”) más pequeño que se ajusta y encierra por completo a la región Ω , estando alineado con los ejes principales, entonces Ω_{fg} es definido como el dominio de la malla fija (Fig. 2.3).

Un punto $x \in \Omega_{fg}$ es considerado interior si $x \in \Omega$. Un punto $x \in \Omega_{fg}$ es considerado exterior si $x \notin \Omega$. Para mantener las características del problema original, las propiedades del material asignadas a un punto exterior serán iguales a las propiedades de un medio virtual, condición que transforma el problema elástico en un problema con dos materiales.

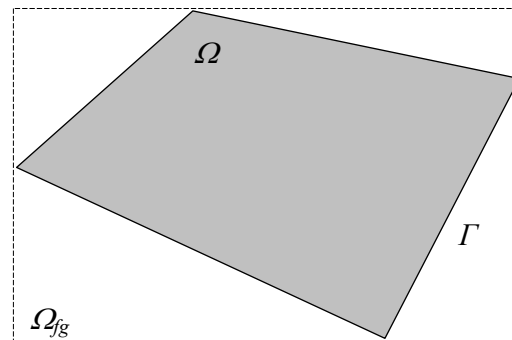


Figura 2.3 Dominio de la malla fija Ω_{fg} , región de diseño Ω , y contorno de la estructura Γ

Cuando la malla fija es superpuesta sobre el dominio Ω_{fg} obtenemos una malla discreta de elementos finitos. Esta malla está dividida en elementos con una geometría fija (elementos rectangulares en \mathbb{R}^2). En función de la posición de los elementos con respecto a la estructura, se pueden clasificar como: elementos interiores I (*In*) si todos sus nodos están contenidos en Ω , exteriores O (*Out*) si todos sus nodos están fuera de Ω , y de borde B (*Boundary*), si el elemento presenta nodos interiores y exteriores a Ω (Fig. 2.4).

Los elementos I, O y B se diferencian exclusivamente en las propiedades constitutivas del material. Los elementos I tienen las propiedades del material de la estructura (material real), los elementos O las propiedades de un medio virtual, y los elementos B presentan una combinación entre las propiedades del material real y el material virtual.

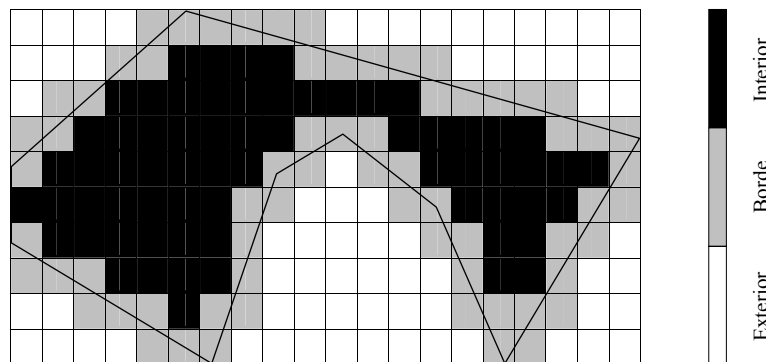


Figura 2.4 Aproximación de la geometría con una malla fija. Clasificación de los elementos finitos con respecto del contorno de la estructura

2.4.1 Matriz de rigidez para elementos interiores y exteriores

La matriz de rigidez para un elemento rectangular de cuatro nodos dada por la Ec. 2.14, está formada por un conjunto de integrales que dependen de las derivadas parciales de las funciones de forma, y de las propiedades constitutivas del material.

El módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson en estructuras constituidas por un solo material permanecen constantes en cualquier punto de su dominio. Sin embargo, si utilizamos una malla fija para aproximar su geometría, estos valores pueden cambiar. Por tanto, las propiedades del elemento dependen de su posición con respecto a la estructura.

En la Ec. (2.14) se observa que la matriz de deformación \mathbf{B} contiene términos de primer grado en r y s . Por consiguiente, el integrando de la Ec. (2.15) contiene términos lineales y cuadráticos en dichas variables. Sin embargo, dada la sencillez de la geometría del elemento, esta integral es fácil de calcular, obteniendo la Ec. (2.21).

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{36} & c_{41} & b_{36} & -a_{14} & -a_{36} & c_{14} & b_{63} \\ & 2a_{35} & b_{63} & c_{25} & -a_{36} & -a_{25} & b_{36} & c_{52} \\ & & 2a_{14} & -a_{36} & c_{14} & b_{36} & -a_{14} & a_{63} \\ & & & 2a_{25} & b_{63} & c_{52} & a_{36} & -a_{52} \\ & & & & 2a_{14} & a_{36} & c_{41} & b_{63} \\ & & & & & 2a_{25} & b_{63} & c_{25} \\ & & & & & & 2a_{11} & -b_{36} \\ \text{Sim.} & & & & & & & 2a_{25} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_i + a_j \quad ; \quad b_{ij} = a_i - a_j \quad ; \quad c_{ij} = a_i - 2a_j \quad (2.21)$$

$$a_1 = \frac{tbd_{11}}{6a} \quad ; \quad a_2 = \frac{tad_{22}}{6b} \quad ; \quad a_3 = \frac{td_{12}}{4} \quad ; \quad a_4 = \frac{tbd_{33}}{6b} \quad ; \quad a_5 = \frac{tbd_{33}}{6a} \quad ; \quad a_6 = \frac{td_{33}}{4}$$

Por tanto, la estructura de las matrices de rigidez correspondientes a un elemento interior \mathbf{K}_I , y a un elemento exterior \mathbf{K}_O son descritas mediante la Ec. (2.21).

Para reproducir numéricamente los diferentes materiales introducidos en el problema elástico, es necesario que las propiedades del material virtual \mathbf{K}_O resulten insignificantes frente a las del material real, es decir $\mathbf{K}_O \ll \mathbf{K}_I$. Una práctica habitual es reducir el valor el módulo de elasticidad E (o la densidad ρ del material). El valor por el cual se divide el módulo de elasticidad generalmente está comprendido entre 10^2 y 10^6 (ver Tabla 2.3).

Tabla 2.3 Valores para la relación entre el módulo de elasticidad real E , y el módulo de elasticidad virtual E_0

| Autor/es | Método de optimización | E/E_0 |
|---|--|------------------|
| Bendsøe y Kikuchi (1988) | Homogenización | $10^2 \div 10^3$ |
| Hinton y Sienz (1995) | FS | 10^5 |
| Papadrakakis, Tsompanakis, Hinton, y Sienz (1996) | FS | 10^5 |
| García y Steven (1998) | Programación matemática | $10^3 \div 10^5$ |
| Stolpe y Svanberg (2001) | SIMP | 10^3 |
| Rozvany y Querin (2001) | SERA (<i>Sequential Element Rejections and Admissions</i>) | 10^6 |
| Woon, Tong, Querin, y Steven (2003) | Multi-GA (<i>Multi Genetic Algorithm</i>) | 10^4 |
| Victoria y Martí (2005) | Algoritmos evolucionarios en multi-nivel | 10^4 |

2.4.2 Matriz de rigidez para elementos de borde

Los elementos situados sobre el contorno de la estructura Γ están constituidos por dos materiales (material real y material virtual) de modo que, propiedades como el módulo de

elasticidad no son constantes en todo el elemento (Fig. 2.5). Para determinar la matriz de rigidez de estos elementos disponemos de dos alternativas: aproximación FG_0 y FG_1 .

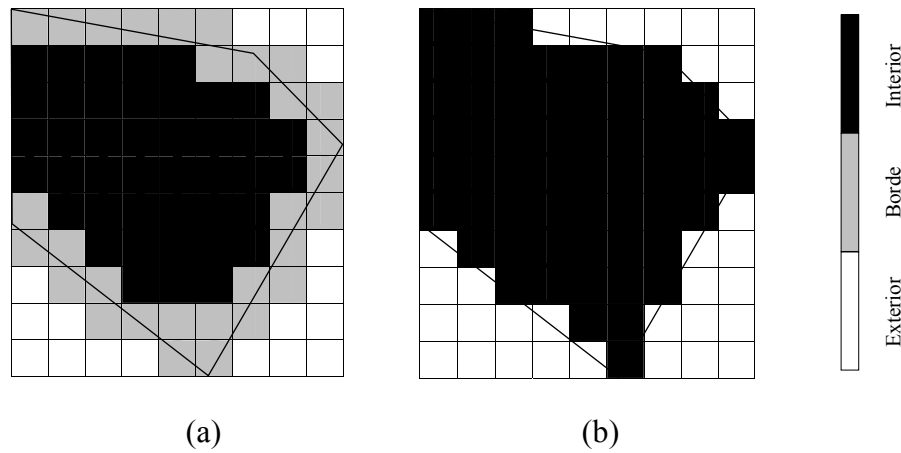


Figura 2.5 Aproximación de la geometría con una malla fija. Clasificación en elementos exteriores, interiores y de borde (a) Aproximación FG_1 . (b) Aproximación FG_0

La aproximación FG_0 propone que, la forma más sencilla de representar los elementos que se encuentran en el contorno, es intentar convertirlos en elementos interiores o exteriores. El criterio para decidir si un elemento es transformado en uno interior o exterior, puede ser el porcentaje del elemento que se encuentra en el dominio de la estructura.

Por ejemplo, si un elemento se encuentra situado sobre el contorno, y cuenta con un 50% ($\phi = 0,5$) de su volumen en el interior de la estructura, se considera elemento interior.

De forma más general, si V_I representa el volumen del elemento dentro de la estructura y V_O representa el volumen exterior, la aproximación FG_0 puede expresarse mediante la Ec. (2.22) para un ϕ dado

$$\mathbf{K}_B = \zeta \mathbf{K}_I$$

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } V_I/V_O > \phi \\ 0 & \text{si } V_I/V_O \leq \phi \end{cases} ; \quad 0 < \phi < 1 \quad (2.22)$$

La aproximación FG_1 se demuestra mucho más precisa, no obstante sigue siendo una aproximación que modeliza los elementos situados en el contorno. Los elementos de borde están constituidos por dos materiales, y sus propiedades no están distribuidas de forma continua en el elemento. La aproximación FG_1 transforma un elemento bi-material en otro equivalente de características isotropas

$$\xi = \frac{A_I^{(e)}}{A_I^{(e)} + A_O^{(e)}} = \frac{A_I^{(e)}}{A^{(e)}} \quad (2.23)$$

donde $A_I^{(e)}$ es el área interior que cubre un elemento sobre la estructura, $A_O^{(e)}$ el área del elemento exterior a la estructura, y ξ el ratio de área normalizado del elemento que resulta interior a la estructura con respecto al área total $A^{(e)}$.

Por consiguiente, las expresiones para obtener las matrices de rigidez de los elementos interiores, exteriores, y de borde son

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{cases} \mathbf{K}_I & \text{si } \xi = 1 \\ \mathbf{K}_O & \text{si } \xi = 0 \\ \mathbf{K}_B = \mathbf{K}_I \xi + (1 - \xi) \mathbf{K}_O & \text{si } 0 < \xi < 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

2.5 ANÁLISIS DE LAS TENSIONES EN LOS NODOS DE LA MALLA FIJA

Resulta conveniente obtener los resultados de una forma general, aplicable a cualquier situación, pero para evitar introducir conceptos que aún no han sido explicados, las expresiones se van a determinar a partir del análisis de una pieza delgada sometida a tensión plana. En la Fig. 2.6 se representan los desplazamientos incógnita, puntos de integración, sistemas de coordenadas global y local, y la numeración de los nodos.

El desplazamiento de un punto de un elemento se aproxima en función de los desplazamientos de los nodos

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.25)$$

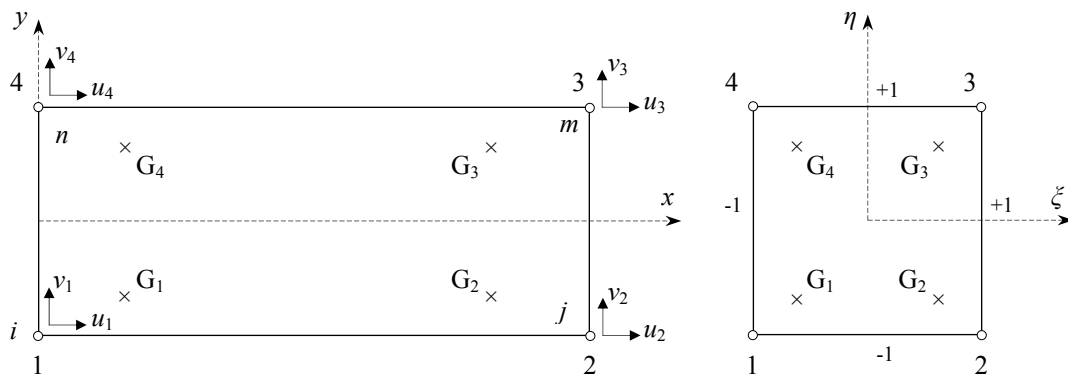


Figura 2.6 Desplazamientos incógnita, puntos de Gauss, sistemas de coordenadas global y local, y numeración de nodos

Las funciones de forma para el elemento cuadrangular lineal son

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$N_i = \frac{(\xi - 1)(\eta - 1)}{4} ; N_j = \frac{-(\xi + 1)(\eta - 1)}{4} ; N_m = \frac{(\xi + 1)(\eta + 1)}{4} ; N_n = \frac{-(\xi - 1)(\eta + 1)}{4}$$

Las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas locales

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial N_m}{\partial \xi} & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N_m}{\partial \eta} & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\eta-1)}{4} & \frac{-(\eta-1)}{4} & \frac{(\eta+1)}{4} & \frac{-(\eta+1)}{4} \\ \frac{(\xi-1)}{4} & \frac{-(\xi+1)}{4} & \frac{(\xi+1)}{4} & \frac{-(\xi-1)}{4} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

y las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial N_m}{\partial \xi} & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N_m}{\partial \eta} & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

siendo \mathbf{J} el jacobiano de la transformación geométrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N'_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N'_j}{\partial \xi} & \frac{\partial N'_m}{\partial \xi} & \frac{\partial N'_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N'_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N'_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N'_m}{\partial \eta} & \frac{\partial N'_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_m & y_m \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_m & y_m \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ya que para los elementos isoparamétricos, las funciones de forma de la transformación geométrica N'_i son las mismas que las de la función de desplazamientos N_i .

Una vez que se conoce el valor de los desplazamientos para todos los puntos del elemento, pueden determinarse las deformaciones en cualquier punto. Éstas siempre dan como resultado una relación que puede escribirse como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} \approx \mathbf{S}\mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \quad (2.30)$$

siendo \mathbf{S} la matriz operador lineal que para elasticidad plana es

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

con lo que la matriz \mathbf{B} para elemento cuadrangular lineal es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

En general, el material contenido dentro del dominio de la malla puede estar sujeto a deformaciones iniciales (cambios de temperatura, retracciones, etc.) Si representamos dichas deformaciones por $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, las tensiones se deberán a la diferencia entre las deformaciones reales y las iniciales. Del mismo modo, al comienzo del análisis, el material puede estar sometido a un sistema conocido de tensiones residuales iniciales $\boldsymbol{\sigma}_0$. Admitiendo un comportamiento elástico, la relación entre tensiones y deformaciones es lineal, determinando las tensiones en cualquier punto del elemento mediante la expresión

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \approx \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.33)$$

En general, se suelen calcular las tensiones en los puntos de Gauss del elemento, debido a que ya se conocen los valores de las matrices de deformación \mathbf{B} . Suponiendo que las tensiones y las deformaciones iniciales son nulas, las tensiones en los puntos de Gauss se obtienen como

$$\boldsymbol{\sigma}_{G_1} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_1}\mathbf{a}^{(e)} ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{G_2} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_2}\mathbf{a}^{(e)} ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{G_3} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_3}\mathbf{a}^{(e)} ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{G_4} = \mathbf{D}\mathbf{B}_{G_4}\mathbf{a}^{(e)} \quad (2.34)$$

Obtenidas las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{G_1}, \boldsymbol{\sigma}_{G_2}, \boldsymbol{\sigma}_{G_3}, \boldsymbol{\sigma}_{G_4}$, la tensión en el elemento puede determinarse mediante el promedio de las tensiones en dichos puntos de Gauss

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}_{G_1} + \boldsymbol{\sigma}_{G_2} + \boldsymbol{\sigma}_{G_3} + \boldsymbol{\sigma}_{G_4}) \quad (2.35)$$

Para determinar las tensiones en los nodos de los elementos podemos optar, entre:

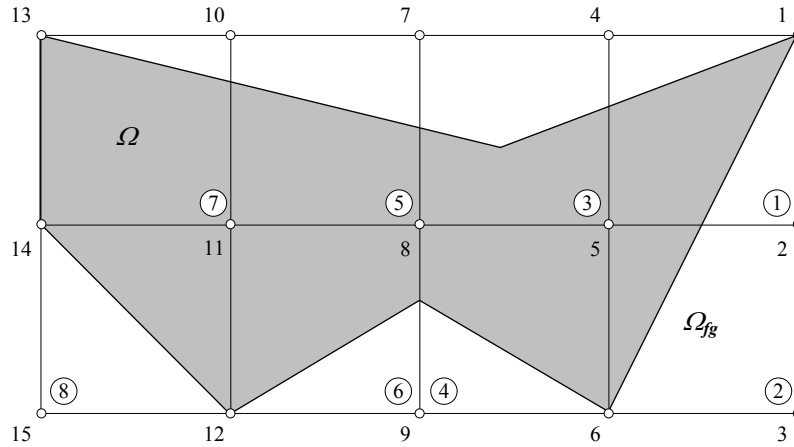
- Adoptar el valor de la tensión del punto de Gauss más cercano.
- Extrapolar el valor nodal a partir de la información obtenida en los puntos de Gauss.
- Utilizar las funciones de forma del elemento.
- Promediar las tensiones de los elementos que comparten el nodo.
- Mediante un ajuste por mínimos cuadrados, a partir de las tensiones en los elementos que circundan el nodo de interés.

De entre todas las opciones, se ha seleccionado para su implementación, el promedio de las tensiones en los elementos.

Ahora bien, si el nodo pertenece a una malla fija, entonces este puede estar compartido tanto por elementos interiores, exteriores o de borde. Como los elementos exteriores están fuera de la estructura sus propiedades resultan insignificantes, y además no deberían ser consideradas en el promedio de las tensiones. En el caso de los elementos de borde, y debido a su particular situación (interfase de dos materiales) resulta conveniente introducir el ratio de área normalizado ξ , para asignar el peso que deben de recibir cada uno de los elementos dentro del promedio

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k \boldsymbol{\sigma}_k^{(e)}}{\sum_{k=1}^n \xi_k} \quad (2.36)$$

De este modo, la tensión en un nodo i puede ser aproximada a partir de las tensiones de los n elementos que comparten el nodo (Fig. 2.7), y ponderadas por el ratio de área normalizado del elemento.



$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\xi_1 \sigma_1^{(e)}}{\xi_1} ; \sigma_3 = \frac{\xi_2 \sigma_2^{(e)}}{\xi_2} ; \sigma_{13} = \frac{\xi_7 \sigma_7^{(e)}}{\xi_7} ; \sigma_{15} = \frac{\xi_8 \sigma_8^{(e)}}{\xi_8} ; \sigma_{11} = \frac{\xi_5 \sigma_5^{(e)} + \xi_7 \sigma_7^{(e)} + \xi_6 \sigma_6^{(e)} + \xi_8 \sigma_8^{(e)}}{\xi_5 + \xi_7 + \xi_8 + \xi_6} \\ \sigma_2 &= \frac{\xi_1 \sigma_1^{(e)} + \xi_2 \sigma_2^{(e)}}{\xi_1 + \xi_2} ; \sigma_{14} = \frac{\xi_7 \sigma_7^{(e)} + \xi_8 \sigma_8^{(e)}}{\xi_7 + \xi_8} ; \sigma_6 = \frac{\xi_4 \sigma_4^{(e)} + \xi_2 \sigma_2^{(e)}}{\xi_4 + \xi_2} ; \sigma_4 = \frac{\xi_1 \sigma_1^{(e)} + \xi_3 \sigma_3^{(e)}}{\xi_1 + \xi_3} \\ \sigma_9 &= \frac{\xi_4 \sigma_4^{(e)} + \xi_6 \sigma_6^{(e)}}{\xi_4 + \xi_6} ; \sigma_7 = \frac{\xi_3 \sigma_3^{(e)} + \xi_5 \sigma_5^{(e)}}{\xi_3 + \xi_5} ; \sigma_{12} = \frac{\xi_6 \sigma_6^{(e)} + \xi_8 \sigma_8^{(e)}}{\xi_6 + \xi_8} ; \sigma_{10} = \frac{\xi_5 \sigma_5^{(e)} + \xi_7 \sigma_7^{(e)}}{\xi_5 + \xi_7} \\ \sigma_5 &= \frac{\xi_4 \sigma_4^{(e)} + \xi_3 \sigma_3^{(e)} + \xi_2 \sigma_2^{(e)} + \xi_1 \sigma_1^{(e)}}{\xi_4 + \xi_3 + \xi_2 + \xi_1} ; \sigma_8 = \frac{\xi_5 \sigma_5^{(e)} + \xi_3 \sigma_3^{(e)} + \xi_4 \sigma_4^{(e)} + \xi_6 \sigma_6^{(e)}}{\xi_5 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_6} \end{aligned}$$

Figura 2.7 Tensiones en los nodos a partir de las tensiones en los elementos que comparten el nodo, y el ratio de área normalizado

2.6 OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURAS CON MALLA FIJA

El diseño óptimo de estructuras es un proceso iterativo en el cual la estructura se optimiza repetidamente hasta alcanzar el óptimo. Cada ciclo comienza con una geometría de partida y acaba con el análisis del nuevo diseño.

Generalmente, el análisis del modelo es la etapa más costosa. En estos últimos años, muchos de los esfuerzos se han encaminado a reducir el coste de esta fase (Borrvall y Petterson, 2001). Y por este motivo, las aplicaciones del método de la malla fija se han visto notablemente incrementadas.

El análisis mediante elementos finitos requiere que el dominio se divida mediante una malla de elementos. Los métodos para el diseño óptimo de forma son característicamente iterativos, lo que implica cambios constantes en la forma de la estructura. Debido a estos cambios, la precisión del modelo puede verse gravemente deteriorada, por lo que se necesita

readaptar la malla al nuevo diseño, proceso comúnmente conocido como regeneración de la malla.

En la Fig. 2.8 se representa un diagrama comparativo entre el método FG y el MEF para el análisis completo de una estructura. La principal ventaja del método FG sobre el método clásico de los EF se aprecia cuando tras analizar el diseño, la forma (y/o topología) del diseño se modifica. Con el método de la malla fija, la matriz de rigidez permanece igual y solamente son modificadas aquellas posiciones correspondientes a los elementos cuyo estado (I, O, ó B) ha cambiado. Sin embargo, con el método clásico de los elementos finitos todo el proceso para el análisis debe de ser repetido.

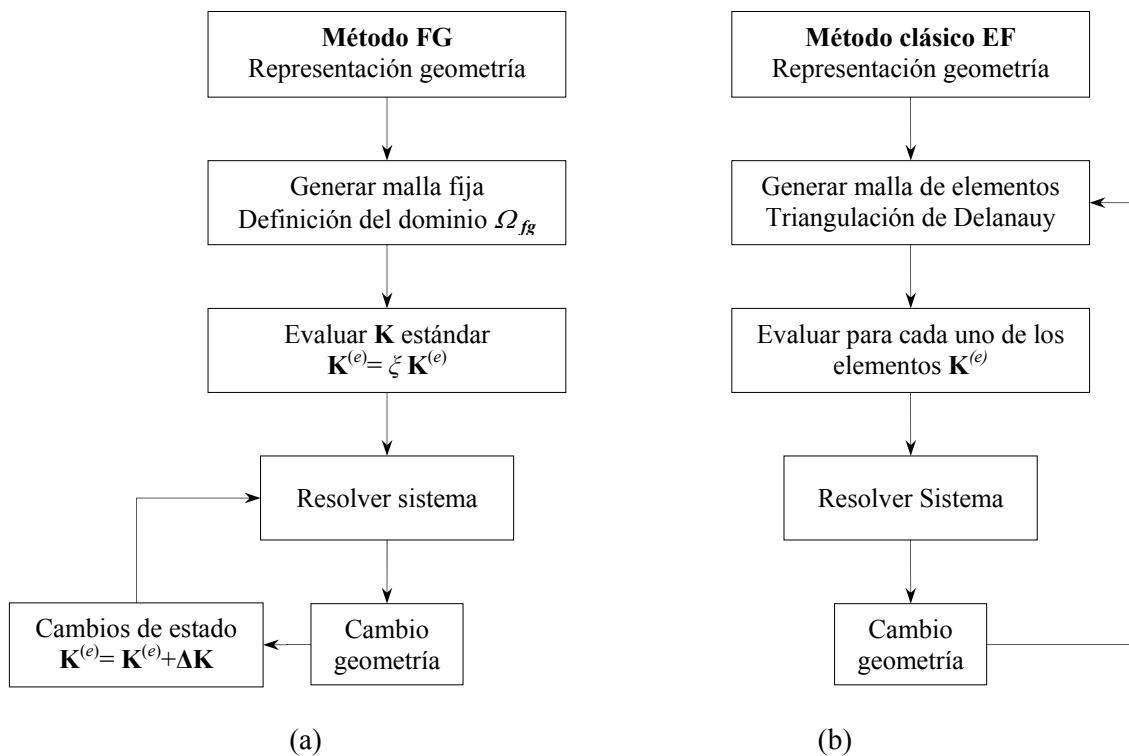


Figura 2.8 Diagramas de flujo. (a) Método FG. (b) Método clásico EF

Los principios para la optimización de estructuras mediante la aplicación de una malla fija fueron establecidos por García (1999). En sus estudios, el método FG-FEA (*Fixed Grid-Finite Elements Analysis*) se confirma como una metodología fiable y eficiente para el análisis del campo de desplazamientos y tensiones.

La aplicación del método de la malla fija a la optimización de estructuras supone un incremento global en la eficiencia computacional, y ofrece una serie de ventajas no soportadas por los métodos convencionales de EF. Posiblemente, la aportación más ventajosa es que aún encontrándose el contorno de la estructura en continuo movimiento, la malla es capaz de captar las variaciones sin que por ello se sufra pérdida de precisión. Esto implica que la regeneración de la malla no es necesaria, con la consecuente disminución, tanto en la complejidad del algoritmo como en el coste computacional. Por el contrario, el inconveniente de esta aproximación es la precisión con la que se obtienen las tensiones en el modelo. Sin

embargo, la precisión de la solución se considera aceptable si las aplicaciones son: diseños preliminares (o conceptuales), optimización de estructuras, etc.

Por tanto, podemos afirmar que el método de la malla fija se constituye en la actualidad como una valiosa herramienta de diseño para el ingeniero, pudiendo realizar análisis de forma rápida, con un coste computacional pequeño, y una fiabilidad en los resultados aceptable.

A continuación, se describen algunas de las aportaciones al campo de la optimización de estructuras empleando para ello el método de la malla fija.

Suzuki y Kikuchi (1991) representan la estructura mediante la aproximación Euleriana, en la cual, la malla que cubre el espacio de diseño es fija. La región de la malla ocupada por la estructura presenta un valor de densidad completo, y nulo en caso de una región exterior.

Kim, García, Querin, Steven, y Xie (1999, 2000) introducen un nuevo procedimiento para la optimización de topología, en el cual se integran el análisis con malla fija de elementos finitos y el método ESO. La introducción de la malla fija en el proceso evolucionario elimina la necesidad de readaptar la malla de elementos finitos, sustituyendo la regeneración completa de la matriz de rigidez, por unas pocas operaciones aritméticas. Kim, Querin, Steven, y Xie (2003) extienden el trabajo, y confirman la eficiencia de la integración.

Woon, Tong, Querin y Steven (2003) desarrollan un nuevo procedimiento para la optimización de forma y topología de estructuras continuas, a través de un algoritmo multi-genético, en donde, el análisis de la estructura se realiza mediante una malla fija.

Chen y Kikuchi (2001) presentan un procedimiento para la optimización de topología. Para ello, el problema de optimización se transforma en un problema de distribución del material, el cual dispone de tres fases (material sólido, vacío, y fluido). En este caso, la malla fija es utilizada para reducir la complejidad asociada a los cambios de forma.

Kim y Chang (2003, 2005) proponen un nuevo método para resolver la optimización de forma a partir de la aproximación Euleriana. Con el fin de minimizar el coste computacional, y los errores asociados a la distorsión de la malla, tan frecuentes en el planteamiento tradicional (aproximación Lagrangiana).

Yoon Young y Gang-Won (2004) mejoran los resultados obtenidos con la optimización, aumentando la precisión, con la que se obtienen los valores de las tensiones en el contorno de una malla fija.

García y González (2004) presentan un procedimiento para la optimización de forma mediante la aplicación de estrategias evolutivas. Para reducir el tiempo de cálculo, el análisis de las tensiones se realiza a través de una malla fija.

Capítulo 3

Diseño óptimo de estructuras con algoritmos genéticos

3.1 INTRODUCCIÓN

La teoría de la evolución fue descrita por Charles Darwin (1859). La hipótesis de Darwin (junto con Wallace (1855), que propuso de forma independiente las mismas conclusiones) se basa en que, pequeños cambios heredables en los seres vivos y en la selección, son los dos hechos que provocan el cambio en la naturaleza y la generación de nuevas especies. Sin embargo, Darwin desconocía cual era la base de la herencia, pensaba que los rasgos de un ser vivo eran como un fluido, y que la información de los padres se mezclaba en la descendencia.

« Así como la selección natural trabaja exclusivamente para y por el bien de cada ser viviente, todas las dotes mentales y corporales tienden a progresar en dirección hacia la perfección ». Charles Darwin, *El Origen de las Especies*.

Mendel descubrió que los caracteres se heredaban de forma discreta, y que se tomaban del cualquiera de los progenitores, en función de su carácter (dominante o recesivo). A estos caracteres que podían tomar diferentes valores se les denominó *genes* (unidad básica de codificación). El núcleo de su trabajo comenzó a partir de su experiencia con el cruzamiento de guisantes, lo que propició el descubrimiento de las tres leyes de la herencia o leyes de Mendel, a través de las cuales se describen los mecanismos de la herencia. Las tres leyes descubiertas por Mendel (1865) se enuncian como sigue: según la primera, cuando se cruzan dos variedades puras de una misma especie, los descendientes son todos iguales y pueden parecerse a uno u otro progenitor o a ninguno de ellos; la segunda afirma que, al cruzar entre sí los híbridos de la segunda generación, los descendientes se dividen en cuatro partes, de las cuales una se parece a su abuela, otra a su abuelo, y las dos restantes a sus progenitores; y por último, la tercera ley concluye que, en el caso de que las dos variedades de partida difieran

entre sí en dos o más caracteres, cada uno de ellos se transmite de acuerdo con la primera ley con independencia de los demás.

Flemming (1882) describió los *cromosomas*, como ciertos filamentos en los que se agregaba la cromatina del núcleo celular durante la división. Las teorías de Mendel se olvidaron, y no se volvieron a redescubrir hasta principios del siglo XX. Cuando, Aylmer (1930), un geneticista inglés relacionó ambas teorías, demostrando que los genes mendelianos eran los que proporcionaban el soporte para la evolución.

Watson y Crick (1953) descubrieron que la base molecular de los genes está en el ADN (ácido desoxirribonucleico). Los cromosomas están compuestos de ADN, y por lo tanto los genes están en los cromosomas.

Todos estos hechos constituyen hoy en día la teoría del neo-darwinismo, en la cual la historia de la mayoría de la vida está causada por una serie de procesos (reproducción, mutación, competición y selección) que actúan dentro de las poblaciones.

Según los ingenieros evolucionistas, la evolución (cambios en el conjunto genético de una población) optimiza puesto que, va creando seres cada vez más perfectos cuya cumbre es el hombre. Sin embargo, algunos geneticistas, biólogos, y filósofos afirman que la evolución no optimiza, sino que adapta y mejora localmente en un marco espacio/tiempo. Evolución no significa progreso ya que, un organismo más evolucionado puede estar en desventaja competitiva frente a un antepasado, si el primero se sitúa en el entorno del último.

« Las especies no se desarrollan hacia la perfección, sino lo contrario. El débil, de hecho, siempre prevalece sobre el fuerte, no solamente porque son mayoría, sino también porque son más astutos ». Friedrich Nietzsche, *El Ocaso de los Ídolos*.

3.2 EL ORIGEN DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

El algoritmo genético es una técnica de búsqueda basada en la teoría de la evolución de Darwin, que ha logrado durante estos últimos años, despertar un gran interés entre la comunidad científica.

Esta técnica está basada en la teoría de la evolución y en los mecanismos de selección de la naturaleza, por los cuales los individuos más aptos de una población son los que sobreviven al adaptarse más fácilmente a los cambios que se producen en su entorno.

A comienzos de los años 1950, Holland entró en contacto con los primeros ordenadores, pudiendo poner en práctica algunas de sus ideas. Pero fue a principios de los años 1960, en la Universidad de Michigan, en Ann Arbor, donde dentro del grupo “*Logic of Computers*”, sus ideas comenzaron a desarrollarse, y a dar frutos. Después de estudiar un libro escrito por Aylmer (1930), titulado “La teoría genética de la selección natural”, Holland aprendió que la evolución es una forma de adaptación más potente que el simple aprendizaje, y tomó la decisión de aplicar estas ideas para desarrollar programas.

Desde sus inicios, Holland (1962) se preguntaba cómo lograba la naturaleza crear seres cada vez más perfectos. Y lo más curioso era que todo se lleva a cabo a base de interacciones locales entre individuos, y entre estos y lo que les rodea. No sabía la respuesta, pero tenía una

cierta idea de como encontrarla; tratando de hacer pequeños modelos de la naturaleza, que tuvieran alguna de sus características, y ver cómo funcionaban, para después extrapolar sus conclusiones a la totalidad.

En la Universidad de Michigan, Holland impartía un curso titulado “Teoría de sistemas adaptativos”. Dentro de este curso, y con una participación importante de sus estudiantes, fue donde surgieron las ideas que más tarde se denominarán algoritmos genéticos.

Los principales objetivos de Holland, y sus colaboradores (De Jong, 1975) fueron:

1. Abstractar y explicar de forma rigurosa el proceso adaptativo de los procesos naturales.
2. Diseñar sistemas artificiales (programas) capaces de retener los mecanismos más importantes de los sistemas naturales.

Unos 15 años más adelante, Goldberg conoció a Holland, y se convirtió en uno de sus estudiantes. Goldberg era un ingeniero industrial que trabajaba en el diseño de tuberías, y fue uno de los pioneros en tratar de aplicar los algoritmos genéticos a problemas industriales. Aunque Holland trató de disuadirle, porque pensaba que los problemas eran excesivamente complicados para aplicarles algoritmos genéticos; Goldberg consiguió lo que quería, escribir un algoritmo genético en un ordenador personal Apple II.

Estas y otras aplicaciones creadas por los estudiantes de Holland convirtieron a los algoritmos genéticos en un campo con base suficiente como para celebrar la primera conferencia en 1985 (ICGA'85). A la técnica que inventó Holland se le denominó originalmente “planes reproductivos”, pero se hizo popular bajo el nombre “algoritmos genéticos” después de publicar su libro en 1975. Los algoritmos genéticos, según Goldberg, son:

« Algoritmos de búsqueda basados en los mecanismos de selección y genética natural. Combinan la supervivencia de los más compatibles entre las estructuras de cadenas, con una estructura de información ya aleatorizada, intercambiada para construir un algoritmo de búsqueda con algunas de las capacidades de innovación de la búsqueda humana ».

En resumen, los algoritmos genéticos, son: algoritmos de búsqueda basados en los mecanismos de selección natural y supervivencia del más apto. Y la clave para el actual empuje de este tipo de algoritmos se debe a su robustez, y al balance entre la eficacia y eficiencia necesaria para sobrevivir en diferentes entornos de aplicación.

3.3 FUNDAMENTOS BIOLÓGICOS DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

Todos los organismos están compuestos por una o más células, y éstas contienen uno o más cromosomas, cuyo objetivo es ser un anteproyecto del organismo del que forman parte.

Un cromosoma se puede dividir, conceptualmente, en genes (bloques funcionales de ADN que codifican una determinada proteína). Solemos pensar en los genes (aunque bajo una visión muy artificial) como en los responsables de determinar los rasgos de un individuo, el color de los ojos, cabello, etc. Las diferentes posibilidades entre las que se define un rasgo se denominan *alelos*. Y a la posición que ocupa el gen dentro del cromosoma *locus*. El *genoma* del organismo es la colección completa del material genético, y el *genotipo* el conjunto de

genes contenido en un genoma. El genotipo, tras su desarrollo, dará lugar al *fenotipo* del organismo, es decir, a sus características físicas y mentales (color de los ojos, cabello, estatura, nivel de inteligencia, etc.).

La mayoría de las especies (sexualmente reproductoras) almacenan sus cromosomas por parejas es decir, son *diploides* (*haploides*, en caso contrario). Y en el caso del hombre, cada célula somática (no germen) de su cuerpo contiene 23 pares de cromosomas. Durante la reproducción sexual se produce el cruce o recombinación de la información genética, emparejando los *gametos* (cada una de las dos células sexuales masculina o femenina) de los dos padres, para constituir un nuevo conjunto de cromosomas diploides completo. No obstante, la descendencia también está sujeta a mutaciones (debiéndose habitualmente a errores de copia), que producen cambios en algunos de los nucleótidos (bits elementales de ADN) entre padres e hijos.

En los algoritmos genéticos (AGs), el término cromosoma (ver tabla 3.1) representa una solución del problema, la cual se codifica mediante una cadena de bits. La representación más común es la codificación binaria (también con números reales y caracteres literales). Algunas de sus características son: (1) fácil implementación, (2) los alelos pueden tomar valores “0” ó “1”, y (3) originalmente fue la propuesta por Holland.

Tabla 3.1 Analogía entre los términos de un sistema natural y un algoritmo genético

| Sistema Natural | Algoritmo Genético |
|-----------------|---|
| Cromosoma | Cadena, palabra binaria, vector |
| Gen | Rasgo, carácter, parámetro del problema |
| Alelo | Valor del rasgo |
| Locus | Posición dentro de la cadena |
| Genotipo | Estructura codificada |
| Fenotipo | Estructura decodificada |
| Individuo | Solución |
| Generación | Ciclo |

La *recombinación* consiste en el intercambio del material genético entre dos cromosomas. La *mutación* consiste esencialmente en la permutación aleatoria de bits, y en el caso de alfabetos más largos, reemplazar el símbolo de una posición escogida aleatoriamente por un nuevo símbolo escogido también de forma aleatoria.

En la mayoría de las aplicaciones donde se introducen los AGs se utilizan individuos haploides. En un algoritmo que emplea cadenas de bits, el genotipo de un individuo es simplemente el conjunto de bits del cromosoma. La noción de fenotipo no aparece en el contexto de los AGs, aunque las codificaciones más recientes implican que los algoritmos distingan entre ambos niveles.

Los individuos de una población son evaluados de acuerdo a la aptitud con la que desempeñan una función. La función empleada para establecer la probabilidad de reproducción de un individuo en base a su idoneidad se denomina *función de aptitud* (*fitness*

function). Por consiguiente, el propósito de la función de aptitud es proporcionar una medida que cuantifique el grado de calidad de los individuos.

3.4 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LOS ALGORITMOS GENÉTICOS

A pesar de que los algoritmos genéticos son simples como programas, su conducta puede ser complicada, y existen muchas cuestiones sin resolver acerca de cómo funcionan, y para qué tipo de problemas están mejor adaptados.

La teoría tradicional de los AGs (formulada inicialmente por Holland) supone a un nivel de descripción muy general que, los AGs funcionan descubriendo, y recombinando buenos bloques de información (combinaciones de bits con valores altos de aptitud) en los individuos, con un grado de paralelización elevado.

Para comprender el término bloque de información es necesario introducir el concepto de esquema. Un *esquema* es un conjunto de bits (o cadenas de bits) que puede ser descrito (en el caso de una codificación binaria) mediante una plantilla de ceros, unos, y asteriscos (*). Los asteriscos representan indiferencia. Por ejemplo, el esquema $H = 1**1$ representa el conjunto de todas las cadenas de cuatro bits que comienzan y terminan por “1” (Fig. 3.1).

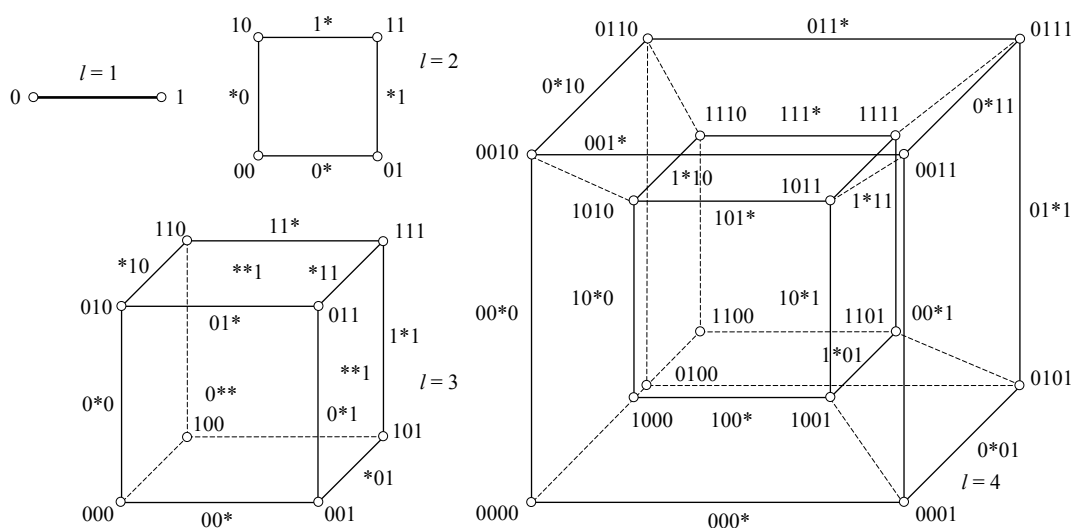


Figura 3.1 Interpretación de los hipercubos, hiperplanos, e hiperlíneas de dimensión l comprendidas entre 1 y 4

Los algoritmos genéticos no procesan estrictamente individuos, sino similitudes entre ellos es decir, patrones de similitud o esquemas. Y dado que cada individuo encaja en muchos patrones de forma simultanea, la eficiencia de la búsqueda se ve multiplicada. Por lo tanto, el esquema es una herramienta para estudiar la forma en que una cadena representa a otras cadenas, o lo que es lo mismo, un patrón de similitud que describe un subconjunto de cadenas con similitudes en ciertas posiciones. Por ejemplo, el esquema $*0000$ encaja con las cadenas $\{00000, 10000\}$, ó el esquema $0*0*1$ con $\{00001, 00011, 01001, 01011\}$.

Cualquier cadena de bits de longitud l es una instancia que contiene 2^l esquemas diferentes. Por ejemplo, la cadena 11 es una instancia de ** (todas las posibles combinaciones de cadenas de bits de longitud dos), de modo que cualquier población de n cadenas contiene un número entre 2^l y $n \cdot 2^l$ de esquemas diferentes. Esto quiere decir, que en una generación, mientras el AG está explícitamente evaluando la aptitud de las n cadenas de la población, implícitamente estima la media de la aptitud de un elevado número de esquemas, donde la media de la aptitud de un esquema está definida por la media de la aptitud de todas las posibles instancias de ese esquema. Por ejemplo, en una población generada al azar de n cadenas, la mitad (en media) de las cadenas serán instancias con 1***...* y la otra mitad serán instancias con 0***...*. La evolución de aproximadamente $n/2$ cadenas que son instancias de 1***...* da una estimación de la media de la aptitud de ese esquema (es una estimación porque las instancias evaluadas en una población de tamaño fijo son solamente un ejemplo de todas las posibles instancias).

El objetivo principal del *teorema de los esquemas* es proporcionar una formulación que demuestre como evoluciona un esquema dentro de una población P controlada por un AG, considerando los efectos individuales y combinados de la reproducción, cruce, y mutación en los esquemas.

3.4.1 El efecto de la selección

Las cadenas son copiadas a la nueva generación con una probabilidad p_i obtenida a partir del valor de la aptitud f_i dividida por la aptitud total de la generación

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_j f_j} \quad (3.1)$$

Si suponemos que en un instante dado de tiempo existen m ejemplares de un esquema particular \mathbf{H} contenido en la población $m = m(\mathbf{H}, t)$. Para una población $P(t)$ de tamaño n se obtendrá $m(\mathbf{H}, t+1)$ como el valor esperado de instancias de \mathbf{H} en el instante $t+1$

$$m(\mathbf{H}, t+1) = n \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\sum_j f_j} m(\mathbf{H}, t) \quad (3.2)$$

siendo $\bar{f}(\mathbf{H}, t)$ la aptitud media de las cadenas representadas por \mathbf{H} en el instante t . Si la aptitud media \bar{f} de la población en el instante t , es el promedio de las aptitudes de todas las cadenas de la población en tiempo t

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \quad (3.3)$$

De esta manera, la ecuación de crecimiento reproductivo del esquema, queda

$$m(\mathbf{H}, t+1) = \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} m(\mathbf{H}, t) \quad (3.4)$$

De la Ec. (3.4) se deduce que los esquemas con aptitud por encima de la media tienden a proliferar en las sucesivas generaciones, y por el contrario, esquemas con aptitud por debajo de la media tienden a desaparecer.

Para estimar la eficiencia del proceso de evolución, suponemos un esquema \mathbf{H} por encima (o por debajo) de una cantidad $C\bar{f}$ (C es una constante), entonces

$$m(\mathbf{H}, t+1) = m(\mathbf{H}, t) \frac{\bar{f} + C\bar{f}}{\bar{f}} = m(\mathbf{H}, t)(1+C) \quad (3.5)$$

y comenzando en $t = 0$

$$m(\mathbf{H}, t) = m(\mathbf{H}, 0)(1+C)^t \quad (3.6)$$

Lo que significa que el número de cadenas que representan al esquema \mathbf{H} en las sucesivas generaciones crece (o decrece) de forma exponencial durante la evolución.

3.4.2 El efecto del cruce

Si p_c es la probabilidad de cruce, el valor esperado para las cadenas que representan al esquema \mathbf{H} , que han sido seleccionadas, y a las que no se les aplica el cruce es

$$(1-p_c)m(\mathbf{H}, t) = \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} \quad (3.7)$$

por tanto, el valor esperado para el número de cadenas que representan al esquema \mathbf{H} , que fueron seleccionadas, y permanecen en el esquema después de aplicar el cruce es

$$p_c \left(m(\mathbf{H}, t) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} (1-p_r) + g \right) \quad (3.8)$$

donde p_r es la probabilidad de ruptura del esquema \mathbf{H} según el tipo de cruce utilizado, y g el número de cadenas tomadas por el esquema \mathbf{H} . Condensando las Ecs. (3.7) y (3.8), obtenemos que el valor final esperado del número de representantes del esquema \mathbf{H} tras haber efectuado el proceso de selección y cruce es

$$m(\mathbf{H}, t+s, c) = (1-p_c)m(\mathbf{H}, t) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} + p_c \left(m(\mathbf{H}, t) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} (1-p_r) + g \right) \quad (3.9)$$

de modo que, la Ec. (3.7) representa el aporte de las cadenas de \mathbf{H} que no intervinieron en el cruce, y la Ec. (3.8) el aporte de las cadenas de \mathbf{H} que se cruzan y se mantienen en \mathbf{H} , más las cadenas que no eran de \mathbf{H} , pero tras el cruce pasan a formar parte de éste.

Si las cadenas se cortan por un solo punto, la probabilidad de romper el esquema \mathbf{H} es

$$p_r \leq \frac{\partial(\mathbf{H})}{L-1} \quad (3.10)$$

donde $\partial(\mathbf{H})$ es la longitud característica del esquema \mathbf{H} (distancia entre la primera y la última posición fijas en la cadena), y L la longitud de la cadena.

Si eliminamos g de la Ec. (3.9), y reorganizamos la expresión obtenemos

$$m(\mathbf{H}, t + s, c) \geq m(\mathbf{H}, t) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} + (1 - p_c p_r) \quad (3.11)$$

En el algoritmo original de Holland el proceso de selección de un individuo para realizar el cruce se efectúa sin predisposición. Así que, la probabilidad de que esta cadena encaje en el esquema es

$$P(\mathbf{H}, t) = \frac{m(\mathbf{H}, t)}{n} \quad (3.12)$$

teniendo en cuenta la Ec. (3.12), podemos definir nuevamente p_r como

$$p_r \leq \frac{\partial(\mathbf{H})}{L-1} (1 - P(\mathbf{H}, t)) \quad (3.13)$$

considerando que el par progenitor puede recuperar parte de un patrón destruido por el cruce, obtenemos

$$P(\mathbf{H}, t + 1) \geq P(\mathbf{H}, t) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\partial(\mathbf{H})}{L-1} (1 - P(\mathbf{H}, t)) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} \right) \quad (3.14)$$

lo que confirma que los esquemas de longitud pequeña tienen una probabilidad mayor de sobrevivir a la operación de cruce.

3.4.3 El efecto de la mutación

Si p_m es la probabilidad de mutación, y que tiene el efecto de invertir un bit (cambiar un “1” por un “0” ó viceversa). Para que una cadena representante del esquema \mathbf{H} permanezca en éste después de una mutación, debe ocurrir que ninguno de los bits que definen el esquema sea invertido.

$$\mu(p_m) = (1 - p_m)^{\theta(\mathbf{H})} \quad (3.15)$$

donde $\theta(\mathbf{H})$ es el orden del esquema \mathbf{H} (número de posiciones fijas que contiene el esquema). En el caso de que $p_m \ll 1$ tenemos que

$$\mu(p_m) \approx (1 - p_m)\theta(\mathbf{H}) \quad (3.16)$$

añadiendo la Ec. (3.16), a la expresión definida en la Ec. (3.14) obtenemos

$$P(\mathbf{H}, t + 1) \geq P(\mathbf{H}, t) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\partial(\mathbf{H})}{L-1} (1 - P(\mathbf{H}, t)) \frac{\bar{f}(\mathbf{H}, t)}{\bar{f}} \right) (1 - p_m)\theta(\mathbf{H}) \quad (3.17)$$

Este resultado recibe el nombre de *Teorema de los esquemas* o *Teorema fundamental de los algoritmos genéticos*, y del cual se extraen las siguientes conclusiones:

- La presencia de un esquema H en una población P , en la generación g , evoluciona en un algoritmo genético de modo exponencial.
- Los esquemas de orden bajo adaptados por encima de la media reciben un número exponencialmente creciente de oportunidades en las siguientes generaciones.
- Los esquemas con aptitud por encima de la media incrementan exponencialmente su presencia en sucesivas generaciones. Por el contrario, los esquemas con aptitud por debajo de la media disminuyen exponencialmente su presencia en sucesivas generaciones.
- La tendencia de los esquemas mejor adaptados a incrementar su presencia en sucesivas generaciones se acentúa cuando el esquema es corto, y de bajo orden.

No obstante, debemos de tener que tener en cuenta que el teorema de los esquemas: (1) es solamente una cota inferior, es decir, no es completamente exacto, (2) que no resulta muy útil para predecir el comportamiento de un AG a largo plazo, (3) que sólo considera los efectos destructivos de los operadores genéticos, y no los efectos constructivos, y (4) que está acotado a un AG que utiliza los operadores: selección por ruleta, cruce por un punto, y probabilidad de mutación uniforme.

A pesar de la ruptura (debido a los operadores cruce y mutación) de los esquemas largos y de orden elevado, los algoritmos genéticos procesan una gran cantidad de esquemas mientras, evalúan una cantidad de individuos relativamente pequeña (Forrest, 1993).

De esta forma, aunque sólo evalúan n estructuras en cada generación, se puede probar (bajo hipótesis muy generales) que se procesan de modo útil al menos n^3 esquemas.

Este *paralelismo implícito* se consigue sin ningún dispositivo o memoria adicional, permitiendo a los algoritmos genéticos funcionar particularmente bien en aquellos problemas donde el espacio de soluciones posibles es grande.

3.5 ELEMENTOS DE UN ALGORITMO GENÉTICO

La aplicación más común de los algoritmos genéticos ha sido la resolución de problemas de optimización. Sin embargo, no todos los problemas resultan apropiados para su resolución mediante esta técnica, y se recomienda observar si se cumplen las siguientes premisas antes de su aplicación:

- El espacio de búsqueda debe estar delimitado dentro de un cierto rango.
- Es posible definir una función de aptitud que nos indique como de aptos son los individuos de una población.
- Las soluciones deben poder codificarse de forma que resulte relativamente fácil su implementación en una computadora.

En general, para modelizar el proceso evolutivo mediante un algoritmo genético se requiere: (1) codificar el espacio de soluciones, (2) definir una función de aptitud, y (3) establecer unos operadores que afecten a las estructuras de los individuos (selección, cruce, mutación, etc.).

El proceso de codificación, como se verá más adelante, representa uno de los puntos que determina la eficiencia del algoritmo. El algoritmo genético necesita una función de aptitud (también denominada, de capacidad, de potencial, de bondad, ó de idoneidad) que asigne una valoración a los cromosomas. La definición de la función de aptitud debe considerarse cuidadosamente; ya que si se define mal o de forma inexacta, puede que el algoritmo genético sea incapaz de encontrar una solución al problema, o acabar resolviendo un problema equivocado, o por lo menos distinto.

Uno de los requisitos que debe cumplir la función de aptitud es penalizar las soluciones peores y premiar a las mejores, de forma que se propaguen con mayor rapidez a lo largo de las distintas generaciones. De esta forma, las soluciones codificadas en un cromosoma compiten entre si para ser la mejor de las soluciones (aunque no necesariamente, la mejor de todas las soluciones posibles). El entorno, constituido por el resto de soluciones ejercerá una presión selectiva sobre la población, de forma que sólo las mejor adaptadas, sobrevivan, y leguen su material genético en la siguiente generación.

La mayoría de los algoritmos genéticos son variaciones del algoritmo genético simple propuesto por Goldberg (1989). Este algoritmo se compone de tres operadores básicos: reproducción, cruce y mutación. La reproducción se considera como el motor básico para la selección natural Darwiniana y la supervivencia del más apto. El cruce produce variaciones genéticas en la población, mediante nuevas cadenas, a partir de las subcadenas de los padres seleccionados. Y la mutación introduce diversidad genética mediante la alteración aleatoria de los cromosomas.

3.6 ESTRUCTURA DE UN ALGORITMO GENÉTICO SIMPLE

El algoritmo genético comienza a partir de un conjunto de individuos (obtenidos de forma aleatoria o a partir de individuos apropiados para el problema). Los individuos de la población son seleccionados en función de su aptitud, permitiendo su recombinación y mutación. Una vez obtenida la nueva población de individuos se evalúan de nuevo, repitiendo este proceso hasta satisfacer el criterio de parada (Fig. 3.2).

A continuación, se describe de forma más detallada los pasos necesarios para desarrollar un algoritmo genético.

1. Decidir como codificar el dominio del problema, la función de aptitud, y el tipo de operadores.
2. Generar un conjunto inicial (población) de n soluciones (individuos), donde n es el tamaño de la población.
3. Evaluar la aptitud para cada individuo.
4. Obtener una nueva población de individuos mediante la repetición de los siguientes tres pasos:
 - 4.1 Selección: elegir dos individuos (padres) de la población, de acuerdo a su aptitud.

- 4.2 Cruce: con una probabilidad inferior a la de cruce, los padres seleccionados recombinan su información para obtener dos nuevos individuos (hijos), de lo contrario los dos individuos resultantes serán una copia exacta de los padres.
- 4.3 Mutación: a partir de la probabilidad de mutación, mutar los alelos de los nuevos individuos.
5. Reemplazar la generación anterior por la nueva población.
6. Si el criterio de parada se satisface, finalizar. En caso contrario volver al paso 3.

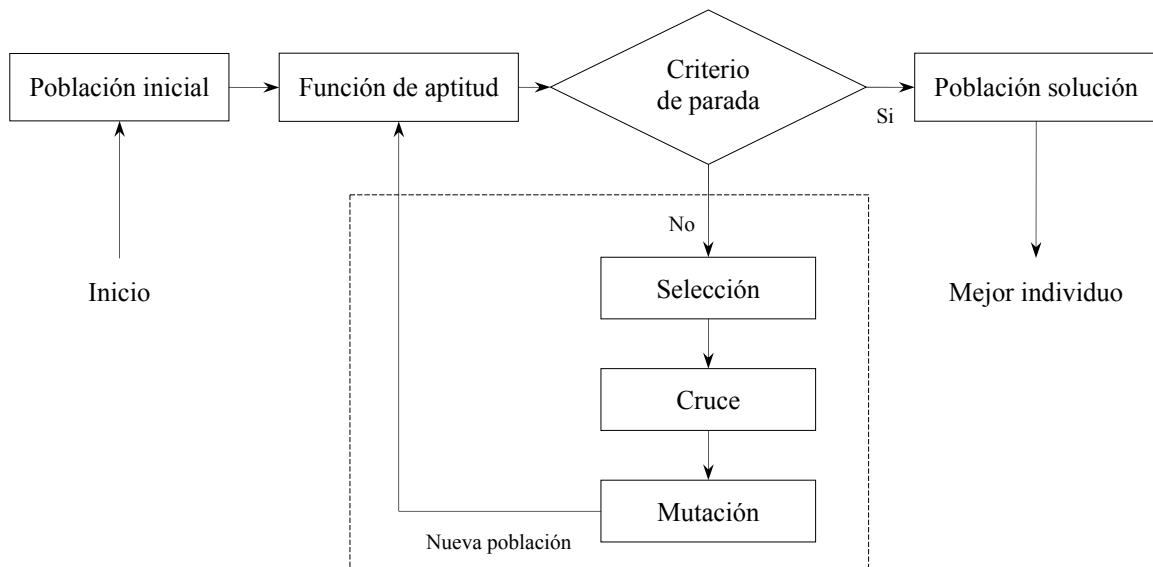


Figura 3.2 Diagrama de flujo de un algoritmo genético simple

3.7 OPERADORES GENÉTICOS

Antes de comenzar esta breve introducción sobre los operadores selección, cruce, y mutación apuntar, que en la redacción de este apartado, un número importante de consideraciones han sido omitidas. Esta acotación se ha realizado ya que, una discusión en profundidad sobre sus distintos aspectos teóricos no resulta posible dentro de los términos de este trabajo. Los interesados en profundizar más en estos aspectos pueden recurrir a textos alternativos como: Golberg (1989), Davis (1991), Whitley (1993) y Bäck (1997).

3.7.1 Selección

El objetivo de la selección es elegir las mejores soluciones y desplazar fuera de la población aquellas cuya aptitud sea inferior. Una característica importante del operador selección es que, no depende del tipo de representación elegida para codificar los individuos, tan solo se tiene en cuenta el valor de la aptitud.

La presión que este operador ejerce en el proceso de búsqueda es muy importante ya que, si es elevada, la búsqueda termina prematuramente. Por el contrario, si es insuficiente, el algoritmo evoluciona muy lentamente. Por tanto, lo más adecuado es mantener un nivel de

presión mínimo al inicio (amplia exploración), aumentado la presión al final del proceso para explotar solo aquellas regiones cuyas soluciones son prometedoras.

Conceptos básicos relacionados con el proceso de selección:

1. Espacio muestral:
 - Regular: población de tamaño constante.
 - Aumentado: tamaño de la población igual al tamaño de la población anterior, más la cantidad descendientes.
2. Mecanismo muestral para la selección de individuos:
 - Muestreo estocástico: selección por ruleta.
 - Muestreo determinístico: selección truncada, en bloque, elitista, con reemplazo generacional.
 - Muestreo mezclado: torneo, torneo estocástico.
3. Tipos de selección en función de su presión selectiva:
 - Estabilizada: tiende a eliminar los cromosomas con valores extremos.
 - Direccional: incrementa o disminuye el valor medio de la población.
 - Quebrantada: tiende a eliminar cromosomas con aptitud intermedia.
4. Probabilidad de selección:
 - Por escalamiento: estático, dinámico, lineal, lineal–dinámico, logarítmico.
 - Por orden: ordenamiento o ranqueo.

A continuación, se describen algunos de los procedimientos más utilizados para la selección de individuos:

- Selección elitista: se garantiza la selección de los miembros más aptos de cada generación. La mayoría de los AGs no utilizan elitismo puro, sino que usan una forma modificada por la que el mejor individuo, o algunos de los mejores son copiados directamente hacia la siguiente generación.
- Selección proporcional a la aptitud: los individuos con mejor aptitud tienen una mayor probabilidad de ser seleccionados, por lo tanto la probabilidad de selección asignada a estos individuos debe de ser mayor. Asignadas las probabilidades de selección a cada individuo, se obtiene una nueva población a partir de éstas.
- Selección por rueda de ruleta: método conceptualmente similar al anterior.
- Selección por torneo: se realizan subgrupos de individuos, y los miembros de cada subgrupo compiten entre sí, eligiendo para la reproducción al mejor de individuo de cada subgrupo.
- Selección por rango: la selección de los individuos se realiza a partir de un rango numérico establecido según la aptitud.
- Selección generacional: la descendencia de los individuos seleccionados en cada generación se recombina en la siguiente generación. Es decir, no se conservan individuos pertenecientes a generaciones anteriores.

- Selección por estado estacionario: la descendencia de los individuos seleccionados en cada generación vuelve a la población existente, reemplazando algunos de los miembros menos aptos, y conservando de este modo algunos de los individuos más aptos entre generaciones.
- Selección jerárquica: los individuos en cada generación atraviesan diferentes rondas de selección. La selección en los primeros niveles son rápidas y poco restrictivas, aumentando el grado de exigencia conforme subimos en los niveles. La ventaja de este método es la reducción del tiempo de cálculo, al utilizar una evaluación menos selectiva pero más rápida, que elimina a la mayoría de los individuos poco prometedores, sometiendo a una evaluación más rigurosa, sólo a los individuos que superan esta preselección.

3.7.1.1 Selección por ruleta

La más popular de las estrategias de selección estocásticas es la selección por aptitud proporcionada, también denominada selección por ruleta (*roulette wheel*). Esta se puede ilustrar como el reparto de los pedazos de un pastel, donde el tamaño de cada uno de esos pedazos es proporcional a la aptitud de cada uno de los individuos. La selección de un individuo se realiza mediante un giro de la ruleta, resultando seleccionado aquel pedazo en donde el giro acaba. Aunque éste es un mecanismo aleatorio, la oportunidad de que el individuo sea seleccionado es proporcional al tamaño del pedazo de pastel (aptitud). De esta forma, los individuos menos aptos son desplazados de la población conforme se suceden los giros de la ruleta.

3.7.1.2 Selección por torneo

Dentro de los métodos de selección por muestreo mezclado, la estrategia más utilizada es la conocida como selección por torneo (Deb y Golberg, 1989; Goldberg, Deb, y Korb, 1991). El método es sencillo, se elige aleatoriamente una subpoblación de modo que, el individuo con mayor aptitud gana el torneo. Generalmente, los torneos son sostenidos entre dos individuos (torneo binario). Sin embargo, este principio puede ser extendido a un conjunto arbitrario cuya dimensión se denomina tamaño del torneo. Este algoritmo no requiere que los individuos sean ordenados según su aptitud, garantizando en parte la diversidad de la población. El rasgo más importante de este tipo de selección es que, el valor de la aptitud no se utiliza para seleccionar a los individuos, solo para determinar si un individuo es mejor que su oponente.

3.7.1.3 Selección por rango

En la selección por rango (Baker, 1985) los valores de la aptitud se emplean para establecer una jerarquía entre los individuos. Por lo tanto, la probabilidad de selección se define en función del rango y no directamente a partir de la aptitud. Una vez que, la distribución de probabilidades es establecida, el proceso para la selección de los descendientes puede ser realizado mediante un método proporcional. De este modo, los distintos métodos de selección por rango se distinguen, en función de cómo se asigna la probabilidad de selección (rango lineal, clasificación jerárquica no lineal, etc.).

3.7.2 Cruce

El operador de cruce es el encargado de combinar la información de los cromosomas, planteando la búsqueda en otros puntos del espacio de diseño. Los descendientes obtenidos con el operador se componen íntegramente a partir del material genético de sus progenitores. Muchos son los métodos que pueden ser utilizados para escoger la localización, y la longitud del material genético a intercambiar. En los siguientes apartados se describen el cruce por un punto, por dos puntos, uniforme, y adaptativo.

3.7.2.1 Cruce por un punto

La principal característica que distingue a un AG es el uso de la recombinación genética. El cruce por un punto quizás es el método más sencillo. El primer paso consiste en generar un número aleatorio entre “0” y la longitud de la cadena de bits. A continuación, se intercambian las subcadenas de los padres posteriores al punto de cruce formando dos nuevos descendientes. La principal limitación de este tipo de cruce es que, no permite combinar todos los posibles esquemas. Por ejemplo, a partir de 11*****1 y ****11** no se pueden formar instancias del tipo 11**11*1. Por lo que, parte de los esquemas que pueden ser creados o destruidos por este tipo de cruce dependen en parte de la posición de los bits.

3.7.2.2 Cruce por dos puntos

Para reducir el efecto del extremo final, tan determinante en el cruce por un punto, en muchos AGs se introduce el cruce por dos puntos (o el operador inversión), en el cual dos posiciones son elegidas aleatoriamente, intercambiando las subcadenas iniciales y finales. El número de esquemas que se combinan mediante este tipo de cruce supera a los que conseguimos si cruzamos solamente por un punto. Además, los segmentos que son intercambiados no tienen por que ser los extremos finales de las cadenas.

3.7.2.3 Cruce uniforme

El cruce de tipo uniforme (Syswerda, 1989) se apoya en una cadena binaria aleatoria llamada máscara (*mask*) o cadena llave. Por ejemplo, si el bit de la cadena máscara es “0” los bits progenitores situados en la misma posición se intercambian. Por el contrario, si es “1” no se intercambian (De Jong, 1992). Por tanto, el porcentaje de bits que se intercambian entre los progenitores puede ser muy diverso, dependiendo fundamentalmente del número de ceros (o unos) presentes en la cadena máscara.

3.7.2.4 Cruce adaptativo

En los apartados anteriores se han descrito algunos de los métodos más utilizados para combinar la información genética, aunque existen otras alternativas que permiten el intercambio de información (por fenotipo (Prendes, Bello, y Delcoz, 2005), bidimensional (Kane y Schoenauer, 1996), por tres puntos, etc.). La actual teoría de los AGs es incapaz de determinar cual de entre todos estos tipos de cruces resulta a priori más ventajoso para resolver un problema particular.

Existen al menos dos posibles soluciones a este inconveniente: (1) extender las actuales teorías para que tengan en cuenta estos aspectos (De Jong, Spear, y Gordon, 1994), o (2) disponer un mecanismo adaptativo que permita al AG seleccionar en cada generación el tipo de cruce más apropiado. Por ejemplo, un mecanismo que permita elegir entre cuatro tipos de cruce: un punto, dos puntos, tres puntos, y uniforme. Un procedimiento sencillo para implementar este mecanismo consiste, en introducir dos nuevos bits al final de cada individuo de forma que, si los valores son “00” el cruce será por un punto, “01” por dos puntos, “10” por tres puntos, y “11” uniforme.

3.7.3 Mutación

Este fenómeno, poco frecuente en la naturaleza, se puede modelar de la siguiente forma. Cuando se produce un gen¹ hijo se examinan sus bits uno a uno, y se genera un coeficiente aleatorio para cada uno. En el caso de que alguno de los coeficientes supere un cierto umbral se altera el alelo de dicho bit. Mediante la modificación de este umbral podemos variar la probabilidad de la mutación.

La mutación es un mecanismo muy interesante, con el cual se pueden generar nuevos individuos con características distintas a las de sus progenitores. Los tipos de mutación más conocidos, son:

- Mutación de bit: existe una única posibilidad de que se produzca la mutación de algún bit. De producirse, el algoritmo elige aleatoriamente un bit y lo invierte.
- Mutación multi-bit: cada bit tiene una probabilidad de mutarse o no, la cual se recalcula para cada una de las generaciones.
- Mutación de gen: similar a la mutación de bit, solo que, en vez de cambiar un bit, cambia un gen completo, añadiendo un valor aleatorio, constante, o introduciendo un gen aleatorio nuevo.
- Mutación multi-gen: similar al procedimiento multi-bit, solo que, en vez de cambiar un conjunto de bits, cambia un conjunto de genes, añadiendo un valor aleatorio, constante, o introduciendo un nuevo conjunto de genes aleatorios.
- Mutación de intercambio: se intercambia el contenido de dos bits/genes de forma aleatoria.
- Mutación de barajado: existe una probabilidad de que se produzca una mutación. De producirse, toma dos bits o dos genes aleatoriamente, y baraja de forma aleatoria los bits ó genes comprendidos entre los dos.
- Creep: Este operador aumenta (o disminuye) en una unidad el valor de un gen; sirviendo para modificar sus valores de forma más controlada.

¹ Asociaremos el concepto de gen a una subcadena de la cadena que representa al individuo.

3.7.4 Otros operadores

No se emplean en todos los problemas, y su variedad es casi ilimitada. Generalmente, son operadores que exploran el espacio de soluciones de una forma más ordenada; actuando de forma exhaustiva en las últimas fases de la búsqueda, en las cuales se determina si el proceso se termina con una solución aceptable, o con la solución óptima.

3.7.4.1 Operadores de nicho

Los operadores de nicho (*niching*) se utilizan principalmente (en problemas con muchas soluciones posibles) para mantener la diversidad genética de forma que, cromosomas similares sólo sustituyen a cromosomas similares.

Un algoritmo genético que disponga de estos operadores puede ser capaz de encontrar todos los máximos posibles, dedicándose cada especie a un máximo en particular. Aunque en ocasiones, más que operadores genéticos, los operadores de nicho son estrategias para enfocar la selección y la evaluación de la población (Horn, Golberg, y Kalyanmoy, 1994).

Una forma de llevar a cabo este operador es la descrita anteriormente, y se denomina apiñamiento (*crowding*). Otra forma es introducir una función de compartición (*sharing*) que indique cuán similar es un cromosoma con respecto de la población. La puntuación de cada individuo se dividirá por esta función de compartición, de forma que se facilite la diversidad genética. También se pueden restringir los emparejamientos entre cromosomas similares, evitando las consecuencias indeseables de la endogamia (*inbreeding*), sobre todo en el caso de poblaciones pequeñas. Evidentemente, estos periodos también se pueden intercalar con otros, en los cuáles el emparejamiento resulte libre o por lo menos no intervenido.

3.7.4.2 Elitismo

Cuando se emplea un algoritmo genético tradicional, se puede observar como el mejor de los individuos de una población puede perderse, si se introducen los operadores de cruce y mutación. La estrategia elitista (Davis, 1991) consiste en copiar el mejor cromosoma (o un pequeño grupo con los mejores individuos) directamente en la nueva población, generando el resto de los individuos mediante el procedimiento convencional. Consecuentemente, el elitismo acelera la convergencia del algoritmo porque evita la pérdida de información valiosa. Sin embargo, también puede inducir cierta tendencia hacia mínimos (o máximos) locales, aunque esto se puede prevenir mediante un ligero aumento de la mutación.

3.7.4.3 Operador micro-genético

El operador microgenético o como ya se ha denominado algoritmo micro-genético (μ -GA) fue introducido por Krishnakumar (1989). El principal objetivo de esta metodología es reducir el tamaño de la población, en comparación con los que habitualmente se utilizan en un algoritmo genético simple. Sin embargo, fue un hecho conocido que los resultados obtenidos resultaban pobres, debido a la insuficiente información contenida en la población (5 individuos), y una convergencia prematura hacia soluciones no óptimas.

Para remediar este problema, Goldberg (1989) sugirió que la población debía ser reiniciada si se observaba su convergencia, incluyendo en la nueva población la mejor de las soluciones conseguidas hasta ese momento. Para ello se contabiliza el número de alelos en la población cuyo valor difiere respecto del mejor cromosoma. Si el número de bits es inferior a un umbral (aproximadamente, un 5%) la población se considera que ha convergido, sustituyendo la actual población por otra aleatorizada, que contiene la mejor de las soluciones hasta el momento obtenida.

3.8 AJUSTE Y CONTROL DE UN ALGORITMO GENÉTICO SIMPLE

Los dos puntos principales a la hora de emplear un algoritmo genético son la codificación y la función de aptitud, aspectos que trataremos más adelante.

Cuando diseñamos un algoritmo genético también necesitamos elegir cuales deben ser sus mecanismos: operadores de variación (recombinación, inversión, mutación, etc.), proceso de selección, etc. Estos mecanismos suelen llevar asociados una serie de parámetros como, la probabilidad de mutación y cruce, tamaño del torneo, tamaño de la población, etc. Influyendo de modo drástico en la eficiencia del algoritmo.

En general, se distinguen dos alternativas para determinar el valor de los parámetros: (1) su ajuste (*tuning parameter*), o (2) su control (*control parameter*). La técnica del *ajuste* se basa en la experiencia, estableciendo el valor del parámetro si se comprueba que proporciona buenos resultados. La otra alternativa es el *control*, en el cual se comienza con unos valores iniciales, valores que en caso necesario se modifican durante el proceso.

3.8.1 Ajuste

Durante la década de los años 1980, el algoritmo genético basado en una codificación binaria, cruce por un punto, mutación de bit, y selección por ruleta fue aplicado de forma masiva. De modo que, el diseño del algoritmo se limitaba a definir estratégicamente que valores debían recibir los parámetros.

Dos de entre los numerosos intentos para mejorar la eficiencia de los algoritmos genéticos merecen ser destacados. En ambos acercamientos, el objetivo final consistía en encontrar un conjunto general de valores capaz de llevar al algoritmo hacia el óptimo.

De Jong (1975) invirtió un considerable esfuerzo en encontrar un conjunto de valores que proporcionaran buenos resultados para un conjunto de funciones tests. Sus conclusiones fueron que, los siguientes parámetros proporcionaban soluciones bastante aceptables para el conjunto de los problemas contrastados (para otros problemas, pueden no proporcionar tan buenos resultados): tamaño de la población (50), probabilidad de cruce (0,6), probabilidad de mutación (0,001), y elitismo.

Grefenstette (1986) utilizó un meta-GA para optimizar los parámetros del algoritmo genético, obteniendo que el mejor conjunto fue: tamaño de población (30), probabilidad de cruce (0,95), probabilidad de mutación (0,01), y elitismo.

Desgraciadamente, desde los primeros intentos desarrollados por Bremermann y Rogson (1966), hasta la actual visión de los algoritmos genéticos (Goldberg, Deb, y Clark,

1992; Smith, 1993; Chen y Rajan, 1999; Woon, Tong, Querin, y Steven, 2003), se ha comprobado que cada problema requiere de un ajuste particular, para que pueda desarrollar completamente su potencial.

En la tabla 3.2 se recogen algunos de los valores utilizados por diferentes autores (Al-Tabtabai y Alex, 1996) para el tamaño de la población, probabilidad de cruce y mutación, y número máximo de generaciones.

Tabla 3.2 Valores asignados por diferentes autores para el ajuste de los parámetros de un AG

| Autor/es | Población | Probabilidad de cruce | Probabilidad de mutación | Número máximo de generaciones |
|----------------------------------|-------------|-----------------------|--------------------------|-------------------------------|
| De Jong (1975) | No menciona | 0,60÷0,80 | 0,010÷0,020 | No menciona |
| Grefenstette (1986) | 80 | 0,45 | 0,010 | 20 |
| Wang (1991) | 100 | 1,00 | 0,010 | 50 |
| Janson y Frenzel (1993) | 100 | No menciona | 0,001 | 500 |
| Ball, Sargent, y Ige (1993) | 100 | 0,30 | 0,006 | 180 |
| Koumousis y Georgiou (1994) | 20 | 0,60 | 0,010 | 100 |
| Srinivas y Patnail (1994) | 30÷200 | 0,50÷1,00 | 0,001÷0,05 | No menciona |
| Croce, Tadeo, y Volta (1995) | 300 | 1,00 | 0,030 | 3000 |
| Dorndoft y Pesch (1995) | 200 | 0,65 | 0,001 | 300 |
| Tate y Smith (1995) | 100 | 0,25 | 0,750 | 2000 |
| Keane (1995) | 100 | 0,80 | 0,005 | 10 |
| Suresh, Vinod, y Sahu (1996) | 40÷60 | 0,50÷0,70 | 0,100 | No menciona |
| Carroll (1996) | 100÷200 | 0,60 | 0,010÷0,005 | 20 |
| Carroll (1996) | 50 | 0,50 | 0,020÷0,040 | 12 |
| Roston y Sturges (1996) | 200 | 0,50 | 0,010 | 150 |
| Furuta, He, y Watanabe (1996) | No menciona | 0,25 | 0,010 | No menciona |
| Liu, Hammad, y Itoh (1997) | 50 | 0,80 | 0,010 | 100 |
| Gätzi, Uebersax, y König (2000) | 25÷125 | 0,60÷0,90 | 0,005÷0,05 | 100 |
| Nankorn y Meesomklin (2001) | 40 | 0,8 | 0,001 | 100 |
| Nankorn y Meesomklin (2001) | 50 | 0,85 | 0,05 | 100 |
| Annicchiarico y Cerrolaza (2002) | 100 | 1,00 | 0,020 | 50 |
| Victoria y Martí (2005) | 20 | 0,8 | 0,003 | 300 |

3.8.2 Control

Básicamente, existen dos formas para controlar el valor de los parámetros de un algoritmo genético: (1) mediante un mecanismo de realimentación heurístico, basado en el seguimiento de ciertos estimadores como, la diversidad en la población, mejora relativa, calidad absoluta de la solución, etc., o (2) incorporando los propios parámetros dentro de los cromosomas, permitiendo que el proceso evolutivo sea el encargado de controlar sus propios valores.

3.8.2.1 Tamaño de la población

El tamaño de la población determina cuantos cromosomas están presentes en una generación. Si el tamaño es pequeño, el AG tendrá pocas posibilidades de recombinar su información, y solo una pequeña región del espacio de búsqueda será explorada. Por el contrario, si existe un número excesivo de cromosomas, el AG converge de forma más lenta, sin que por ello necesariamente se aporten soluciones mejores.

Muchos investigadores han estudiado el tamaño de la población. Goldberg, Deb, y Clark (1992) desarrollaron modelos teóricos para intentar determinar su tamaño óptimo. Otros investigadores intentaron obtener su valor óptimo de forma empírica.

De Jong (1975) experimentó con poblaciones de tamaño comprendido entre 50 y 100. Grefenstette (1986) utilizó un meta-GA para controlar el tamaño de la población entre 30 y 80 individuos. Schaffer (1989) recomienda un tamaño entre 20 y 30. Woon (2001) plantea una relación entre el tamaño de población y la longitud del cromosoma. Schlierkamp-Voosen y Mühlenbein (1994) recurren a un esquema en el que un conjunto de subpoblaciones (de tamaños variables) compiten entre sí, manteniendo constante el número total de individuos.

3.8.2.2 Probabilidad de cruce

La probabilidad de cruce determina con que frecuencia debe ser realizada la recombinación. Si el cruce no se realiza, los descendientes son copias exactas de los padres. Si el cruce se realiza, los hijos se generan a partir de las estructuras de sus progenitores. En el caso de que, la probabilidad sea del 100%, entonces todos los descendientes se reconstruyen a partir de la recombinación de los padres. Si es del 0%, la nueva generación se forma mediante copias exactas de los cromosomas, lo que no quiere decir que la generación sea la misma.

Davis (1991) plantea que el valor asignado al umbral depende de la aptitud de los resultados (*adaptive operator fitness*), premiando aquellos umbrales que proporcionan mejores individuos. Julstrom (1995) también propone un mecanismo adaptativo, que regula a partir de los resultados la probabilidad de cruce (y mutación). White y Oppacher (1994) investigaron el uso de una probabilidad adaptativa, que controla el intercambio de alelos en el cruce uniforme. Aunque en la actualidad, los valores más utilizados (mediante un ajuste tradicional), son: De Jong (60%), Grefenstette (95%), Schaffer (75 a 95 %).

3.8.2.3 Probabilidad de mutación

La probabilidad de mutación establece con que frecuencia, partes del cromosoma serán mutadas. Si no hay mutación, los descendientes son generados inmediatamente después del cruce (o directamente copiados) sin ningún cambio. Si la mutación se lleva a cabo, una o más partes de los cromosomas serán alteradas. De este modo, si la probabilidad de mutación es del 100%, el cromosoma entero será modificado, y si es del 0% permanece sin cambios.

Podemos encontrar muchos trabajos dedicados a ajustar la probabilidad de mutación. Desafortunadamente, los resultados (y por tanto los valores recomendados) son muy variados, no quedando totalmente claro cual es su valor óptimo. De Jong (1975) recomienda (0,001), Grefenstette (1986) considera (0,01), mientras que Schaffer (1989) indica (0,005 a 0,01).

Mühlenbein (1992) plantea que la probabilidad de mutación está relacionada con la longitud de la cadena de bits, concretamente con el inverso de su valor. Bäch y Shütz (1996) también encuentran que esta relación proporciona valores acertados si la representación utilizada está basada en el código Gray.

Hesser y Männer (1991) obtuvieron una expresión teórica que modifica el valor de la probabilidad de mutación

$$p_m(g) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \right) \frac{e^{-\gamma/2}}{n\sqrt{L}} \quad (3.18)$$

donde α , β , γ son constantes, n el tamaño de la población, g la generación, y L la longitud del cromosoma.

Bäch y Schütz (1996) plantean para controlar la probabilidad de mutación, la siguiente expresión

$$p_m(g) = \left(2 + \frac{L-2}{N} g \right)^{-1} \quad \text{si } 0 \leq g \leq N \quad (3.19)$$

donde g es la generación, L la longitud del cromosoma, y N el número máximo de generaciones.

3.9 CODIFICACIÓN DE LAS VARIABLES DE DISEÑO

Las codificaciones utilizadas en los algoritmos evolucionarios pueden clasificarse atendiendo a diferentes criterios. En la tabla 3.3 se presenta una recopilación en donde los conceptos de clasificación, y sus posibles valores son propuestos por diferentes autores (De Jong, 2006; Horby, 2003; Popovici, 2003).

Uno de los puntos más importantes, a la hora de establecer la taxonomía de la codificación, es elegir entre una representación genotípica o fenotípica. Si se selecciona la representación genotípica (como en el caso del algoritmo genético canónico) se debe asegurar un perfecto trazado entre los dos niveles.

Tabla 3.3 Clasificación de las codificaciones utilizadas en algoritmos evolucionarios

| Concepto | Valores | |
|---|---------------|------------|
| Nivel del algoritmo evolucionario | Genotípico | Fenotípico |
| Estructura del cromosoma | Lineal | No lineal |
| Longitud del cromosoma | Fija | Variable |
| Cambio durante la evolución | Estática | Dinámica |
| Esquema de codificación | Directa | Indirecta |
| Precisión de la solución | Parametrizada | Open-ended |
| Posibilidad de reutilizar la codificación | No generativa | Generativa |
| Correspondencia Genotipo-Fenotipo | Explícita | Implícita |

Para ello, deben de cumplirse los siguientes principios:

- No redundancia: la correspondencia entre la codificación y la solución planteada debe mantener una relación unívoca.
- Legalidad: cualquier alteración, perturbación o combinación de la codificación debe corresponderse con una solución del problema.
- Totalidad: cualquier posible solución al problema debe poder contar con su correspondiente codificación.
- Propiedad Lamarckian: el significado de los alelos para un gen no depende del contexto, para que la descendencia pueda heredar los valores de sus padres.

- Causalidad: pequeñas variaciones en el espacio del genotipo se corresponden con pequeñas modificaciones en el espacio del fenotipo.

Este último principio, requiere de una especial atención, ya que una inadecuada correlación entre los niveles genotípico y fenotípico, puede llegar a causar serios problemas. Por ejemplo, la mutación y la recombinación operan en el nivel genotípico, mientras que la evaluación y la selección de los individuos se realizan en el nivel fenotípico.

Alternativamente, se puede optar por una codificación fenotípica en ambos niveles (estrategias evolutivas canónicas). La principal ventaja de este acercamiento es que no se necesita establecer ninguna correspondencia con el nivel genotípico, satisfaciendo directamente los cinco principios anteriores. Por el contrario, su principal inconveniente es que los operadores evolutivos presentan cierta dependencia con el problema, debiendo ser cuidadosamente elaborados. A pesar de ello, su utilización se ha extendido entre la comunidad de las ESs, aplicándose en muchos de los problemas de optimización en ingeniería.

Otro criterio de clasificación, es la forma en la que se organiza espacialmente el cromosoma. Generalmente, las codificaciones se dividen en *lineales* y *no lineales*. Una codificación lineal se puede idealizar como una representación unidimensional en forma de una lista o cadena (binaria, valores enteros, reales, etc.). Mientras que, una codificación no lineal tiene una estructura en dos o más dimensiones (Hamda y Schoenauer, 2000) organizada en árboles, matrices (*bitarray representation*), etc.

Otra de las propiedades distintivas de los cromosomas es su longitud, pudiendo utilizar codificaciones de *longitud fija* ó *variable*. Permittiéndose en este último caso, que los individuos presenten longitudes diferentes según la generación (Bentley, 2002; Woon, 2003; Kim y de Weck, 2005). Si extendemos aún más la división anterior, podemos distinguir entre codificaciones *estáticas* o *dinámicas*, si el cromosoma no solo puede variar su longitud en el tiempo, sino incluso las características de su estructura.

Por otro lado, las codificaciones pueden ser *directas*, si representan de forma inmediata los conceptos estructurales, o *indirectas* en el caso de codificar reglas sobre como construir estos conceptos (Horby, 2003).

Cuando la topología de un diseño se encuentra prácticamente definida, la codificación más utilizada es la *paramétrica* (Prendes, 2002). Por el contrario, cuando la topología del diseño no está cerrada o resulta muy variable, entonces la representación se denomina *open-ended*.

Las codificaciones que pueden reutilizar fragmentos de un diseño codificado durante la fase de construcción del fenotipo son llamadas *generativas*, y son siempre indirectas. Por el contrario, si no se utiliza esta información se conocen como *no generativas*.

Cuando se diseña un algoritmo genético para resolver un problema dado, elegir cual será el tipo de codificación no es una tarea fácil. Generalmente, para un mismo problema podemos imaginar diferentes codificaciones capaces de sintetizar o integrar el conjunto de las variables a optimizar. Y aunque se comparten los mismos principios de herencia y evolución, los resultados obtenidos para un mismo problema con distintas codificaciones pueden ser muy diferentes.

La codificación *binaria* es quizás la más utilizada, debido en primera instancia a su sencillez, y en segundo lugar por motivos históricos, ya que Holland comenzó sus prácticas empleando este tipo de codificación, argumentando que si comparamos dos codificaciones con la misma capacidad de información, una con un número pequeño de alelos pero de longitud grande, frente a otra con un número grande de alelos pero de longitud pequeña, la primera codificación permitía combinar más esquemas.

Este tipo de representación ha sido muy utilizada para la optimización de estructuras, sobre todo por los métodos del *universo estructural* (Dorn, Gomory, y Greenberg, 1964). Ahora bien, cuando el dominio de un problema no puede ser definido mediante vectores binarios, es necesario establecer una correspondencia (Annicchiarico y Cerrolaza, 1999; Woon, Querin, y Steven, 2003; Victoria y Martí, 2004) entre el espacio binario (genotipo), y el espacio de soluciones (fenotipo). Sin embargo, algunos autores (Michalewicz, 1992; Bäck, 1996) argumentan que esta técnica no es apropiada ya que, el espacio en donde el AG desarrolla su búsqueda es distinto al que define el problema original, pudiendo ser que la solución óptima (p. Ej. debido a la resolución de la malla) no pueda alcanzarse, ya que no todos los puntos están recogidos en el espacio de búsqueda binario.

Otro problema que se produce (en algunas ocasiones) cuando utilizamos la codificación binaria es la falta de continuidad o causalidad. Es decir, que dos soluciones que en nuestro espacio fenotípico son consecutivas, no lo son en el espacio genotípico. Por lo que, en muchas de estas ocasiones se elige el código Gray.

La codificación más popular para el diseño óptimo de topología es denominada cadena de bits (*bitstrings representation*). Esta codificación es una de las más naturales, ya que se genera a partir de una malla de elementos regulares, en donde cada uno de los elementos cuenta con un alelo binario. Si el valor es “1” indica la presencia de material, y si el valor es “0” la ausencia del mismo. La reconstrucción del cromosoma (unidimensional) se realiza mediante la concatenación de los bits (Chapman, Saitou, y Jakiela, 1994; Chapman y Jakiela, 1995; Wang y Tai, 2005). Sin embargo, los límites de esta representación aparecen cuando el nivel de discretización es elevado, necesitando poblaciones de gran tamaño para alcanzar la convergencia en un tiempo razonable. Kim y de Weck (2005) aceleran la convergencia de la optimización empleando cromosomas de tamaño variable, eliminando de los cromosomas aquellos bits que representan elementos con una baja energía de deformación.

Otro tipo de codificación, aunque no tan extendida como la anterior, es la llamada representación de Voronoï, a través de la cual codificamos el dominio en particiones. Estas celdas (*Voronoi cells*) son subconjuntos poliédricos del dominio dado, los cuales se etiquetan con “1” si están compuestos por material, y con un “0” si resultan vacíos.

Los principios entorno a los diagramas de Voronoï son ya conocidos por los usuarios del MEF, y se demuestran como una potente herramienta para conseguir excelentes mallas. Sin embargo, su aplicación a la optimización de estructura resulta más original (Boissonnat, 1995; Schoenauer, Kallel, y Jouve, 1996).

La idea de partir de un dominio inicial, y retirar el material en aquellas regiones donde la tensión es mínima (Dejonghe, 1993), dio a lugar a la codificación de agujeros (*holes*

representation) también denominada codificación-H. Y sus características más representativas son: (1) el dominio inicialmente se representa con material, (2) una lista (de longitud variable) de agujeros (rectángulos, triángulos, círculos, etc.) es la encargada de describir la topología de la estructura, y (3) la lista de agujeros está controlada por los operadores:

- Cruce mediante intercambio geométrico de agujeros.
- Mutación para la modificación de las características de los agujeros.
- Mutación por adición o destrucción de algunos agujeros.

Basada en la teoría gráfica, la codificación morfológica (*morphological representation*), actualmente denominada representación gráfica (*graph representation*) optimiza la topología de una estructura mediante: (1) curvas de Bezier, que conectan los soportes de la estructura con aquellos puntos en donde están aplicadas las cargas, y (2) un cromosoma de valores reales, en el cual se dispone información relativa a los puntos de inicio y fin de las curvas, número de elementos de control, y ancho de las curvas.

Los resultados (Wang y Tai, 2004) obtenidos demuestran la calidad del procedimiento en términos de conectividad y velocidad de convergencia, siendo computacionalmente muy efectiva para el diseño óptimo de topología con algoritmos genéticos.

Tabla 3.4 Codificaciones más utilizadas para la optimización de estructuras con algoritmos genéticos. Tipo de optimización y longitud del cromosoma

| Autor/es | Tipo de optimización | Longitud del cromosoma | Codificación |
|--|----------------------|------------------------|--------------|
| Jenkins (1991) | Forma | Fija | Bitarrays |
| Jensen (1992) | Topología | Fija | Bitarrays |
| Richards y Shepard (1992) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Sandgren y Jensen (1992) | Topología | Fija | Bitarrays |
| Chapman, Saitou, y Jakiela (1993) | Topología | Fija | Bitarrays |
| Watabe y Okino (1993) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Chapman, Saitou, y Jakiela (1994) | Topología | Fija | Bitstrings |
| Wibowo y Besari (1998) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Kita y Tanie (1998) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Annicchiarico y Cerrolaza (1999) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Annicchiarico y Cerrolaza (2001) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Deb y Goel (2001) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Hamda, Jouve, Lutton, Schoenauer, y Sebag (2002) | Topología | Variable | Voronoi |
| Hamda, Roudenko, y Schoenauer (2002) | Topología | Variable | Voronoi |
| Woon, Querin, y Steven (2003) | Forma | Fija | Bitstrings |
| Woon, Tong, Querin, y Steven (2003) | Forma | Variable | Bitstrings |
| Victoria y Martí (2004) | Topología | Fija | Bitstrings |
| Wang y Tai (2005) | Topología | Fija | Bitarrays |
| Kim y de Weck (2005) | Topología | Variable | Bitarrays |
| Victoria y Martí (2006) | Topología | Fija | Bitstrings |

3.10 FUNCIÓN DE APTITUD

El valor de la aptitud puede obtenerse, mediante:

- Una función de aptitud.
- A través de la comparación entre todos los individuos.

- Y en caso, de no existir una función de aptitud explícita, mediante un evaluador que reconozca la bondad de los diseños.

Por consiguiente, la función de aptitud es una función que aplicada sobre una población de individuos produce como resultado:

1. Un rango que mide la calidad de las soluciones.
2. Una conexión entre el proceso evolutivo y el problema considerado.
3. Una medida del coste computacional asociado al algoritmo genético.

Aunque los algoritmos genéticos fueron inicialmente desarrollados para resolver problemas de optimización sin restricciones (ver tabla 3.5), durante estos últimos años se han desarrollado muchas estrategias con el propósito de incorporar estas restricciones:

Tabla 3.5 Funciones de aptitud empleadas en algoritmos genéticos para la optimización de forma y topología de estructuras continuas

| Autor/es | Función de aptitud |
|--|---|
| Annicchiarico y Cerrrolaza (1999) | $(\text{weight}) + \lambda \Delta\sigma ^2 + \mu \Delta V_p ^2 + \pi H_l(g_c, 0) + \zeta(g_c, 0)$ |
| Hamda y Schoenauer (2000) | $(\text{weight}) + \alpha(D_{\max} - D_{\min})^+$ |
| Jakiela, Champan, Duda, Adewuya, y Saitou (2000) | $1/(\delta_{\max})$ $1/\ln(\text{compliance})$ $1/(\text{displacement})(\text{area})$ $1/(\text{displacement})(\text{area})(\text{perimeter})$ $1/(\text{displacement})(\text{area})(\text{holePerimeter})$ $1/(\text{displacement})(\text{area}) + (c(\text{area})/\text{perimeter})$ $1/(\text{displacement})(\text{area})(\text{numberOfHoles}+1)$ $1/(\text{displacement})(\text{area}) + (c(\text{area})/\text{holePerimeter})$ $1/(\text{displacement})(\text{area}) + (c(\text{holePerimeter})/\text{holeArea})$ |
| Woon, Querin, y Steven (2001) | $1/(\text{weight})(\text{meanDeflection})$ |
| Woon, Querin, y Steven (2003) | $L/(\sum v/p)(\sum \alpha)$ |
| Zheng, Querin, Barton, y Brodie (2003) | $1/(\text{weight})(\delta_{\max})$ |
| Woon, Tong, Querin, y Steven (2003) | $1/(\text{compliance})(\text{area})$ $1/\text{desStd}(\sigma)(\text{area})$ |
| Victoria y Martí (2004) | $1/(A + \beta \sum (pb + pd + pt))$ |

- Estrategias de rechazo: eliminan los individuos no factibles. Es una opción bastante popular y funciona correctamente. Sin embargo, los resultados no resultan del todo satisfactorios si el número de restricciones es elevado.
- Estrategias de reparación: reparan los individuos no factibles. Su principal inconveniente es su dependencia con el problema, pudiendo ocurrir que la reparación sea tan compleja como resolver el propio problema de optimización.
- Modificación de los operadores genéticos: operadores especializados capaces de mantener la factibilidad de las soluciones.
- Métodos de penalización: estos métodos incluyen de forma indirecta el efecto de las restricciones, empleando para ello unas funciones especiales (de penalización), que se encargan de modificar el valor de la función objetivo para forzar que se cumplan las restricciones.

A continuación, se describen algunas de las funciones de penalización más utilizadas, para adaptar los algoritmos genéticos al diseño óptimo de estructuras con restricciones.

3.10.1 Penalización estática

En esta categoría se incluyen todas aquellas penalizaciones cuyos parámetros no dependen del instante (generación) en el que se encuentren, y mantienen sus valores constantes a lo largo de todo el proceso de optimización.

Homaifar, Lai, y Qi (1994) propone una función donde se disponen varios niveles de violación, estableciendo para cada nivel, un coeficiente estático

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m R_{k,i} \times \max[0, g_i(\mathbf{x})]^2 \quad (3.20)$$

donde $R_{k,i}$ son los coeficientes usados, m el número total de restricciones, $f(\mathbf{x})$ la función objetivo sin penalizar, y $k = 1, 2, \dots, l$ (siendo l es el número de niveles de violación).

Morales y Quezada (1998) plantean que la aptitud de un individuo se determine como

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{factible} \\ k - \sum_{i=1}^s (k/m) & \text{no factible} \end{cases} \quad (3.21)$$

donde s es el número de restricciones satisfechas, m el número de restricciones, y k una constante de valor grande ($\approx 10^9$).

Hoffmeister y Sprave (1996) proponen el uso de la siguiente función de penalización

$$P(\mathbf{x}) = \pm \sqrt{\sum_{i=0}^m H(-g_i(\mathbf{x})) g_i(\mathbf{x})^2} \quad (3.22)$$

donde $H: \mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}$ es la función de Heaviside

$$H(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

3.10.2 Penalización dinámica

En esta categoría, se incluyen todas aquellas funciones de penalización cuyos coeficientes de penalización incluyen para su determinación el número de generación.

Joines y Houck (1994) proponen la siguiente expresión

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + (Cg)^\alpha \text{SVC}(\beta, \mathbf{x}) \quad (3.24)$$

donde g es la generación, C, α , y β son constantes definidas por el usuario (se recomiendan $C = 0,5$, $\alpha = 1 \vee 2$, y $\beta = 1 \vee 2$, y

$$\text{SVC}(\beta, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n D_i^\beta(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p D_j(\mathbf{x})$$

$$D_i(\mathbf{x})_{1 \leq i \leq n} = \begin{cases} 0 & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ |g_i(\mathbf{x})| & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$D_j(\mathbf{x})_{1 \leq j \leq p} = \begin{cases} 0 & -\varepsilon \leq h_j(\mathbf{x}) \leq \varepsilon \\ |h_j(\mathbf{x})| & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Kazarlis y Petridis (1998) realizan un estudio sobre el comportamiento de las funciones de penalización dinámicas del tipo

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \left(\frac{g}{G}\right)^2 \left(A \sum_{i=1}^m (\delta_i w_i \Phi(d_i(S))) + B \right) \delta_s \quad (3.26)$$

donde A es el factor de severidad, m el número de restricciones, δ_i es “1” si la restricción es violada y “0” en otro caso, w_i el factor de peso para la restricción i , $d_i(S)$ una medida del grado de violación de la restricción i introducida por la solución S , B un factor para el nivel de la penalización, δ_s un factor binario ($\delta_s = 1$ si S es no factible y 0 en otro caso), g la actual generación, y N el número total de generaciones.

3.10.3 Penalización adaptativa

Aunque esta categoría de penalizaciones puede ser incluida dentro de las funciones dinámicas, presenta un rasgo que las distingue claramente; la realimentación derivada del proceso de búsqueda, a través de la cual los parámetros son actualizados de forma continua.

Hadj-Alouane y Bean (1997) desarrollan la siguiente expresión

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda(g) \left[\sum_{i=1}^n g_i^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p |h_j(\mathbf{x})| \right] \quad (3.27)$$

donde $\lambda(g)$ se actualiza cada generación g según

$$\lambda(g+1) = \begin{cases} (1/\beta_1)\lambda g & \text{caso 1} \\ \beta_2 \lambda(g) & \text{caso 2} \\ \lambda(g) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.28)$$

donde los casos 1 y 2 indican que el mejor individuo en las k últimas generaciones fue siempre factible (caso 1), o no factible (caso 2) siendo $\beta_1, \beta_2 > 1$, $\beta_1 > \beta_2$, y $\beta_1 \neq \beta_2$. Es decir, que el término de penalización $\lambda(g+1)$ para la generación $(g+1)$ decrece si el conjunto de los mejores individuos fue factible, incrementando su valor si fue no factible. En cualquier otro caso (mejores individuos factibles y no factibles) el término de penalización permanece constante.

Lemonge y Barbosa (2004) proponen un esquema adaptativo en el cual se introduce información como la media de la función objetivo, y el nivel de violación para cada restricción durante la evolución

$$F(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} f(\mathbf{x}) & \text{factible} \\ \bar{f}(x) + \sum_{j=1}^m k_j v_j(x) & \text{en otro caso} \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

donde

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} f(\mathbf{x}) & \text{si } f(x) > \langle f(x) \rangle \\ \langle f(x) \rangle & \text{en otro caso} \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

$$k_j = \frac{\left| \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}^i) \right|}{\sum_{l=1}^m \left[\sum_{i=1}^n v_l(\mathbf{x}^i) \right]^2} \sum_{i=1}^n v_j(\mathbf{x}^i) \quad (3.31)$$

siendo $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ la media de los valores de la función objetivo de la población, $v_l(\mathbf{x})$ la violación de la l -ésima restricción, y n el tamaño de la población.

Capítulo 4

Optimización de forma con algoritmos genéticos y malla fija

4.1 INTRODUCCIÓN

Las técnicas tradicionales para el diseño óptimo de forma están basadas en modelos de optimización cuyo objetivo (con mayor frecuencia) es minimizar el peso de la estructura sujeto a, restricciones de tensión, desplazamientos, autovalores, etc.

Uno de los primeros trabajos donde se utilizan las técnicas de optimización modernas fue elaborado por Zienkiewicz y Campbell (1973) utilizando un modelo de elementos finitos para el análisis de la estructura, y sus nodos como variables de diseño. Sin embargo, la elección de los nodos de la malla (Ramakrishnan y Francavilla, 1975; Svanberg, 1981) como variables de diseño presenta numerosas desventajas cuando se aplica a estructuras continuas, dado que el número de variables de diseño que se genera es muy elevado, y además, aún cuando se alcancen las condiciones de optimalidad, las soluciones propuestas pueden presentar muchos inconvenientes, ya que los contornos obtenidos posiblemente muestren discontinuidades importantes en las tangentes, puntos de inflexión, etc.

Se han estudiado muchas alternativas (Schmit y Farshi, 1974), con el fin de evitar la elección de los nodos como variables de diseño. Schmit (1986) haciendo uso de los avances conseguidos en años anteriores destaca la necesidad de distinguir entre un modelo de diseño y un modelo de análisis.

Braibant, Sander, y Fleury (1986) proponen una versión del método de los elementos de diseño cuya filosofía se ajusta a las ideas expresadas por Schmit. Para representar gráficamente el diseño, los contornos de los elementos se describen mediante funciones de mezcla (empleadas habitualmente en los gráficos por computador) para la generación interactiva de curvas (Bézier, Spline, β -Spline, etc.), y superficies (patches de Coons, etc.). Las estructuras son descompuestas en regiones de geometría sencilla, descritas a partir de un

número reducido de puntos de control, y éstas a su vez discretizadas mediante elementos finitos. Durante el proceso de optimización, ciertos recintos elegidos de forma conveniente cambian su geometría. Las variables de diseño se definen como escalares asociados a los desplazamientos que sufren los puntos de control en determinadas direcciones, controlando la geometría durante el transcurso de la optimización. Las principales ventajas de esta formulación son:

- Flexibilidad para la descripción de la geometría.
- Regularidad y suavidad proporcionada por este tipo de curvas.
- Número de variables de diseño. Puntos clave (*keypoints*, *master nodes*).
- Sencillez para generar la malla (Chang y Choi, 1992).

La optimización de forma según los métodos tradicionales (programación matemática) se basa en un proceso iterativo, donde se requiere la evaluación de la función objetivo, de las restricciones, y de sus respectivas derivadas, las cuales se pueden obtener de forma analítica, semianalítica, o mediante diferencias finitas. En la literatura técnica podemos encontrar una gran cantidad de trabajos desarrollados sobre estos métodos. Kristensen y Madsen (1976), Haug (1981), Morris (1982), Dems y Mróz (1984), Bennett y Botkin (1985), Haug, Choi, y Kamkov (1986), Haftka y Grandhi (1986), Ding (1986), Haftka y Adelman (1989), Anido, Herskovits, Feijoó, y Taroco (1991), Rasmussen (1991), Dems y Mroz (1993), Hinton y Sienz (1994), Herskovits (1995), Olhoff y Lund (1995), y Arora (1995).

En estos últimos años, los avances en el diseño óptimo de forma han sido muy importantes, intentando resolver el problema de optimización a través de una gran diversidad de métodos. Naturalmente, los métodos evolucionarios también han sido aplicados a la optimización de forma en estructuras continuas.

Xie y Steven (1992) proponen el método “evolucionario” Nibbling ESO. Wibowo y Besari (1998) aplican los algoritmos genéticos para optimizar la forma en láminas ovaladas axialmente simétricas. Kita y Tanie (1998, 1999) y Annicchiarico y Cerrolaza (1999) utilizan los algoritmos genéticos para optimizar estructuras continuas mediante funciones β -Splines. Cerrolaza y Annicchiarico (2001) emplean nuevamente los algoritmos genéticos, para la optimización de forma con modelos de elementos finitos tridimensionales. Woon, Querin, y Steven (2001) y Sia y Querin (2006) investigan codificaciones alternativas para los algoritmos genéticos que permitan la optimización de forma. Zhang, Zhou, Wang, y Zhang (2005) combinan un método de partículas ((RKPM) *Reproducing Kernel Particle Method*) con un algoritmo genético enriquecido (*Multi-Family Genetic Algorithm*).

4.2 OPTIMIZACIÓN DE FORMA CON MALLA FIJA

La implementación del método de la malla fija realizada para esta tesis es solamente aplicable a estructuras continuas bidimensionales, y está basada inicialmente en los principios e ideas establecidos por García, Ruiz, y Steven (2001).

El método de la malla fija implica la división del dominio de diseño en pequeños elementos regulares (elementos rectangulares de cuatro nodos). Los elementos de la malla son

diferenciados como, elementos interiores, exteriores, o de borde, en función de la cantidad de estructura que cubren. De esta forma, se consigue que el contorno de la estructura sea libre para moverse dentro del dominio de la malla, capturando la forma de la estructura mediante la modificación de las propiedades mecánicas de sus elementos.

4.2.1 Clasificación de los nodos

Una vez que se han definido las condiciones de contorno, el dominio de la malla fija, el nivel de discretización, etc. El primer paso antes de analizar la estructura consiste en clasificar los nodos como exteriores, interiores, o de borde con respecto del contorno.

1. Se toma como hipótesis de partida, que el conjunto de todos los nodos pertenecientes a las c_n columnas que componen la malla son interiores a la estructura (etiquetas n_{ij} igual a "1"). A continuación, se comprueban las etiquetas pertenecientes a la columna de nodos en estudio (columna c_{n-2} , Fig. 4.1).

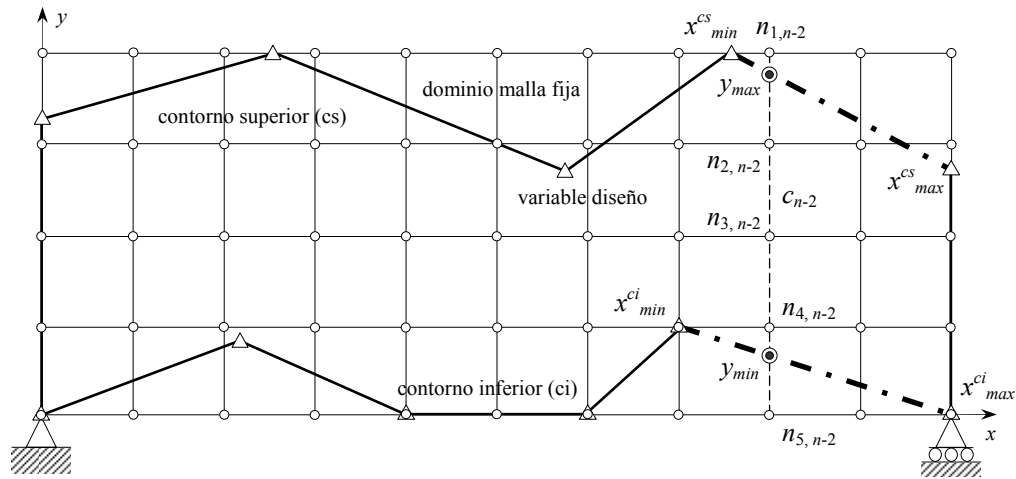


Figura 4.1 Clasificación de los nodos pertenecientes a la columna c_{n-2} con respecto del contorno de la estructura

2. Identificar los segmentos del contorno (situados entre las variables de posición) que acotan sobre el eje x , superior x_{max}^{cs} , x_{min}^{ci} e inferiormente x_{max}^{ci} , x_{min}^{cs} (línea a trazos y puntos, Fig. 4.1) a la columna de nodos c_{n-2} (línea a trazos, Fig. 4.1).
3. Determinar las cotas superior y_{max} e inferior y_{min} correspondientes a los puntos de intersección entre los segmentos del contorno y la columna de nodos c_{n-2} .
4. Obtenidos los valores frontera y_{max} e inferior y_{min} se comprueban las etiquetas $n_{i,n-2}$, según la Ec. (4.1). En la tabla 4.1 se muestran los valores obtenidos para c_{n-2}

$$n_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } y_{n_{ij}} = y_{max,j} \vee y_{min,j} \\ +1 & \text{si } y_{max,j} > y_{n_{ij}} > y_{min,j} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.1)$$

5. Repetir los pasos 2 a 4, hasta que las n columnas sean comprobadas.

Tabla 4.1 Clasificación de los nodos pertenecientes a la columna c_{n-2}

| Nodos | Columna de nodos c_{n-2} | | | | |
|---------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | $n_{1,n-2}$ | $n_{2,n-2}$ | $n_{3,n-2}$ | $n_{4,n-2}$ | $n_{5,n-2}$ |
| Posición | $y_{max} < y_1 > y_{min}$ | $y_{max} > y_2 > y_{min}$ | $y_{max} > y_3 > y_{min}$ | $y_{max} > y_4 > y_{min}$ | $y_{max} > y_5 < y_{min}$ |
| Etiqueta | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Clasificación | exterior | interior | interior | interior | exterior |

4.2.2 Clasificación de los elementos a partir de la diferenciación de los nodos

Tradicionalmente, la clasificación de los elementos como interiores, exteriores, o de borde con respecto del contorno se realiza en dos etapas. La primera etapa consiste en clasificar los nodos (apartado 4.2.1). Finalizada la primera parte, la segunda etapa para la diferenciación de los elementos se realiza a partir de la clasificación de los nodos.

De forma que, los elementos cuyos nodos sean todos exteriores son clasificados como exteriores. Los elementos que cuenten con todos sus nodos interiores, como interiores, y en ninguno de los casos anteriores (es decir, existen nodos exteriores e interiores) como elementos de borde o intersectados por el contorno. Este sencillo esquema para clasificar los elementos se representa gráficamente en la Fig. 4.2.

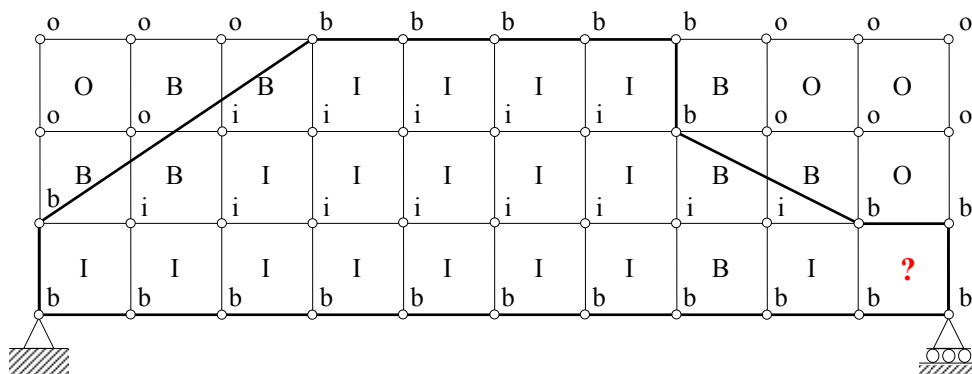


Figura 4.2 Clasificación de los elementos como interiores (I), exteriores (O) y de borde (B), a partir de la clasificación de los nodos en interiores (i), exteriores (o) y de borde (b)

El proceso para clasificación de los elementos, a partir de la diferenciación de los nodos, es un procedimiento sencillo que funciona correctamente en la mayoría de los casos. Sin embargo, pueden presentarse casos particulares (habitualmente, como resultado de una malla excesivamente basta) en los cuales el procedimiento pierde precisión (Fig. 4.2).

Evidentemente, esta pérdida de precisión no es crítica, pues el objetivo del método de la malla fija es proporcionar una rápida estimación de la respuesta estructural, con un nivel de fiabilidad aceptable. Apuntar que, estas pérdidas de precisión se limitan exclusivamente a fenómenos locales, fácilmente solucionables con una malla más fina (Fig. 4.3).

en el principio de “divide y vencerás”, resolviendo una serie de problemas sencillos e idénticos, que al combinarse proporcionan la solución del problema global.

El problema sencillo consiste en recortar un polígono con respecto a una arista (de longitud infinita) de corte, obteniendo el polígono recortado (Fig. 4.5d) mediante una sucesión de recortes con las aristas x_{max} , y_{min} , x_{min} , y_{max} , conjunto denominado ventana de recorte (*clipping window*).

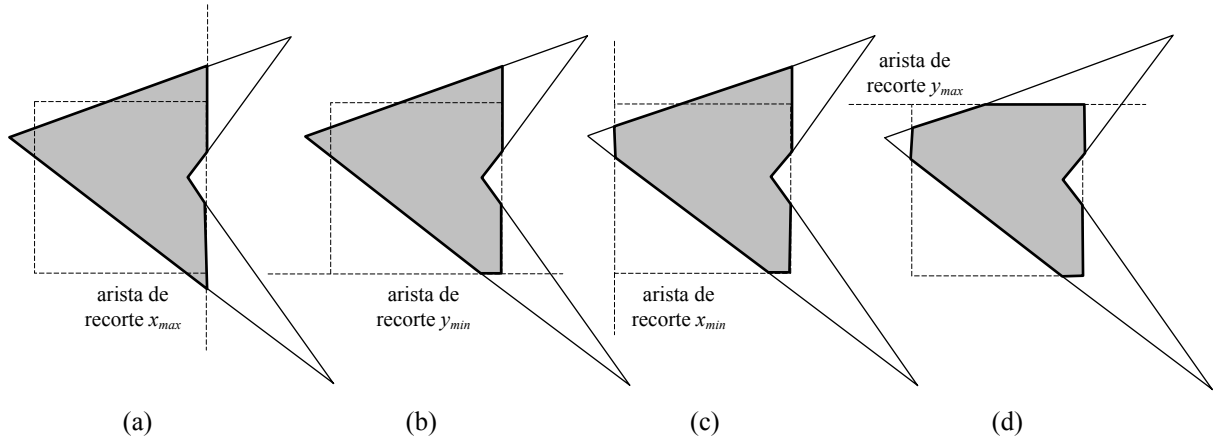


Figura 4.5 Recorte de un polígono paso a paso. (a) Arista de corte x_{max} . (b) Arista de corte y_{min} . (c) Arista de corte x_{min} . (d) Arista de corte y_{max}

Una de las principales ventajas del algoritmo Sutherland-Hodgman es su carácter general, mucho menos acotado que otras estrategias de recorte (Cohen-Sutherland, Cyrus-Beck, Liang-Barsky, etc.), permitiendo recortar polígonos convexos y cóncavos.

El algoritmo de recorte necesita los vértices que definen originalmente la geometría del polígono y las coordenadas de las aristas de corte. En cada recorte, el algoritmo elimina una parte del polígono, generando con cada arista el conjunto de vértices necesario en el siguiente recorte (Fig. 4.6).

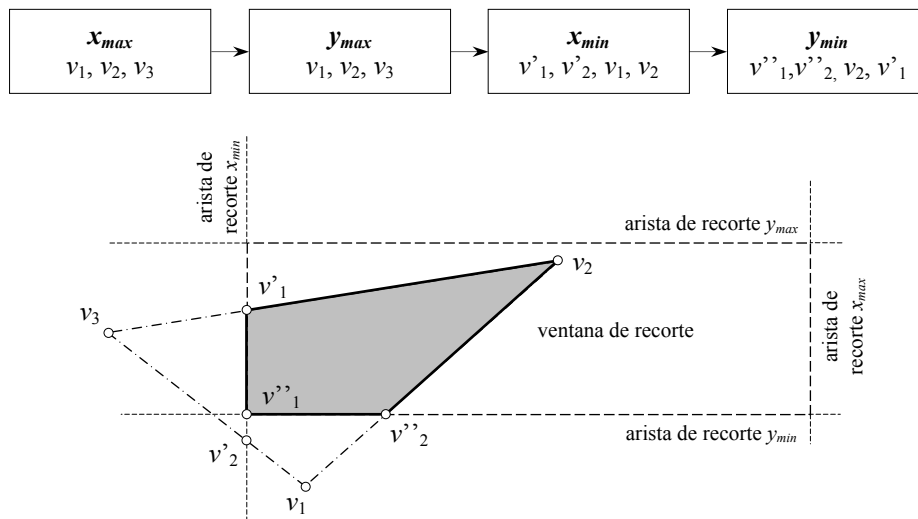


Figura 4.6 Polígono recortado y vértices obtenidos durante el proceso de recorte

Para ello, el algoritmo debe recorrer todas y cada una de las aristas (segmentos que cuentan con un vértice inicial S y un vértice final P) del polígono, determinando la relación entre los vértices sucesivos y la arista de recorte. De este modo, cada una de las aristas del polígono puede añadir cero, uno o dos vértices a la lista de salida del polígono recortado, en función de cual sea el caso (cuatro posibles) en que se encuentre (Fig. 4.7):

- Caso 1: la arista del polígono es interior a la arista de recorte. Por tanto, el vértice P se agrega a la lista vértices de salida.
- Caso 2: la arista del polígono está intersectada por la frontera de recorte, encontrándose el punto inicial en el interior y el punto final en el exterior. Por tanto, el punto de intersección entre la arista del polígono y la arista de recorte se agrega a la lista de vértices de salida.
- Caso 3: los dos vértices correspondientes a la arista del polígono se encuentran en el exterior. En este caso, no existen vértices para la lista de salida.
- Caso 4: la arista del polígono se encuentra intersectada por la arista de recorte, el punto inicial S en el exterior y el vértice final en el interior. Por lo que, el punto final P y el punto de intersección I se agregan a la lista de salida.

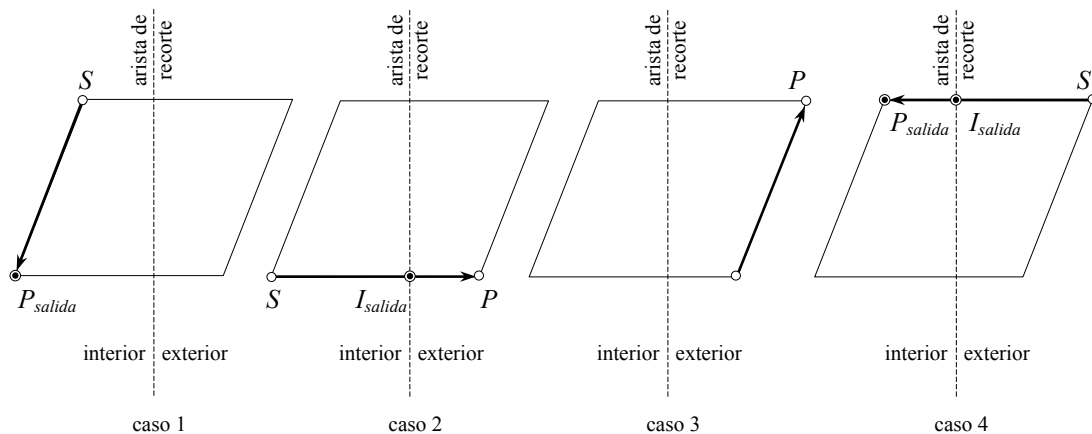


Figura 4.7 Casos de recorte entre una arista del polígono y una arista infinita

A continuación, se describe parte (recorte entre el polígono inicial y la arista x_{min}) del código en lenguaje FORTRAN 95 que ha sido escrito para implementar el algoritmo de Sutherland-Hodgman.

```

1  ! PASO 1: arista infinita (xmin)/polígono inicial/dimensión vector
2  ! polígono salida (PASO 1)
3  caso1=0; caso2=0; caso3=0; caso4=0; cE1=0; cE2=0; j=0
4  DO i=1, nPtos
5      IF (i/=nPtos) THEN
6          Xs=polXini(i); Xp=polXini(i+1)
7      ELSE
8          Xs=polXini(i); Xp=polXini(1)
9      END IF
10     IF (Xs>=xmin .AND. Xp>=xmin) THEN
11         caso1=caso1+1
12     ELSE IF (Xs>=xmin .AND. Xp<xmin) THEN

```

```

13         cE1=cE1+1
14         IF (Xs/=xmin) caso2=caso2+1
15     ELSE IF (Xs<=xmin .AND. Xp<xmin) THEN
16         caso3=caso3+1
17     ELSE IF (Xs<xmin .AND. Xp>=xmin) THEN
18         IF (Xp==xmin) THEN
19             cE2=cE2+1
20         ELSE
21             caso4=caso4+1
22         END IF
23     END IF
24 END DO
25 ptosExit1=(1*caso1)+(1*caso2)+(0*caso3)+(2*caso4)+(0*cE1)+(1*cE2)
26 ALLOCATE (polXexit1(ptosExit1),polYexit1(ptosExit1))
27 ! Recorte poligono inicial/arista infinita X=XMIN
28 DO i=1,nPtos
29     IF (i/=nPtos) THEN
30         Xs=polXini(i); Xp=polXini(i+1)
31         Ys=polYini(i); Yp=polYini(i+1)
32     ELSE
33         Xs=polXini(i); Xp=polXini(1)
34         Ys=polYini(i); Yp=polYini(1)
35     END IF
36     IF (Xs>=xmin .AND. Xp>=xmin) THEN ! Caso 1
37         IF (j<ptosExit1) j=j+1
38         polXexit1(j)=Xp; polYexit1(j)=Yp
39     ELSE IF (Xs>=xmin .AND. Xp<xmin) THEN ! Caso 2
40         IF (Xs/=xmin) THEN
41             IF (j<ptosExit1) j=j+1
42             polXexit1(j)=xmin
43             polYexit1(j)=((Yp-Ys)/(Xp-Xs))*(xmin-Xs)+Ys
44         END IF
45     ELSE IF (Xs<=xmin .AND. Xp<xmin) THEN ! Caso 3
46     ELSE ! Caso 4
47         IF (j<ptosExit1) j=j+1
48         polXexit1(j)=xmin; polYexit1(j)=((Yp-Ys)/(Xp-Xs))*(xmin-Xs)+Ys
49         IF (polXexit1(j)/=Xp .OR. polYexit1(j)/=Yp) THEN
50             IF (j<ptosExit1) j=j+1
51             polXexit1(j)=Xp; polYexit1(j)=Yp
52         END IF
53     END IF
54 END DO

```

4.2.4 Ratio de área normalizado por elemento

La diferenciación entre elementos interiores, exteriores o de borde resulta clave a la hora de establecer el ratio de área normalizado por elemento ξ . Este ratio es una medida que refleja la cantidad de estructura dentro del elemento, en comparación con su área total. Los elementos clasificados como interiores o exteriores obtienen directamente los valores $\xi = 1$ y $\xi = 0$ respectivamente.

Si el elemento es de borde (intersectado por el contorno) el valor de ξ está comprendido entre $0 < \xi < 1$. Para determinar la magnitud exacta de ξ se recurre al algoritmo de recorte de Sutherland-Hodgman.

Tras aplicar el algoritmo de recorte, se obtiene un vector donde se recogen las coordenadas de los vértices del polígono recortado (x_i, y_i) . Estas coordenadas se utilizan para generar una serie de segmentos, que mediante su unión consecutiva, determina la región de la estructura que es interior al elemento. Finalmente, para calcular el área del elemento ocupada por la estructura, se utiliza el producto cruzado de sus vectores.

En la Fig. 4.8, se muestra un ejemplo en donde la porción de área $A_1^{(e)}$ contenida en el elemento se obtiene a partir de la Ec. (4.2).

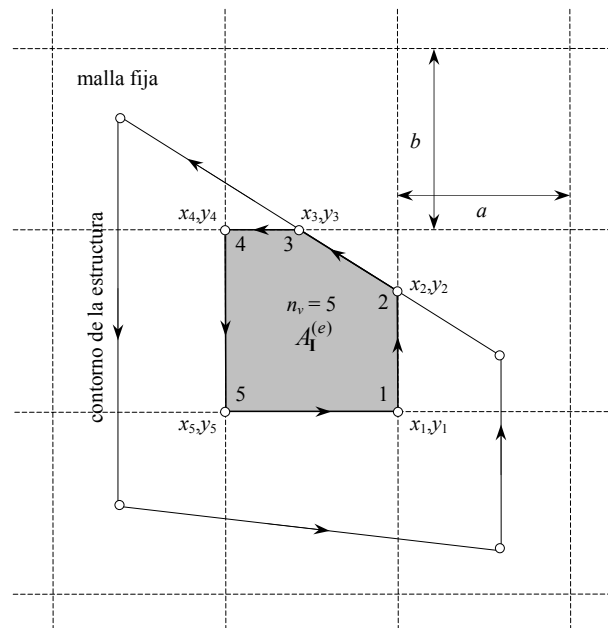


Figura 4.8 Área encerrada entre los segmentos de un polígono

$$A_1^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_v} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad (4.2)$$

Por tanto, el ratio de área normalizado por elemento ξ se obtiene como el cociente del área recortada $A_1^{(e)}$ y el área total del elemento $A^{(e)}$

$$\xi = \frac{A_1^{(e)}}{A^{(e)}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_v} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)}{ab} \quad (4.3)$$

donde a y b son el ancho y la altura del elemento respectivamente, y n_v el número de vértices que componen el perfil del elemento intersectado.

4.3 CODIFICACIÓN PARA LA OPTIMIZACIÓN DE FORMA

Cuando se plantea el diseño de un algoritmo genético, el primer paso consiste en desarrollar una codificación apropiada. Generalmente, para la resolución de un mismo problema pueden plantearse diferentes tipos de codificaciones (Victoria y Martí, 2004, 2005). A pesar de compartir los mismos principios hereditarios, los diseños óptimos obtenidos por un algoritmo genético utilizando distintas codificaciones pueden ser muy diferentes.

Entre los distintos tipos de representaciones se ha escogido la codificación binaria, transformando las variables del problema en una cadena de ceros y unos. La cadena de

codificación utilizada en el algoritmo del método MFAG-f (Apéndices A y B) desarrollado para el diseño óptimo de forma se basa en que, la estructura puede alcanzar la forma óptima, mediante movimientos discretos de las variables de posición, utilizadas para describir el contorno de la estructura.

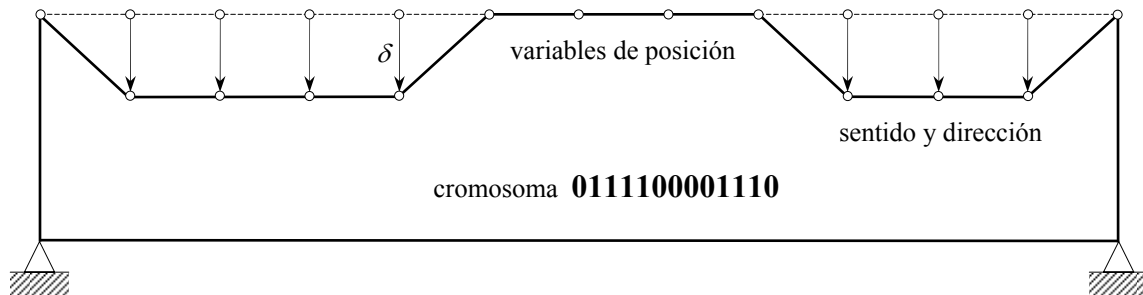


Figura 4.9 Representación de un cromosoma

El esquema seguido para codificar los individuos se basa en que, cada uno de los bits representa a un punto clave del contorno, cuya posición puede ser optimizada. La longitud de la cadena es por tanto equivalente al número de puntos clave que controlan la geometría de la estructura. Cada uno de los bits del cromosoma presenta un alelo binario. Un valor igual a "0" representa un punto sin movimiento y un valor igual a "1" un punto con movimiento. Por consiguiente, cada uno de los cromosomas descodificados describe una posible forma de la estructura (mediante segmentos lineales) en base a movimientos de magnitud δ , con dirección, y sentido preestablecidos (Fig. 4.9).

Las principales características del método MFAG-f son:

- El dominio inicial de partida se define a partir de las coordenadas que describen las variables de diseño.
- El contorno de la estructura es gradualmente modificado mediante movimientos de tamaño discreto controlados por el algoritmo genético.
- La representación de las estructuras se realiza conectando (mediante segmentos lineales) las nuevas posiciones de las variables.
- Si el criterio de convergencia (número máximo de generaciones) es satisfecho, el conjunto final de coordenadas define la forma óptima de la estructura.

4.4 FUNCIÓN DE APTITUD

La probabilidad de supervivencia de un individuo se determina mediante su aptitud. La función de aptitud define el espacio de soluciones sobre el cual el algoritmo genético intenta encontrar el óptimo del problema. Por lo tanto, la forma óptima de la estructura depende en gran medida de cual sea la función de aptitud que estemos empleando. A continuación, se describen las funciones de aptitud que se han utilizado para la realización de los ejemplos numéricos presentados en este capítulo.

4.4.1 Área y desplazamientos

En la práctica, los desplazamientos que se producen en una estructura resultan ser críticos solamente en determinados puntos. Minimizar la magnitud de estos desplazamientos puede lograrse fácilmente, pero los resultados conseguidos no son tan deseables, si estos se obtienen a expensas del área de la estructura.

La función de aptitud definida en la Ec. (4.4) es diseñada (Woon, 2002) para minimizar de forma simultánea el área de la estructura y los desplazamientos críticos

$$F = \frac{L}{\sum_{j=1}^{n_e} \xi_j \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} |v_i|} \quad (4.4)$$

donde n_e es el número de elementos, n_d el número de desplazamientos críticos, ξ_j el ratio de área normalizado del elemento j , y v_i el valor del desplazamiento crítico i .

Para adimensionar la función de aptitud, se multiplica por una de las dimensiones características del dominio (por ejemplo, la longitud del dominio L).

4.4.2 Volumen y compliance

La función *compliance* de una estructura puede ser interpretada como un indicador para determinar el nivel de energía de deformación contenido en la estructura o como una medida de la inversa de su rigidez. La compliance proporciona un valor matemático útil y preciso del grado de optimalidad de una estructura, con respecto a la rigidez del conjunto.

Cuando utilizamos directamente el valor obtenido de la función compliance, el objetivo de la optimización es obtener una estructura tal que minimice su energía de deformación (o maximice su rigidez), para un volumen dado. Utilizando la notación matricial, la compliance total de la estructura es

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (4.5)$$

donde \mathbf{u} es el vector de desplazamientos, y \mathbf{f} el vector de cargas en los nodos.

El problema de minimizar la compliance, puede ser transformado en un problema de maximización utilizando su valor inverso. Por tanto, maximizar el cociente C^{-1} es equivalente a maximizar la rigidez de la estructura. Para incluir el efecto del volumen, la inversa de la compliance es dividida por esta magnitud, obteniendo como resultado la Ec. (4.6) también denominada *rigidez específica*

$$F = \frac{1}{CV} = \frac{1}{\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} V} = \frac{1}{\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} t A^{(e)} \sum_{j=1}^{n_e} \xi_j} \quad (4.6)$$

donde t es el espesor de los elementos.

4.4.3 Área y desviación de tensiones

El concepto de un diseño completamente tensionado (*Fully Stressed Design*) es uno de los criterios de optimalidad más utilizados en el ámbito de la ingeniería.

Con el propósito de observar en la optimización de forma fenómenos de carácter local, se implementa en el método MFAG-f una función de aptitud basada en la uniformidad de la tensión a lo largo del contorno

$$F = \frac{1}{S_\sigma \sum_{j=1}^{n_e} \xi_j} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\sigma_i - \sigma_{med})^2} \sum_{j=1}^n \xi_j} \quad (4.7)$$

donde S_σ es la desviación estándar asociada a las tensiones de Von Mises presentes en las k variables de posición. De modo que, valores pequeños para la desviación estándar y/o el área de la estructura aumentan la aptitud del diseño.

4.5 OPERADORES GENÉTICOS

A continuación, se detallan los operadores que se han utilizado en el algoritmo genético para la optimización de forma de estructuras continuas con malla fija.

- Selección: torneo binario por dos razones. (1) Por su sencilla implementación, y (2) mayor eficiencia computacional (Hancock, 1994).
- Cruce: por un punto simple, debido a la importancia que juega el orden de los bits.
- Elitismo: especialmente necesario en poblaciones de tamaño pequeño. En caso de que, el individuo mejor adaptado en la generación anterior no se encuentre en la siguiente generación, uno de los individuos es reemplazado aleatoriamente.
- Micro-GA: para mantener la diversidad genética en la población.

4.6 METODOLOGÍA PARA LA OPTIMIZACIÓN DE FORMA CON MALLA FIJA Y ALGORITMOS GENÉTICOS

A continuación, se procede a describir paso a paso el procedimiento seguido por el método MFAG-f para la optimización de forma con malla fija y algoritmos genéticos, incluido en el programa MFAG (Apéndices A y B). Una representación esquemática de la metodología seguida por el proceso de optimización se muestra en la Fig. 4.10.

1. Definir las características del dominio inicial de la estructura (longitud, altura, espesor, regiones optimizables, no optimizables, etc.).
2. Establecer los parámetros del modelo para el análisis por elementos finitos con malla fija: número de elementos en ambas direcciones, módulo de elasticidad para el material real y virtual, coeficiente de Poisson, tipo de elemento, orden de integración, cargas aplicadas, condiciones de apoyo, etc.
3. Situación de los puntos clave que controlan la forma de la estructura.

4. Establecer la dirección, sentido, y magnitud del movimiento de los puntos clave.
5. Definir los parámetros del algoritmo genético: micro-GA, tamaño de la población, función de aptitud, tipo de selección, tipo de cruce, probabilidad de cruce y mutación, elitismo, y número máximo de generaciones.
6. Generar una población pseudo-aleatoria de individuos.
7. Obtener las matrices de rigidez correspondientes a los elementos finitos. En caso de que el elemento se encuentre intersectado por el contorno de la estructura, utilizar el algoritmo de recorte para determinar la parte proporcional del elemento que se encuentra en el interior de la estructura.
8. Analizar la respuesta de los diseños, una vez actualizada la matriz de rigidez de la estructura, a partir de la situación del nuevo contorno.
9. Evaluar la función de aptitud para los individuos de la población, identificando al mejor de los individuos.
10. Si el número de generaciones supera el número máximo permitido, finalizar el proceso de optimización. En caso contrario, continuar en el paso 11.
11. Aplicar a la población de individuos los operadores genéticos: selección, cruce, mutación, y elitismo. Volver al paso 7.

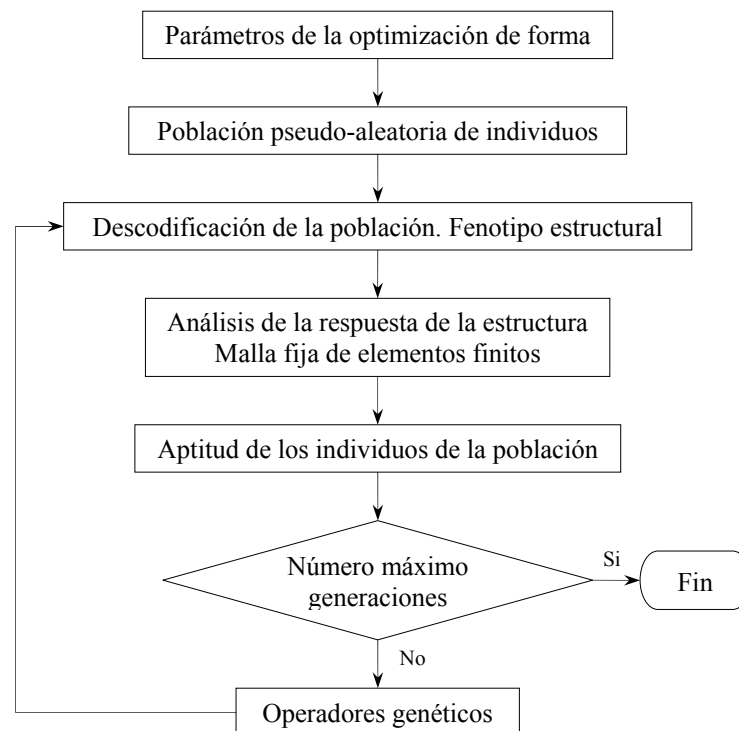


Figura 4.10 Diagrama de flujo del método MFAG-f para la optimización de forma con malla fija y algoritmos genéticos

4.7 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para validar el nuevo método propuesto MFAG-f se han resuelto cuatro ejemplos diferentes para el voladizo de Michell y la viga biapoyada de Michell. A lo largo de los distintos ejemplos se estudiará el efecto de la función de aptitud y las condiciones de apoyo.

En todos los ejemplos, el elemento finito utilizado es el elemento plano rectangular para tensión plana de cuatro nodos.

Los valores adoptados para los parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, el análisis del modelo con malla fija, y los valores adoptados para el algoritmo genético se recogen en la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, el análisis del modelo con malla fija de elementos finitos, y el algoritmo genético

| Ejemplo | Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre | Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en la extremo libre | Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior |
|----------------------------------|---|---|---|---|
| Longitud (mm) | 300 | 300 | 100 | 210 |
| Altura (mm) | 75 | 75 | 80 | 280 |
| Espesor (mm) | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Puntos de control borde superior | 8 | 8 | 11 | 15 |
| Puntos de control borde inferior | 0 | 0 | 9 | 5 |
| Recorrido puntos superiores | 300 : 0 | 300 : 0 | 80 : 0 | 280 : 0 |
| Recorrido puntos inferiores | - | - | 0 : 80 | 0 : 280 |
| Tamaño del paso (mm) | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1,0 |
| Tamaño de la población | 20 | 20 | 30 | 50 |
| Probabilidad de cruce | 0,75 | 0,75 | 0,75 | 0,85 |
| Probabilidad Micro-GA | 0,075 | 0,075 | 0,075 | 0,100 |
| Número máximo de generaciones | 300 | 650 | 200 | 300 |
| Número de elementos finitos | 60×15 | 60×15 | 22×20 | 21×28 |
| Modulo de elasticidad (MPa) | 210·10 ³ | 210·10 ³ | 210·10 ³ | 210·10 ³ |
| Relación (E/E_0) | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁴ | 10 ⁴ |
| Coefficiente de Poisson | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,3 |
| Orden de integración | 1×1 | 1×1 | 2×2 | 2×2 |
| Función de aptitud | volumen y compliance | área y desviación de tensiones | área y desplazamientos | volumen y compliance |
| Longitud del cromosoma | 8 | 8 | 20 | 20 |

4.7.1 Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre

El voladizo está sometido a una fuerza vertical de 500 N en el centro del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 300 mm, la altura 75 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 900 elementos, 60 en dirección longitudinal y 15 en dirección transversal (debido a la simetría, solamente es necesario analizar la mitad del modelo). Se han dispuesto 8 puntos de control, distribuidos uniformemente, en el extremo libre del voladizo

(Fig. 4.11). El número máximo de generaciones es 300, obteniendo la forma óptima en la generación 276. En las Figs. 4.12 se muestran las formas óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización.

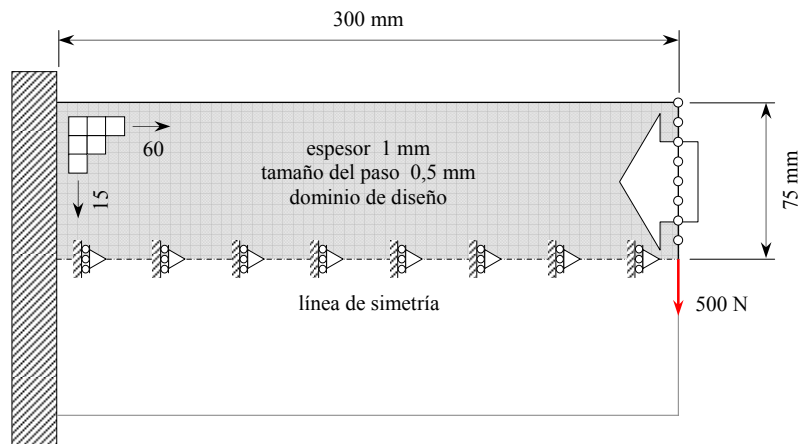
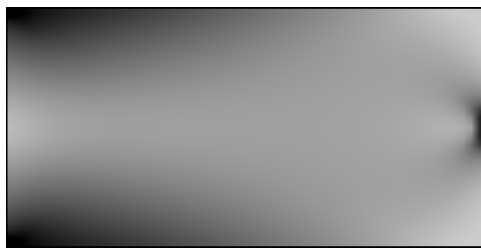


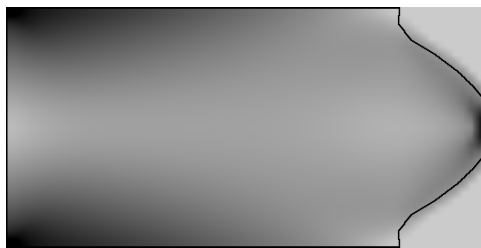
Figura 4.11 Voladizo 1 con fuerza vertical de 500 N centrada en el extremo libre.
Dominio de diseño



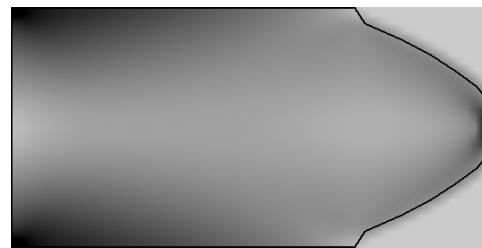
(a) Generación 1
Aptitud = $2,390 \cdot 10^{-7} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$; $V/V_0 = 0,999$



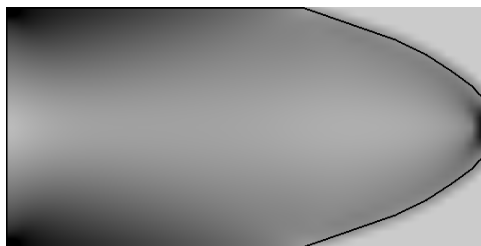
(b) Generación 37
Aptitud = $2,461 \cdot 10^{-7} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$; $V/V_0 = 0,963$



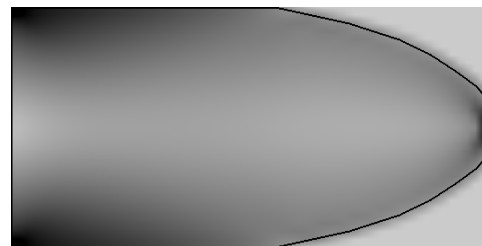
(c) Generación 111
Aptitud = $2,546 \cdot 10^{-7} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$; $V/V_0 = 0,916$



(d) Generación 177
Aptitud = $2,576 \cdot 10^{-7} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$; $V/V_0 = 0,891$



(e) Generación 237
Aptitud = $2,588 \cdot 10^{-7} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$; $V/V_0 = 0,880$



(f) Generación 276
Aptitud = $2,590 \cdot 10^{-7} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$; $V/V_0 = 0,875$

Figura 4.12 Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Formas óptimas para diferentes generaciones

En la tabla 4.3 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

Tabla 4.3 Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|-----|------------------------------|-----------------------|-----------------|---------------|--------------------------------|
| 1 | 98,297 | $1,877 \cdot 10^{-1}$ | 0,999 | 24,68 | $2,390 \cdot 10^{-7}$ |
| 37 | 99,885 | $1,891 \cdot 10^{-1}$ | 0,963 | 908,01 | $2,461 \cdot 10^{-7}$ |
| 111 | 101,351 | $1,921 \cdot 10^{-1}$ | 0,916 | 2723,23 | $2,546 \cdot 10^{-7}$ |
| 177 | 101,652 | $1,952 \cdot 10^{-1}$ | 0,891 | 4350,90 | $2,576 \cdot 10^{-7}$ |
| 237 | 101,653 | $1,966 \cdot 10^{-1}$ | 0,880 | 5837,93 | $2,588 \cdot 10^{-7}$ |
| 276 | 101,653 | $1,976 \cdot 10^{-1}$ | 0,875 | 6834,36 | $2,590 \cdot 10^{-7}$ |

En las Figs. 4.13 se muestran la evolución del desplazamiento máximo, la fracción de volumen, y la aptitud con las generaciones.

En la Fig. 4.13a se observa que el desplazamiento máximo y la fracción de volumen aumentan y decrecen respectivamente de forma progresiva. Si se comparan los diseños inicial y final (generación 276) se aprecia que el valor de la aptitud aumenta desde $2,39 \cdot 10^{-7} N^{-1}mm^{-4}$ hasta $2,59 \cdot 10^{-7} N^{-1}mm^{-4}$, lo que supone un incremento del 8,37% (Fig. 4.13b).

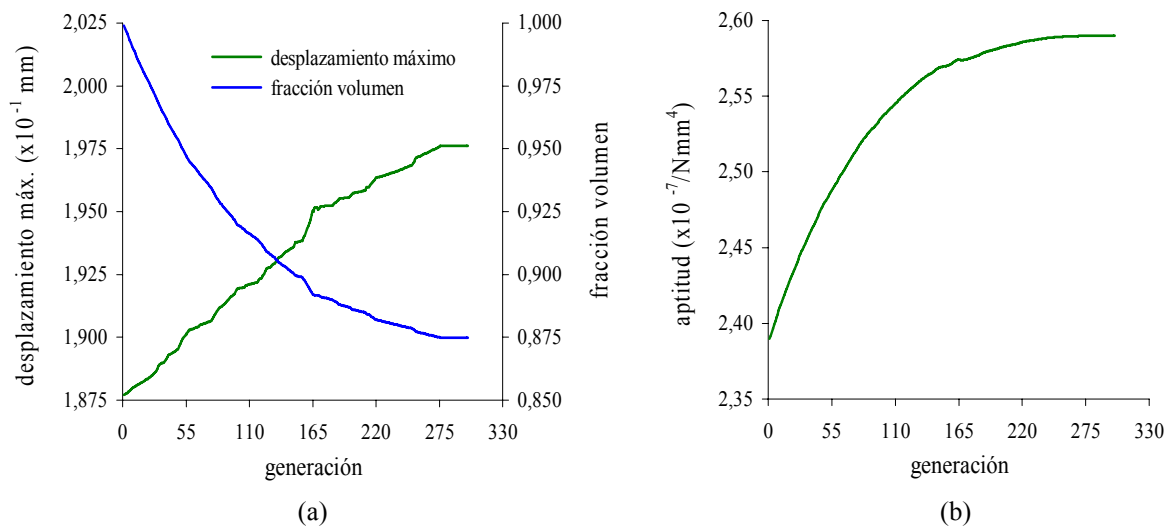


Figura 4.13 Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación

En las Figs. 4.14a a 4.14c se muestran los óptimos obtenidos con los métodos FG-GA (Woon, 2002), Nibbling ESO (Xie y Steven, 1997), y MFAG-f respectivamente. Como se puede apreciar los diseños presentan formas similares. Sin embargo, el diseño óptimo obtenido con el método MFAG-f es mejor que los conseguidos con los métodos FG-GA (*Fixed Grid-Genetic Algorithm*) y Nibbling ESO (aptitudes un 1,014% y un 1,768% mayores respectivamente).

La principal ventaja de los diseños obtenidos con el método MFAG-f frente a los conseguidos con los métodos Nibbling es la calidad (geometrías suavizadas) con la que se define la forma final, evitando con ello la presencia de bordes (aristas vivas) que implican la necesidad de interpretar la geometría para proponer un diseño final.

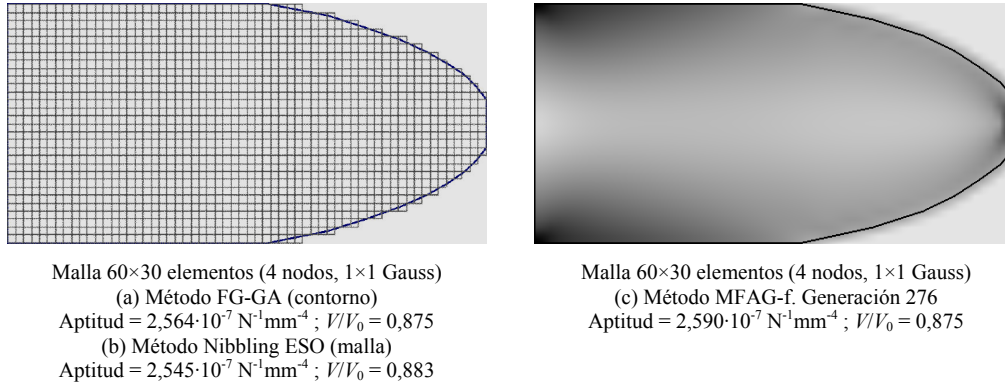


Figura 4.14 Voladizo 1 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Método FG-GA. (b) Método Nibbling ESO. (c) Método MFAG-f

4.7.2 Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre

El segundo ejemplo es de nuevo al voladizo largo de Michell. Las características geométricas (Fig. 4.11), número de elementos que dividen el dominio, y los parámetros que controlan el algoritmo genético son iguales a los utilizados en el apartado 4.7.1 (ver tabla 4.2), a diferencia de la función de aptitud que, en este caso está basada en la uniformidad de las tensiones del contorno. El número máximo de generaciones es 650, obteniendo la forma óptima en la generación 607.

La solución teórica del problema se ha obtenido mediante la aplicación de la teoría de la flexión en vigas (Gere, 2002). El objetivo es determinar la forma óptima de la viga (Fig. 4.15) de modo que esté completamente tensionada con una tensión normal máxima admisible σ_{adm} (se desprecian los efectos de las tensiones tangenciales por cortadura).

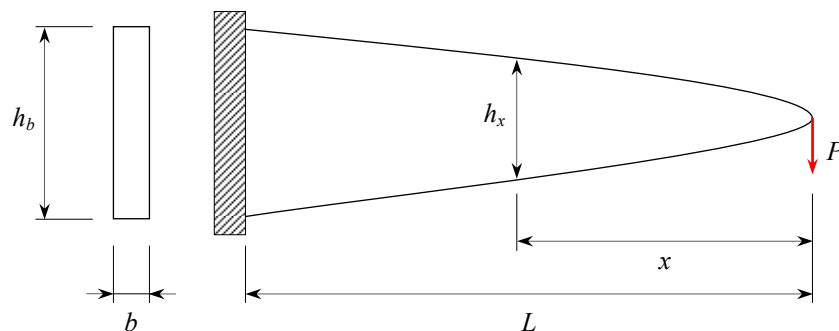


Figura 4.15 Forma óptima teórica para una viga completamente tensionada

El momento flector M y el módulo resistente de la sección W a una distancia x desde el extremo libre de la viga son

$$M = Px$$

$$W = \frac{bh_x^2}{6} \quad (4.8)$$

donde h_x es la altura de la viga a la distancia x . Si sustituimos estos valores dentro de la expresión para determinar las tensiones normales obtenemos

$$\sigma_{adm} = \frac{M}{W} = \frac{Px}{\frac{bh_x^2}{6}} = \frac{6Px}{bh_x^2} \quad (4.9)$$

despejando la altura de la viga

$$h_x = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_{adm}}} \quad (4.10)$$

en el extremo fijo de la viga ($x = L$), la altura h_b es

$$h_b = \sqrt{\frac{6PL}{b\sigma_{adm}}} \quad (4.11)$$

por lo tanto, podemos expresar la altura h_x como

$$h_x = h_b \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (4.12)$$

En las Figs. 4.16 se muestran las formas óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización.

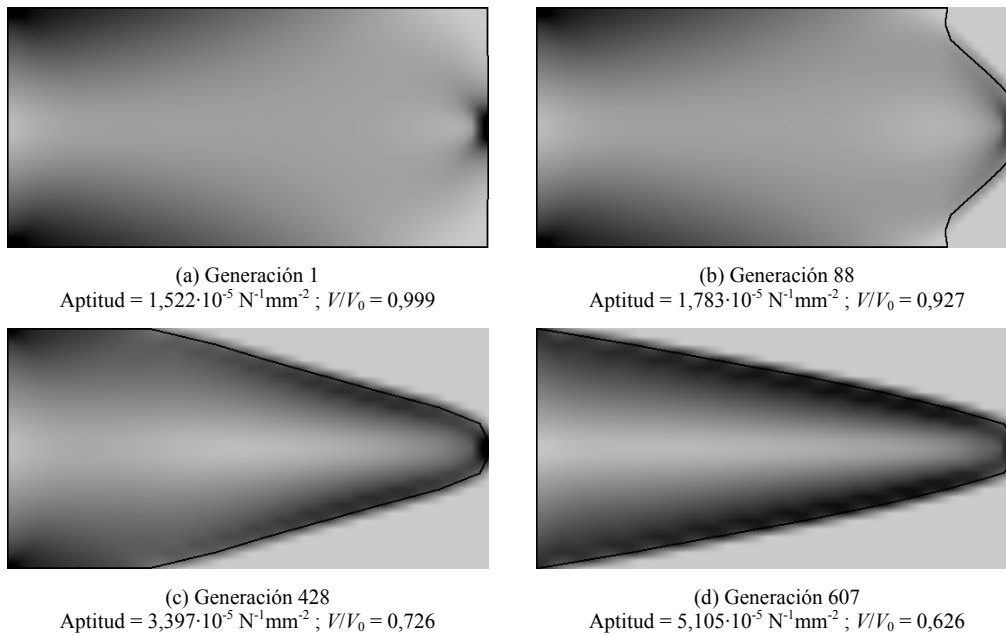


Figura 4.16 Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Formas óptimas para diferentes generaciones

En la tabla 4.4 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

Tabla 4.4 Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-2}$) |
|-----|------------------------------|-----------------------|-----------------|---------------|--------------------------------|
| 1 | 98,247 | $1,877 \cdot 10^{-1}$ | 0,999 | 24,72 | $1,522 \cdot 10^{-5}$ |
| 88 | 101,437 | $1,913 \cdot 10^{-1}$ | 0,927 | 2158,36 | $1,783 \cdot 10^{-5}$ |
| 428 | 112,390 | $2,880 \cdot 10^{-1}$ | 0,726 | 10627,05 | $3,397 \cdot 10^{-5}$ |
| 607 | 119,375 | $4,254 \cdot 10^{-1}$ | 0,626 | 15260,68 | $5,105 \cdot 10^{-5}$ |

En las Figs. 4.17 se muestran la evolución del desplazamiento máximo, la fracción de volumen, y la aptitud con las generaciones.

En la Fig. 4.17a se observa que el desplazamiento máximo aumenta de forma más gradual que la disminución de la fracción de volumen. Si se comparan los diseños inicial y final (generación 607) se aprecia que el valor de la aptitud aumenta desde $1,522 \cdot 10^{-5} N^{-1}mm^{-2}$ hasta $5,105 \cdot 10^{-5} N^{-1}mm^{-2}$, lo que supone un incremento del 235,41% (Fig. 4.17b).

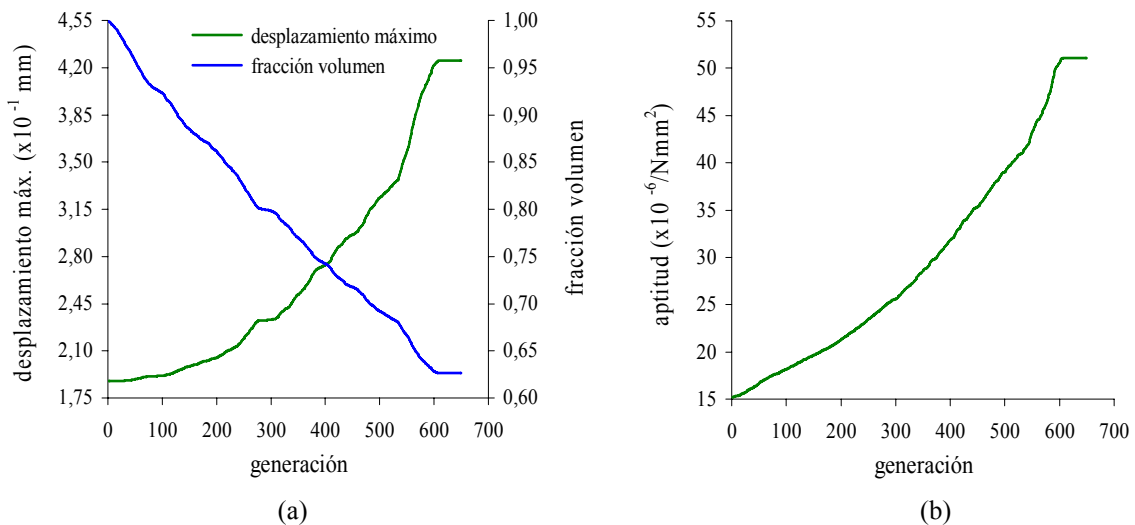


Figura 4.17 Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación

En las Figs. 4.18a a 4.18b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos FG-GA (Woon, 2002) y MFAG-f respectivamente. Como se puede apreciar los diseños presentan formas similares. Sin embargo, el diseño óptimo obtenido con el método MFAG-f presenta un 6,49% menos volumen ($28170 mm^3$) que, el diseño óptimo teórico ($30000 mm^3$), mientras que el volumen del diseño conseguido con el método FG-GA ($30427,5 mm^3$) es un 1,43% mayor.

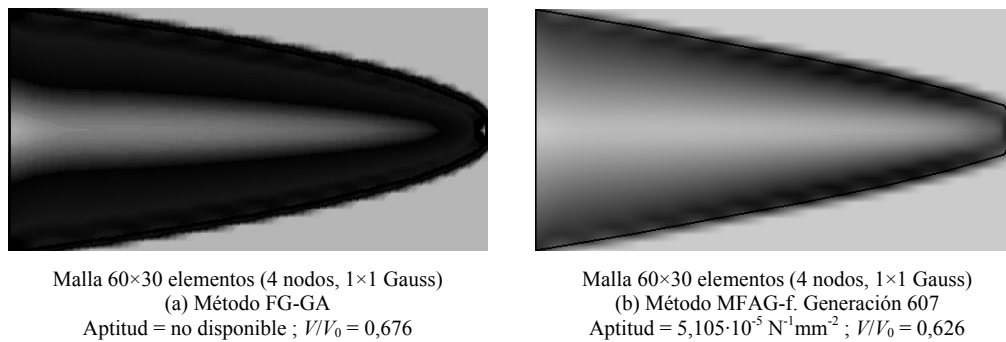


Figura 4.18 Voladizo 2 con fuerza vertical centrada en el extremo libre. (a) Método FG-GA.
(b) Método MFAF-f

4.7.3 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior

El tercer ejemplo es una viga con apoyos fijos y una fuerza vertical de 500 N centrada en la fibra inferior. La longitud del dominio de diseño es 100 mm, la altura 80 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 440 elementos, 22 en dirección longitudinal y 20 en dirección transversal (debido a la simetría, solamente es necesario analizar la mitad del modelo). Se han dispuesto 20 puntos de control, distribuidos uniformemente, 11 en el borde superior y 9 en el borde inferior (Fig. 4.19).

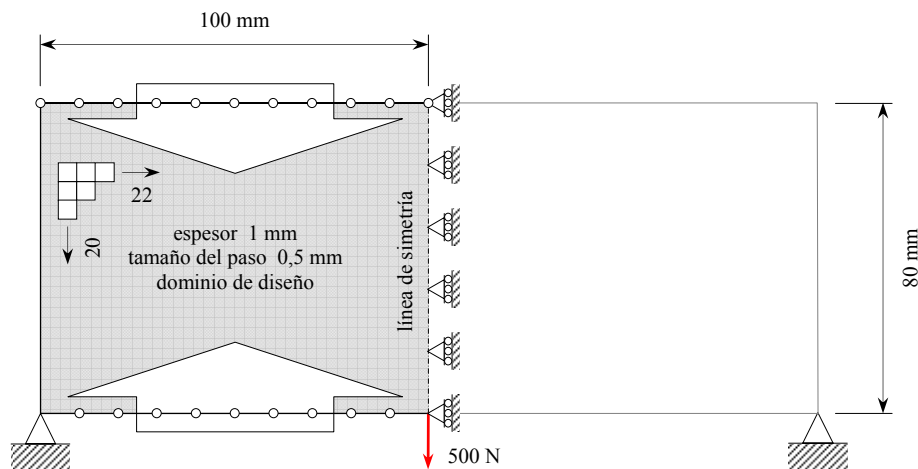


Figura 4.19 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical de 500 N centrada en la fibra inferior.
Dominio de diseño

En las Figs. 4.20 se muestran las formas óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 200, obteniendo la forma óptima en la generación 169.

En la tabla 4.5 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

En las Figs. 4.21 se muestran la evolución del desplazamiento máximo, la fracción de volumen, y la aptitud con las generaciones.

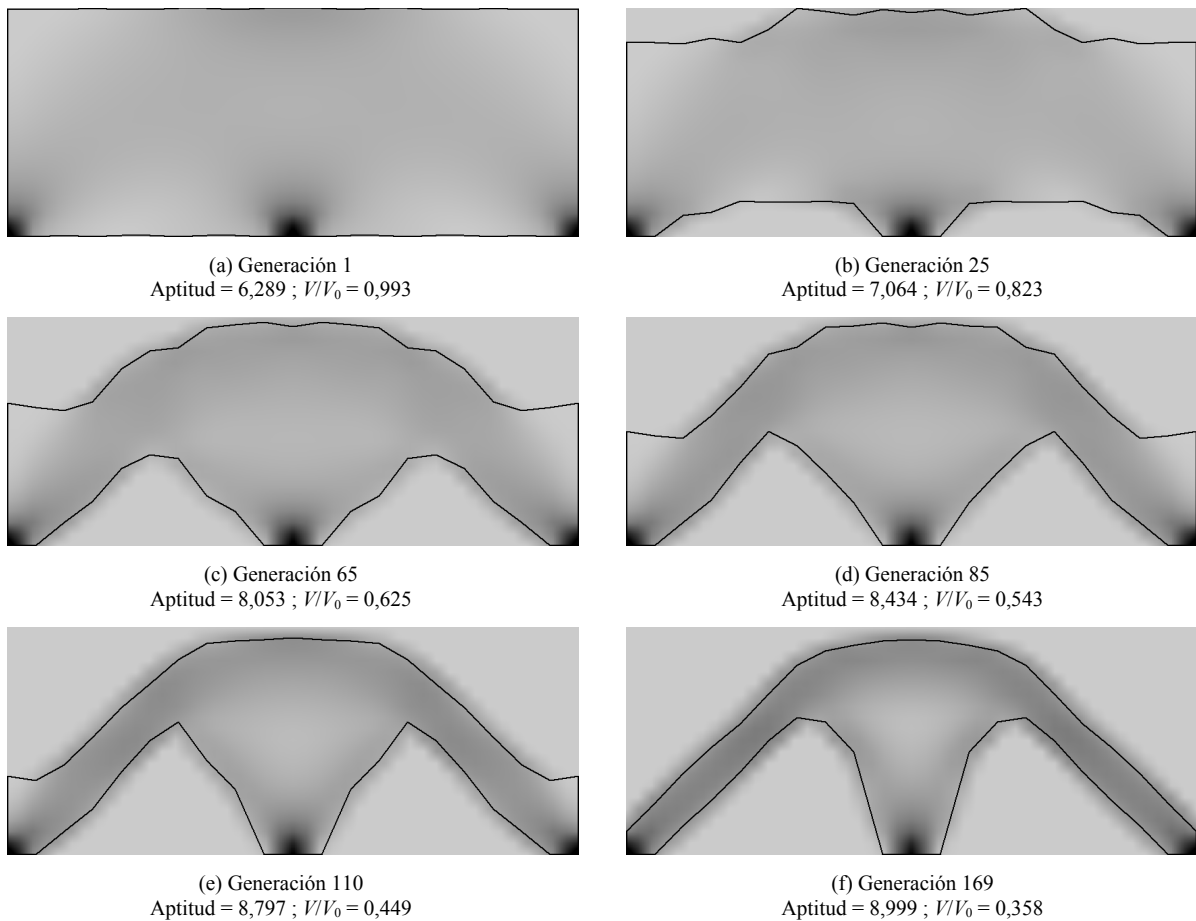


Figura 4.20 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Formas óptimas para diferentes generaciones

Tabla 4.5 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Tiempo (s) | Aptitud |
|-----|------------------------------|-----------------------|-----------------|---------------|---------|
| 1 | 643,194 | $3,638 \cdot 10^{-2}$ | 0,993 | 13,61 | 6,289 |
| 25 | 658,207 | $3,910 \cdot 10^{-2}$ | 0,823 | 334,82 | 7,064 |
| 65 | 687,694 | $4,515 \cdot 10^{-2}$ | 0,625 | 870,47 | 8,053 |
| 85 | 702,965 | $4,959 \cdot 10^{-2}$ | 0,543 | 1139,71 | 8,434 |
| 110 | 729,504 | $5,753 \cdot 10^{-2}$ | 0,449 | 1476,54 | 8,797 |
| 169 | 758,827 | $7,058 \cdot 10^{-2}$ | 0,358 | 2266,86 | 8,999 |

En la Fig. 4.21a se observa que el desplazamiento máximo y la fracción de volumen aumentan y decrecen respectivamente de forma progresiva. Si se comparan los diseños inicial y final (generación 169) se aprecia que el valor de la aptitud aumenta desde 6,289 hasta 8,999, lo que supone un incremento del 43,09% (Fig. 4.21b).

En las Figs. 4.22a a 4.22b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos FG-GA (Woon, 2002) y MFAG-f respectivamente. Como se puede apreciar los diseños presentan formas similares. Sin embargo, el diseño óptimo obtenido con el método MFAG-f presenta un volumen un 15,64% menor y un desplazamiento normalizado máximo un 16,23% mayor que

los conseguidos con el método FG-GA, lo que implica que la aptitud final es un 1,33% menor que la conseguida con el método FG-GA.

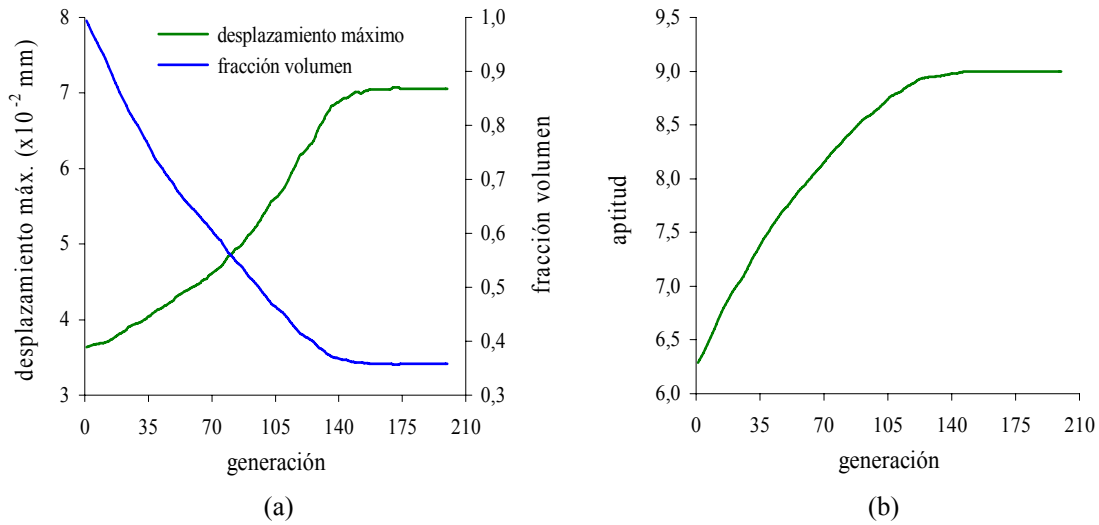
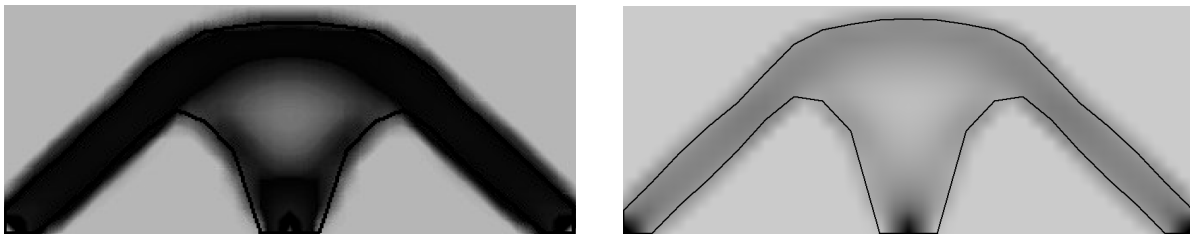


Figura 4.21 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación



(a) Método FG-GA. Generación 812
 $D_{max}/D_{max,0} = 1,669$; $V/V_0 = 0,414$; $F/F_0 = 1,450$
 Malla 44×20 elementos (4 nodos, 1×1 Gauss)

(b) Método MFAG-f. Generación 169
 $D_{max}/D_{max,0} = 1,940$; $V/V_0 = 0,358$; $F/F_0 = 1,431$
 Malla 44×20 elementos (4 nodos, 2×2 Gauss)

Figura 4.22 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Método FG-GA. (b) Método MFAG-f

4.7.4 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior

El cuarto ejemplo es una viga con una carga vertical de 500 N en el centro de la fibra inferior, y está soportada por dos apoyos situados en sus bordes inferiores, uno de los cuales es de tipo deslizante. La longitud del dominio de diseño es 210 mm, la altura 280 mm y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 588 elementos, 21 en dirección longitudinal y 28 en dirección transversal (debido a la simetría, solamente es necesario analizar la mitad del modelo). Se han dispuesto 20 puntos de control, distribuidos uniformemente, 15 en el borde superior y 5 en el borde inferior (Fig. 4.23).

En las Figs. 4.24 se muestran las formas óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 300, obteniendo la forma óptima en la generación 263.

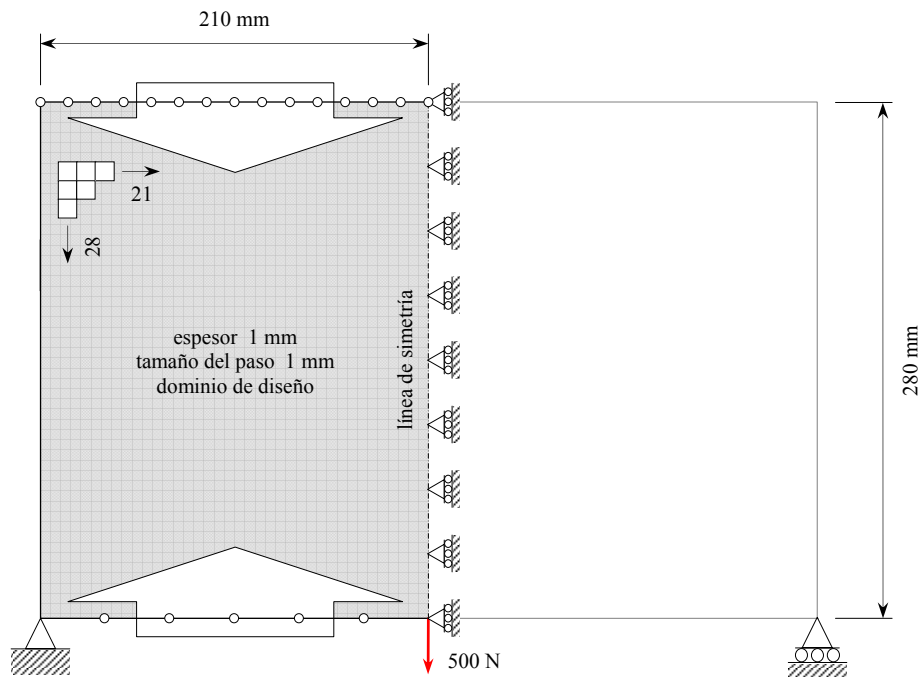


Figura 4.23 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical de 500 N centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño

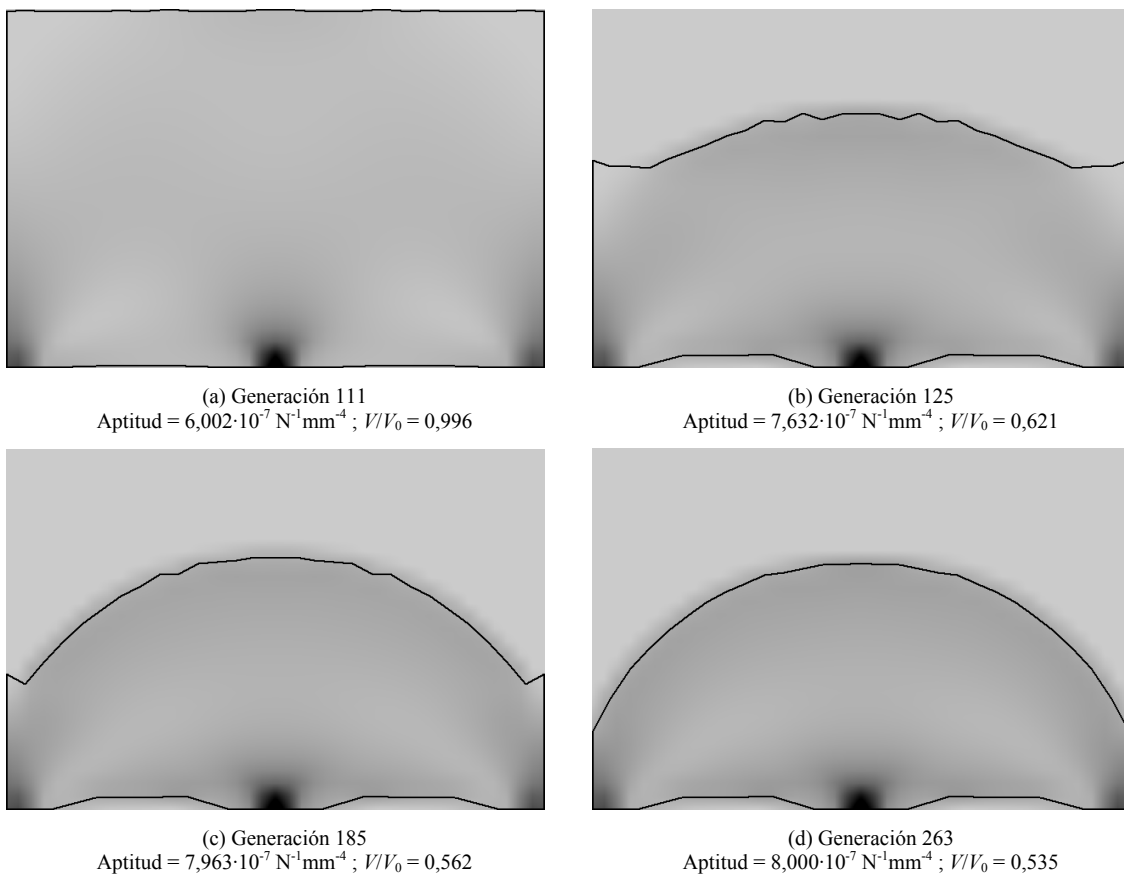


Figura 4.24 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Formas óptimas para diferentes generaciones

En la tabla 4.6 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

Tabla 4.6 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|-----|------------------------------|-----------------------|-----------------|---------------|--------------------------------|
| 1 | 264,922 | $2,845 \cdot 10^{-2}$ | 0,996 | 32,02 | $6,002 \cdot 10^{-7}$ |
| 125 | 267,187 | $3,591 \cdot 10^{-2}$ | 0,621 | 3987,36 | $7,632 \cdot 10^{-7}$ |
| 185 | 267,597 | $3,802 \cdot 10^{-2}$ | 0,562 | 5898,50 | $7,963 \cdot 10^{-7}$ |
| 263 | 268,091 | $3,976 \cdot 10^{-2}$ | 0,535 | 8375,88 | $8,000 \cdot 10^{-7}$ |

En las Figs. 4.25 se muestran la evolución del desplazamiento máximo, la fracción de volumen, y la aptitud con las generaciones.

En la Fig. 4.25a se observa que el desplazamiento máximo y la fracción de volumen aumentan y decrecen respectivamente de forma progresiva. Si se comparan los diseños inicial y final (generación 277) se aprecia que el valor de la aptitud aumenta desde $6,00 \cdot 10^{-7} N^{-1}mm^{-4}$ hasta $8,00 \cdot 10^{-7} N^{-1}mm^{-4}$, lo que supone un incremento del 33,33% (Fig. 4.25b).

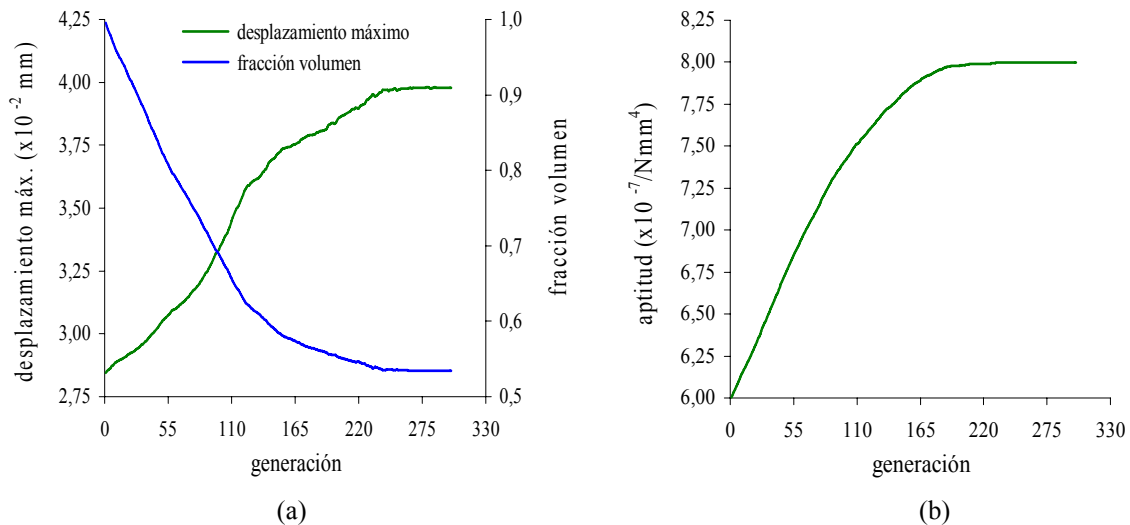


Figura 4.25 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución desplazamiento máximo/fracción de volumen/generación. (b) Evolución aptitud/generación

En las Figs. 4.26a a 4.26c se muestran los óptimos obtenidos con los métodos FG-GA (Woon, 2002), Nibbling ESO (Xie y Steven, 1997) y MFAG-f respectivamente. Como se puede apreciar los diseños presentan formas similares. Aunque, el diseño óptimo obtenido con el método MFAG-f es igual de apto que los conseguidos con los métodos FG-GA y Nibbling ESO (aptitudes un 0,74% y un 0% menores respectivamente), el volumen final es menor un 4,11% y un 3,93% respectivamente.

De nuevo, la principal ventaja de los diseños obtenidos con el método MFAG-f frente a los conseguidos con los métodos Nibbling ESO, es la calidad con la que se define la forma final del diseño.

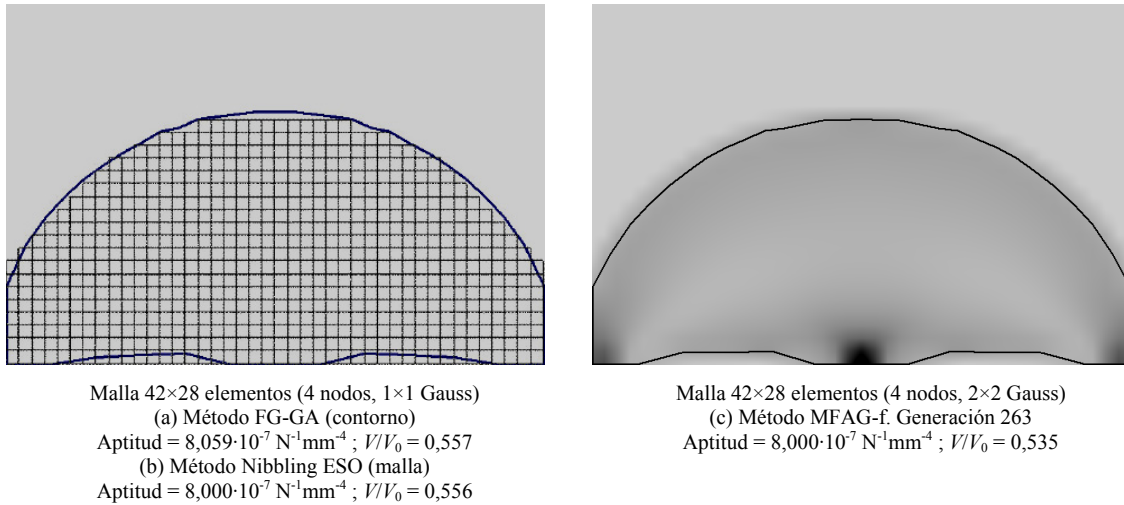


Figura 4.26 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Método FG-GA. (b) Método Nibbling ESO. (c) Método MFAG-f

Capítulo 5

Optimización de topología con isolíneas y malla fija

5.1 INTRODUCCIÓN

En los problemas de diseño óptimo, la topología de la estructura, es decir, el número, la posición, y la conectividad de sus elementos, resulta crucial para obtener un modelo que presente unas características adecuadas que permitan desempeñar la función para la cual está diseñada la estructura.

Los métodos tradicionales para la optimización de forma, presentan importantes limitaciones en este sentido, ya que estas técnicas no permiten modificar la topología inicial del diseño, y dependen por tanto de la habilidad e intuición del diseñador a la hora de concebir un modelo de partida adecuado. En su mayoría, estos métodos se basan en la mejora de un modelo cuya topología inicial está prefijada, de manera que el diseño óptimo se alcanza modificando la geometría del contorno del modelo de partida. Este planteamiento para el problema de optimización puede parecer a primera vista totalmente general. Sin embargo, no lo es, dado que esta forma de abordar el problema no permite eliminar o añadir nuevos elementos (o cavidades) al diseño, es decir la conectividad de los distintos elementos de la estructura no puede ser modificada. Por tanto, se hace patente la necesidad de utilizar técnicas de optimización que obtengan la forma y la topología óptimas. A este tipo de optimización, donde los cambios de forma y topología se gestionan al mismo tiempo, se denomina optimización conjunta de forma y topología.

Muchos de los trabajos (sobre todos los primeros estudios) realizados que trataban de resolver el diseño óptimo de forma y topología (Lin y Chao, 2000) contemplaban este tipo de optimización como una extensión del diseño óptimo de forma, pero de forma separada, es decir, los resultados obtenidos a partir de la optimización de topología y de forma se estudiaban de forma independiente, o a lo sumo, los primeros se utilizaban como datos de

entrada para realizar a partir de la estructura obtenida un suavizado (Hsu y Hsu, 2005), pero manteniendo invariable la topología de la misma. Sin embargo, dicha técnica no parece ser, en general, la más adecuada para determinar el diseño óptimo.

Ansola (2000) intercala de forma sucesiva etapas de optimización de forma con las correspondientes para la optimización de topología, estudiando la convergencia del método así como, la validez de los resultados que se van obteniendo. Evidentemente, esta metodología requiere la coordinación de un número elevado de módulos, los cuales deben de interactuar entre sí de manera conjunta, para dirigir el diseño de modo consistente hacia el óptimo. Una vez seleccionado el orden (optimización de forma y topología o viceversa) en el cual las etapas se van a introducir en el proceso de optimización, el siguiente paso consiste en decidir el número de ciclos (o iteraciones) que se van a realizar en cada una de las etapas. Sin embargo, debemos de tener presente que pequeñas modificaciones en la forma o en la topología, pueden alterar el comportamiento de la estructura con respecto a la etapa anterior. Por este motivo, parece lógico pensar que durante el proceso de optimización conviene que ambas etapas cuenten con el mismo peso en el proceso global, y por tanto se intercalen con la mayor celeridad posible.

Indudablemente, si se dedica un número elevado de iteraciones a cada una de las etapas ó simplemente una cantidad diferente, puede ocurrir que, por ejemplo, la optimización de forma avance excesivamente para la actual distribución de material, distribución que variará su topología en la próxima etapa, haciendo que las iteraciones empleadas en la optimización de forma resulten inconvenientes o contraproducentes.

Si se analizan las topologías obtenidas en la bibliografía más reciente, se observa la correlación entre las isolíneas del problema y la localización de las cavidades. La relación existente entre las isolíneas y la topología óptima de la estructura es aprovechada en algunos de los trabajos más recientes, y que a continuación de forma muy breve se describen.

Hsu y Chen (2001) presentan un procedimiento integrado para la optimización de forma y topología. En este proceso, las isolíneas correspondientes a la densidad del material son utilizadas para interpretar las diferentes topologías propuestas para la optimización. El método está completamente automatizado, no siendo necesaria, la interpretación o intervención del usuario.

Cui, Ohmori, y Sasaki (2003) proponen un nuevo método denominado XESO (*Extended Evolutionary Structural Optimization*). Este método introduce en el proceso de optimización el empleo de las isolíneas de tensión de Von Mises, permitiendo controlar de forma activa, la forma y la topología de la estructura. El procedimiento permite eliminar o agregar de forma gradual (ampliamente al comienzo, y en menor medida al final de la optimización) el material de la estructura, considerando a diferencia del método ESO, el estado tensional particular de la estructura dentro del proceso de optimización.

Woon, Tong, Querin, y Steven (2003) presentan un nuevo procedimiento para la optimización conjunta de forma y topología, empleando para ello dos algoritmos genéticos. En este trabajo la optimización es tratada como un problema doble. El algoritmo genético externo (*external-GA*) es utilizado para optimizar la forma de la estructura, y está basado en el

método FG-GA. Mientras que, otro algoritmo genético (*internal-GA*) tiene por objetivo determinar el número, forma, y distribución de las cavidades interiores a partir de las isolíneas (tensión de Von Mises) del problema.

Con el fin de evitar la problemática asociada a la división de etapas (forma/topología), uno de los objetivos principales de esta tesis es el diseño y desarrollo de un procedimiento integrado que permita la optimización conjunta de forma y topología de estructuras continuas en problemas bidimensionales, empleando para ello las isolíneas del problema y una malla fija de elementos finitos para el análisis. Destacar que, el uso de la malla fija, facilita en gran medida el soporte a través de cual, las isolíneas del problema describen la forma exterior de la estructura, así como el número, forma, y distribución de las cavidades interiores.

5.2 OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS

Si obtenemos los valores de las tensiones que se producen en las secciones transversales de la pieza en estudio, podemos determinar cómo varían las tensiones principales a través del dominio; y por tanto es posible construir dos sistemas de curvas ortogonales, denominadas *isostáticas* (envolventes de las tensiones principales), las cuales proporcionan las direcciones de las tensiones principales. En la Fig. 5.1 se representan las isostáticas para una viga en voladizo con sección rectangular sometida a una fuerza vertical aplicada en el centro del extremo libre.

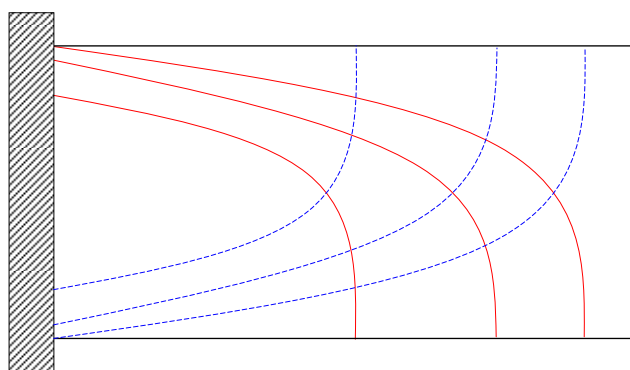


Figura 5.1 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre. Curvas isostáticas. Tensiones principales de tracción (líneas sólidas). Tensiones principales de compresión (líneas de trazos)

Las líneas sólidas describen las tensiones principales de tracción, y las líneas de trazos las tensiones principales de compresión. Las curvas¹ para las tensiones principales de tracción y de compresión se cortan siempre en ángulo recto, y cada trayectoria cruza el eje longitudinal a 45°. En las superficies superior e inferior de la viga, donde las tensiones tangenciales son nulas, las trayectorias son horizontales o bien verticales.

¹ El ingeniero ferroviario y de puentes alemán Karl Culman (1821-1881) ideó las trayectorias de tensión. En 1849-1850 pasó dos años viajando por Inglaterra y los Estados Unidos para estudiar puentes y después escribió al respecto en Alemania. Diseñó en Europa numerosas estructuras de puentes, y en 1855 enseñó estructuras en el recién establecido Polytechnicum de Zürich. Hizo muchos desarrollos en métodos gráficos y escribió el primer libro sobre estática gráfica, publicado en Zürich en 1866. Uno de los temas originales presentados en este libro es el de las trayectorias de tensiones (o isostáticas).

Otro tipo de curvas que pueden trazarse a partir de las tensiones principales son las *isobaras* (o *isolíneas*) de tensión, lugares geométricos de los puntos en los cuales las tensiones principales correspondientes a cada una de las familias de isostáticas tienen el mismo valor.

Hay, pues, dos familias de isobaras, correspondientes cada una de ellas a cada una de las dos familias de isostáticas.

En la Fig. 5.2 se representan las *isolíneas* para las tensiones principales de tracción en el caso de una viga en voladizo con sección transversal rectangular. La *isolínea* de tensión de valor máximo se dispone en la parte superior izquierda (la *isolínea* de tracción nula en el borde inferior). De forma que, conforme nos movemos hacia abajo en la figura, las tensiones de tracción representadas por los contornos son cada vez de menor valor.

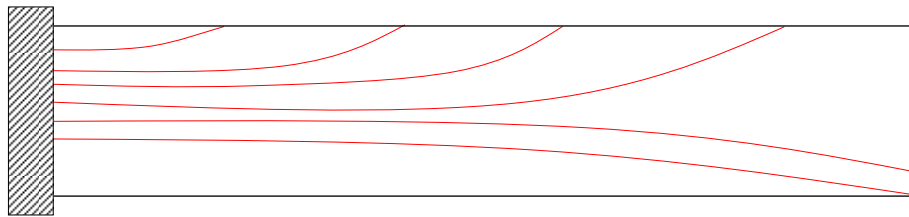


Figura 5.2 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre. *Isolíneas* para las tensiones principales de tracción

En la Fig. 5.1 se puede observar que las isostáticas proporcionan las direcciones de las tensiones principales, pero no ofrecen información sobre sus valores. En general, los valores de las tensiones principales varían según nos movemos a lo largo de una trayectoria². Por el contrario, los valores de las tensiones principales permanecen constantes según nos movemos a lo largo de la misma *isolínea* (Fig. 5.2), pero esta curva no nos proporciona información sobre las direcciones principales.

Tanto en el estado de deformación plana, como en el de tensión plana es suficiente estudiar las tensiones en un plano paralelo al director. En muchos casos, el conocimiento de las *isolíneas* de tensión facilita el estudio del estado tensional, y permiten deducir algunas de las particularidades que se pueden presentar.

Dos aspectos claves deben de considerarse, cuando la topología del diseño se genera aprovechando las *isolíneas* para la detección de posibles cavidades.

- La generación de *isolíneas* es un proceso evolutivo, de forma que la generación de un conjunto de *isolíneas* reorganiza el campo de distribución sobre el cual se determinaron, lo que puede dar a lugar, a la generación de nuevas cavidades. Es decir, el crecimiento (positivo ó negativo) del número de *isolíneas* es un proceso gradual que se construye a partir de la existencia anterior de otras *isolíneas*. Resaltar que, algunas de estas *isolíneas* son cruciales para la evolución de la estructura, mientras que otras influyen desfavorablemente a la optimalidad del

² En las Figs. 5.1 y 5.2, se han despreciado para representar las *isolíneas* y las isostáticas, tanto las concentraciones de tensión cerca de los soportes, como las producidas por las fuerzas aplicadas.

diseño, y algunas crean conexiones que conducirán a situaciones favorables para la formación de isolíneas de mayor importancia.

- La generación continua de isolíneas a partir de otras isolíneas es un procedimiento altamente dinámico e interactivo. De modo que, para un conjunto de isolíneas dadas, la creación o eliminación de algunas de éstas, implica grandes cambios en la distribución del campo, y por tanto, en la forma y localización de las posteriores isolíneas.

5.3 CRITERIOS DE REFERENCIA PARA LA EXTRACCIÓN DE ISOLÍNEAS

El algoritmo del método MFAG-i (Apéndices A y B) para el diseño óptimo de topología con isolíneas y malla fija depende fundamentalmente del número, forma, y localización de las isolíneas, y éstas a su vez dependen del valor de referencia adoptado para su extracción.

Woon (2002) determina el valor de referencia σ_{ref} a partir de los valores máximos σ_h y mínimo σ_l de las tensiones de Von Mises, y un porcentaje de referencia $\sigma_{\%,ref}$

$$\sigma_{ref} = \frac{\sigma_{\%,ref}}{100}(\sigma_h - \sigma_l) + \sigma_l \quad (5.1)$$

En el caso de que las isolíneas a lo largo de σ_{ref} no generen ninguna cavidad, se realiza una búsqueda dentro del rango $\sigma_{s,1}$ y $\sigma_{s,2}$ acotado en la Ec. (5.2).

$$\begin{aligned} \sigma_{s,1} &= \sigma_{ref} \left(1 - \frac{\sigma_{\%,s}}{100} \right) \\ \sigma_{s,2} &= \sigma_{ref} + \frac{\sigma_{\%,s}}{100}(\sigma_h - \sigma_{ref}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Victoria y Martí (2004) obtienen el valor de referencia a través del promedio de las tensiones de Von Mises σ_{vm} correspondientes a los n_n nodos incluidos en el diseño, y un coeficiente C_m que permite modular el resultado final

$$\sigma_{ref} = \frac{C_m}{100} \frac{1}{n_n} \sum_{i=1}^{n_n} \sigma_{vm,i} \quad (5.3)$$

En la Ec. (5.4) se presenta otra expresión utilizada por Victoria y Martí (2005) para obtener el valor de referencia

$$\sigma_{ref} = \frac{RR}{100} \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \sigma_{vm,i} \quad (5.4)$$

donde RR es un coeficiente definido por el usuario, n_p el número de puntos de control que definen la forma del contorno exterior de la estructura, y $\sigma_{vm,i}$ el valor de la tensión de Von Mises en el punto clave i . En el caso de que en una de las iteraciones no se encuentre una

topología mejor, se procede a realizar una búsqueda dentro del rango RR_s y RR_i acotado en la Ec. (5.5).

$$\begin{aligned} RR_s &= RR \cdot SS_a \\ RR_i &= RR \cdot SS_d \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde SS_a es el porcentaje de ascenso y SS_d el porcentaje de descenso, ambos parámetros definidos por el usuario.

Si analizamos la Ec. (1.2) planteada en el método ESO se observa que, el valor fijado para la tensión de referencia se obtiene simplemente como un porcentaje del valor máximo de la tensión en los elementos.

Tras analizar las diferentes alternativas recogidas en la bibliografía más reciente. El criterio implementado en el algoritmo de MFAG-i para obtener el valor de referencia es bastante sencillo, y está basado en el criterio utilizado en el método ESO.

Una vez que se ha obtenido la respuesta del diseño, el criterio para determinar el valor de las isóneas de referencia se plantea como

$$\sigma_{ref} = \sigma_{min} + \alpha \sigma_{med} \quad (5.6)$$

siendo σ_{min} y σ_{med} los valores mínimo y medio respectivamente, obtenidos a partir de los nodos situados en el interior o sobre el contorno de la estructura, y α un ratio cuyo valor real es positivo mayor que cero.

Al introducir el valor mínimo σ_{min} en el criterio para la extracción de las isóneas, aseguramos que en cada una de las iteraciones al menos, una pequeña región del dominio entra o sale de la estructura, aumentando la velocidad de convergencia.

En el método ESO clásico se establece que, la topología alcanza un estado estacionario (*steady state*) si en una iteración no se puede eliminar nuevos elementos de la estructura. Con el propósito de seguir eliminando elementos, se introduce un ratio evolucionario ER , el cual se añade al ratio de rechazo RR , aumentando con ello el valor de referencia

$$RR_i = RR_i + ER \quad (5.7)$$

Esta idea se reproduce de forma similar en el algoritmo de optimización implementado en el método MFAG-i

$$\alpha_{i+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_i = \alpha_0 & \text{si } i = 1 \\ \alpha_i + \Delta\alpha & \text{si } \Delta V \leq \Delta V_{min} \\ \alpha_i & \text{en otro caso} \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

de forma que, si la variación de volumen ΔV entre dos iteraciones i e $i+1$ es inferior a un valor mínimo ΔV_{min} , el valor de referencia σ_{ref} se modifica aumentando el valor de α una cantidad $\Delta\alpha$.

La experiencia adquirida con los ejemplos realizados en este capítulo aconseja los siguientes valores: $\alpha_0 = 0,1 \div 0,6$; $\Delta\alpha = 0,01 \div 0,025$, y $\Delta V_{min} = 0,05\% \div 0,5\%$.

5.4 TIPOS DE ISOLÍNEAS DE REFERENCIA

Las isobaras son líneas que unen puntos con igual valor de las tensiones principales σ_1 ó σ_2 . De acuerdo con esta definición, tendremos dos familias de isolíneas, una correspondiente a σ_1 y otra correspondiente a σ_2

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.9)$$

Este concepto inicialmente desarrollado para las tensiones principales es totalmente aplicable a otros estimadores de referencia. De hecho, uno de los estimadores más utilizados en la optimización de topología son las isolíneas de tensión de Von Mises

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (5.10)$$

en un sistema de ejes principales, y

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (5.11)$$

en un sistema de ejes no principales.

El algoritmo para la extracción de las isolíneas implementado en el programa MFAG, dispone de los estimadores de referencia: tensión de Von Mises, energía de deformación, y densidad de energía de deformación.

La energía de deformación puede ser fácilmente obtenida a partir de la expresión de la energía potencial (Oberndorfer, Atchziger, y Hörnlein, 1996)

$$U^p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^{el} v_i + U^{pl} + U^s = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{K} + \mathbf{S}) \mathbf{u} \quad (5.12)$$

donde

| | |
|---------------------------------|--|
| n_{int} | número de puntos de integración |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | vector de tensiones |
| $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ | vector de deformaciones elásticas |
| v_i | volumen del punto de integración i |
| U^{pl} | energía por deformación plástica |
| U^s | energía por rigidización tensional |
| \mathbf{u} | vector de desplazamientos |
| \mathbf{K} | matriz de rigidez |
| \mathbf{S} | matriz de rigidez por rigidización tensional |

En el caso de un análisis elástico y lineal, la energía de deformación C se obtiene a partir de la Ec. (5.13)

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{int}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^{el} v_i = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (5.13)$$

En el caso de que el dominio se divida en elementos con diferentes tamaños (o espesores), la densidad de energía de deformación γ (energía de deformación por unidad de volumen) debe de ser calculada como estimador de referencia, para ello solo es necesario dividir la energía de deformación por el volumen

$$\gamma = \frac{C}{V} \quad (5.14)$$

5.5 REPRESENTACIÓN DE LAS ISOLÍNEAS DE REFERENCIA

El procedimiento para generar el contorno que define la topología de la estructura depende de la representación de las isolíneas de referencia.

Para extraer y representar los segmentos de línea que reproducen el perfil del contorno, se ha implementado una subrutina (Bourke, 1987) en el programa MFAG que ejecuta un algoritmo de contorneado (*Contouring Algorithm*).

Los parámetros de entrada para esta subrutina son:

- El número de nodos n_x y n_y en las direcciones x e y respectivamente.
- El número de valores de referencia n_{ref} a extraer.
- Valores de las isolíneas de referencia.
- Un vector \mathbf{z} que contiene el valor del estimador de referencia en cada nodo.
- Una matriz \mathbf{C}_{xy} con las coordenadas nodales x e y .

A continuación, se describe brevemente el procedimiento seguido por el algoritmo de contorneado para un elemento. Por lo que, la representación completa de las isolíneas se obtiene cuando el algoritmo se extiende al conjunto de todos los elementos (Fig. 5.3).

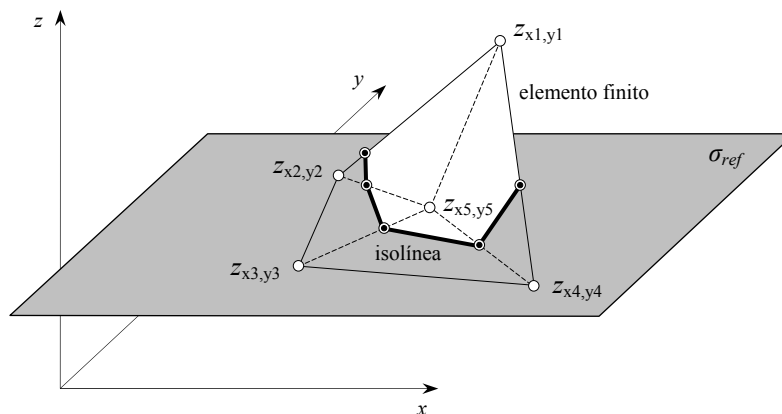


Figura 5.3 Segmentos de isolínea obtenidos mediante intersección de cuatro planos triangulares con el plano de referencia

- Para representar cualquiera de los elementos finitos rectangulares de cuatro nodos que dividen el dominio de diseño se emplean cinco puntos: cuatro coinciden con los nodos de esquina, situándose el quinto punto en el centro del elemento.

- El valor del estimador de referencia para el punto central se obtiene como el promedio de los valores en los cuatro puntos exteriores.
- A continuación, se divide el elemento en cuatro regiones, introduciendo cuatro semi-diagonales que conectan los nodos de las esquinas con el vértice central.
- Cada uno de estos cuatro nuevos planos triangulares puede ser o no intersectados por el plano correspondiente al valor de referencia. De esta forma, la intersección de estos planos proporciona segmentos rectos que constituyen una parte de la isolínea buscada.

En función del valor de la cota z que presente el plano de referencia σ_{ref} , en relación con la altura de los vértices $z_{xi,yi}$, se pueden presentar diez casos:

1. Todos los vértices quedan por debajo del plano de referencia.
2. Dos vértices quedan por debajo y uno sobre el plano de referencia.
3. Dos vértices quedan por debajo, y uno por encima del plano de referencia.
4. Un vértice por debajo y dos sobre el plano de referencia.
5. Un vértice por debajo, uno sobre, y otro por encima del plano de referencia.
6. Un vértice queda por debajo y dos por encima del plano de referencia.
7. Los tres vértices sobre el plano de referencia.
8. Dos vértices sobre y otro por encima del plano de referencia.
9. Un vértice sobre y dos por encima del plano de referencia.
10. Todos los vértices quedan por encima del plano de referencia.

En los casos 1, 2, 9, y 10 la intersección entre los dos planos no se produce, y por tanto no se necesita representar ningún segmento. En los casos 4 y 8 los planos se intersectan a lo largo del borde del triángulo, de modo que la línea es representada entre los dos vértices que quedan sobre el plano de referencia. El caso 5 requiere que el segmento se represente desde el vértice situado sobre el plano de referencia a otro punto sobre el borde opuesto. Este punto es determinado mediante la intersección del plano de referencia y una línea recta que une los otros dos vértices. En los casos 3 y 6 (son los más frecuentes) el segmento es representado desde un borde hacia el otro borde del triángulo. Y por último, el caso 7, para el cual el algoritmo no consigue obtener soluciones muy satisfactorias, aunque afortunadamente este es un caso que se presenta en muy pocas ocasiones.

5.6 ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS CON MALLA FIJA E ISOLÍNEAS

El método de la malla fija permite la completa disociación entre la malla de elementos finitos y la representación de la estructura, eliminando la necesidad de regenerar la malla, lo que proporciona una mayor independencia a la hora de generar nuevas formas y topologías.

El procedimiento seguido por el método de la malla fija para el análisis de estructuras continuas puede acoplarse a la optimización de topología con isolíneas. Para ello, solo se deben modificar unos pocos parámetros en el algoritmo.

Una vez son extraídas las isolíneas de referencia deben de ser clasificadas. Para ello, se obtiene el estimador de referencia en el interior del dominio encerrado por la isolínea. De forma que, si éste presenta un valor inferior al de referencia, la isolínea es clasificada como virtual, y en caso contrario como real.

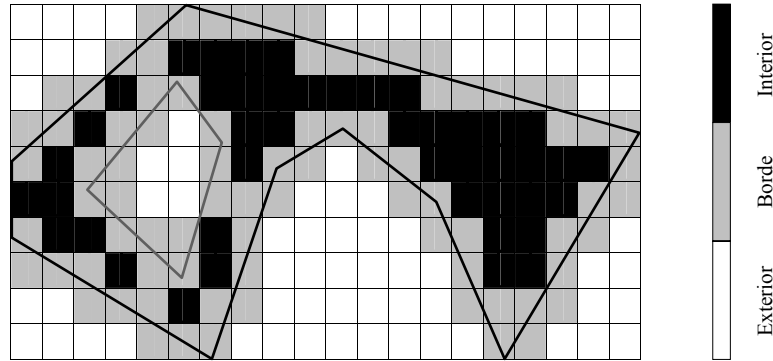


Figura 5.4 Aproximación de la topología con una malla fija. Clasificación de los elementos finitos con respecto a las isolíneas de referencia real (trazo oscuro) y virtual (trazo claro)

Una vez se han clasificado las isolíneas de referencia se comienza a modificar las matrices de rigidez de los elementos afectados por las isolíneas. Si el elemento está incluido en el dominio de una isolínea real

$$\mathbf{K}_{real}^{(e)} = \begin{cases} \mathbf{K}_I & \text{si } \xi = 1 \\ \mathbf{K}_O & \text{si } \xi = 0 \\ \mathbf{K}_B = \mathbf{K}_I \xi + (1 - \xi) \mathbf{K}_O & \text{si } 0 < \xi < 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

por el contrario, si el elemento pertenece a una isolínea virtual

$$\mathbf{K}_{virtual}^{(e)} = \begin{cases} \mathbf{K}_O & \text{si } \xi = 1 \\ \mathbf{K}_I & \text{si } \xi = 0 \\ \mathbf{K}_B = \mathbf{K}_O \xi + (1 - \xi) \mathbf{K}_I & \text{si } 0 < \xi < 1 \end{cases} \quad (5.16)$$

5.7 METODOLOGÍA PARA LA OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON MALLA FIJA E ISOLÍNEAS

A continuación, se procede a describir paso a paso el procedimiento seguido por el método MFAG-i para la optimización de topología con isolíneas y malla fija, incluido en el programa MFAG. Una representación esquemática de la metodología seguida por el proceso de optimización se muestra en la Fig. 5.5.

1. Definir las características del dominio inicial de la estructura (longitud, altura, espesor, regiones optimizables, no optimizables, etc.).
2. Establecer los parámetros del modelo para el análisis por elementos finitos con malla fija: número de elementos en ambas direcciones, módulo de elasticidad para

- el material real y virtual, coeficiente de Poisson, tipo de elemento, orden de integración, cargas aplicadas, condiciones de apoyo, etc.
3. Definir los parámetros del algoritmo de optimización: α_0 , α , $\Delta\alpha$, ΔV_{min} , y el número máximo de iteraciones.
 4. Establecer el estimador de referencia (energía de deformación, tensión de Von Mises, etc.) para las isolíneas.
 5. Analizar la respuesta inicial de la estructura.
 6. Determinar el valor de referencia para la definición de las isolíneas.
 7. Obtener las matrices de rigidez correspondientes a los elementos finitos. En caso de que el elemento se encuentre intersectado por el contorno de la estructura, utilizar el algoritmo de recorte para determinar la parte proporcional del elemento que se encuentra dentro de la isolínea.
 8. Analizar la respuesta del diseño, una vez actualizada la matriz de rigidez de la estructura, a partir de la situación del nuevo contorno.
 9. Si el número de iteraciones supera el número máximo permitido, finalizar el proceso de optimización. En caso contrario, continuar en el paso 10.
 10. Si la variación de volumen resulta inferior a ΔV_{min} , aumentar el valor de α añadiendo $\Delta\alpha$.
 11. Repetir los pasos 6 a 10, hasta satisfacer el criterio de parada definido en el paso 9.

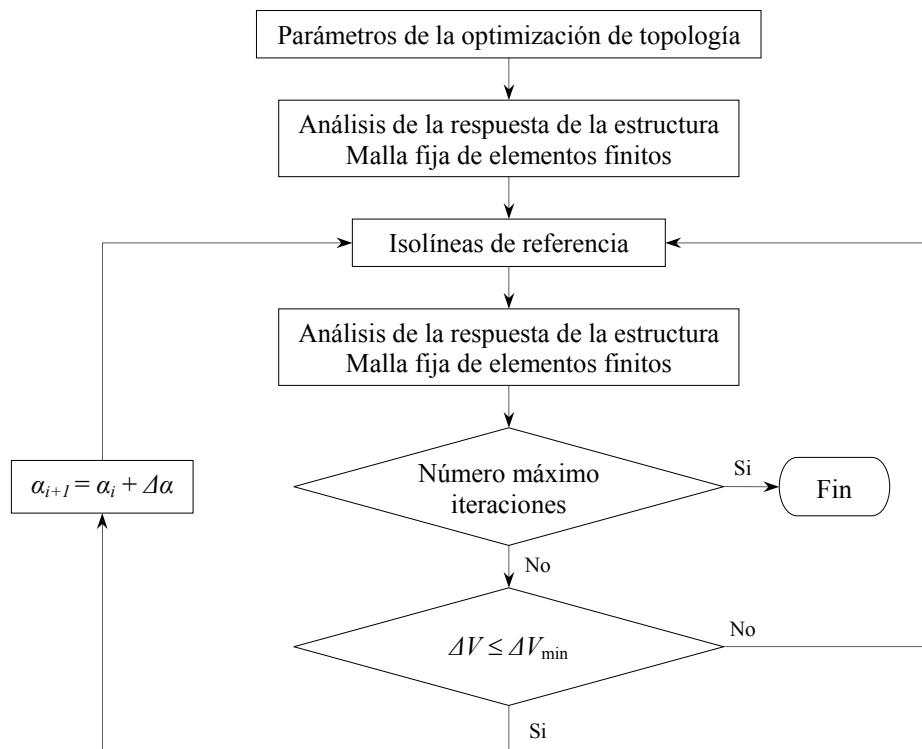


Figura 5.5 Diagrama de flujo del método MFAG-i para la optimización de topología con isolíneas y malla fija

5.8 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para validar el nuevo método propuesto MFAG-i se han resuelto ocho ejemplos diferentes para el voladizo de Michell, la viga biapoyada de Michell, la viga de Messerschmidt-Bölkow-Blohm (viga MBB), y la estructura de un puente con tablero fijo.

A lo largo de los distintos ejemplos se estudiará el efecto de la relación longitud/altura, condiciones de apoyo, tamaño del elemento, y la orientación de la carga.

En todos los ejemplos, el elemento finito utilizado es el elemento plano rectangular para tensión plana de cuatro nodos, utilizando para la integración numérica un total de cuatro puntos de Gauss. El estimador de referencia utilizado para la extracción de las isolíneas es la tensión de Von Mises.

Los valores adoptados para los parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño (longitud, altura, y espesor), y el análisis del modelo con malla fija (número de elementos en dirección longitudinal y transversal, módulo de elasticidad real, relación entre el módulo de elasticidad real y virtual, y coeficiente de Poisson) se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, y el análisis del modelo con malla fija de elementos finitos

| Ejemplo | L (mm) | h (mm) | t (mm) | Malla | E (MPa) | $\frac{E}{E_0}$ | ν |
|---|--------------------|-------------------|-------------------|---------|---------------------|-----------------|-------|
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$) | 16 | 10 | 1 | 192×120 | 210·10 ⁵ | 10 ⁴ | 0,3 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$) | 200 | 100 | 1 | 152×76 | 210·10 ³ | 10 ⁴ | 0,3 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$) | 200 | 50 | 10 | 160×40 | 2·10 ³ | 10 ⁴ | 0,4 |
| Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$) | 16 | 10 | 1 | 96×60 | 210·10 ⁵ | 10 ⁴ | 0,3 |
| Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 200 | 80 | 1 | 110×44 | 210·10 ³ | 10 ⁴ | 0,3 |
| Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 4·10 ³ | 2·10 ³ | 10 | 70×35 | 200·10 ³ | 10 ⁴ | 0,3 |
| Viga MBB | 900 | 150 | 1 | 180×30 | 210·10 ³ | 10 ⁴ | 0,3 |
| Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida | 18·10 ⁴ | 6·10 ⁴ | 3·10 ³ | 270×90 | 200·10 ³ | 10 ⁴ | 0,3 |

Los valores adoptados para los parámetros del algoritmo de optimización (ratio de referencia inicial, incremento ratio de referencia, diferencia mínima porcentual de volumen entre iteraciones, y número máximo de iteraciones) se recogen en la tabla 5.2.

Tabla 5.2 Parámetros que controlan el algoritmo de optimización

| Ejemplo | α_0 | $\Delta\alpha$ | ΔV_{min} (%) | N |
|---|------------|----------------|-------------------------|-----|
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$) | 0,585 | 0,010 | 0,05 | 150 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$) | 0,600 | 0,010 | 0,05 | 150 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$) | 0,350 | 0,010 | 0,50 | 125 |
| Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$) | 0,525 | 0,010 | 0,05 | 300 |
| Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 0,500 | 0,010 | 0,10 | 225 |
| Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 0,150 | 0,010 | 0,10 | 350 |
| Viga MBB | 0,350 | 0,010 | 0,05 | 550 |
| Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida | 0,100 | 0,010 | 0,10 | 650 |

5.8.1 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$)

El primer ejemplo de aplicación para el algoritmo de diseño óptimo de forma y topología con isolíneas y malla fija MFAG-i, es el voladizo corto de Michell. El voladizo está sometido a una fuerza vertical de 100 N en el centro del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 16 mm, la altura 10 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 23040 elementos, 192 en dirección longitudinal y 120 en dirección transversal (Fig. 5.6).

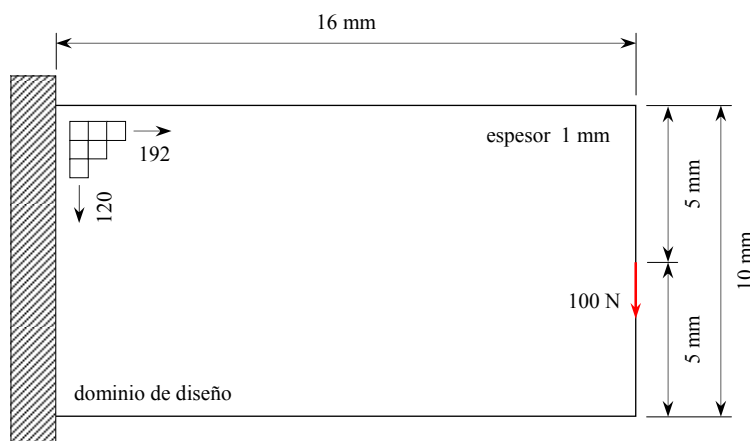


Figura 5.6 Voladizo con fuerza vertical de 100 N centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$).
Dominio de diseño

En las Figs. 5.7 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de iteraciones es 150, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 110.

En la tabla 5.3 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

En las Figs. 5.8 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

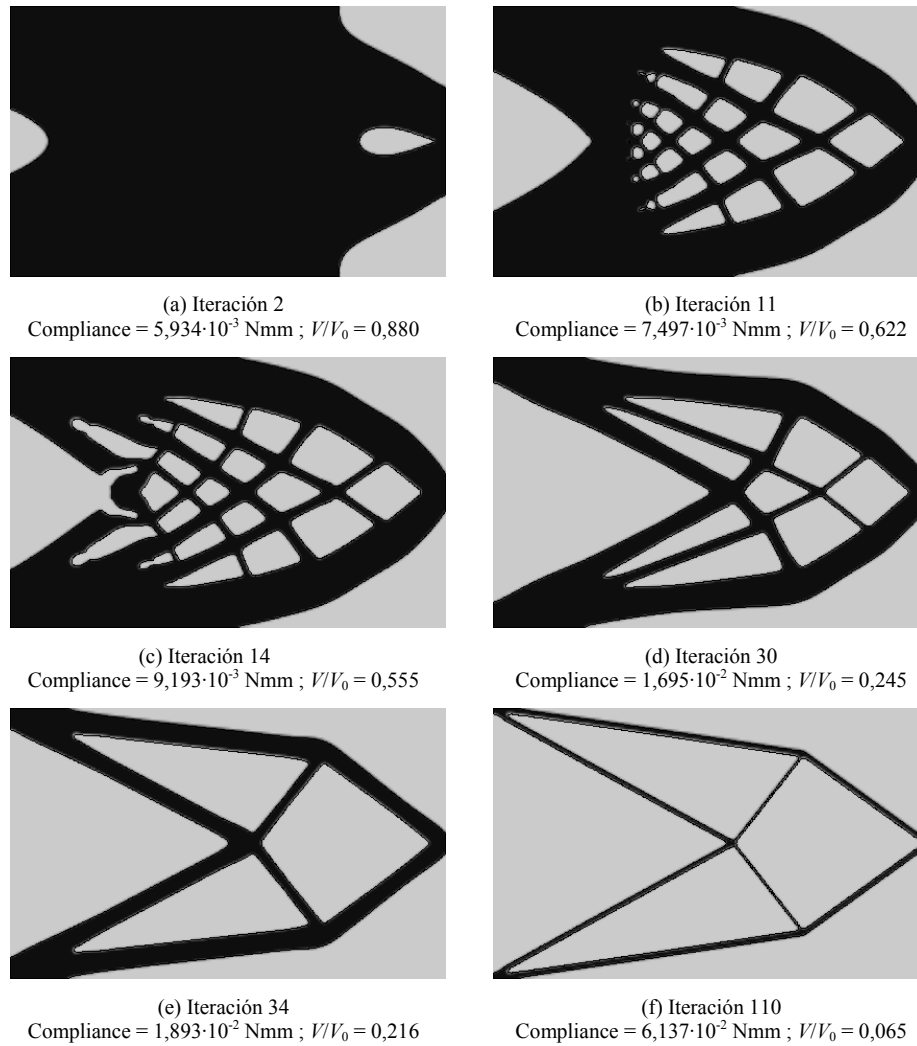


Figura 5.7 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones

Tabla 5.3 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------|--|---------------|
| 2 | 803,513 | 39,147 | 19,807 | 19,796 | $1,187 \cdot 10^{-4}$ | 0,880 | $5,934 \cdot 10^{-3}$ | 21,37 |
| 11 | 801,166 | 52,901 | 30,067 | 30,051 | $1,499 \cdot 10^{-4}$ | 0,622 | $7,497 \cdot 10^{-3}$ | 141,87 |
| 14 | 801,327 | 62,053 | 32,590 | 32,564 | $1,839 \cdot 10^{-4}$ | 0,555 | $9,193 \cdot 10^{-3}$ | 182,36 |
| 30 | 808,932 | 127,387 | 71,624 | 71,611 | $3,391 \cdot 10^{-4}$ | 0,245 | $1,695 \cdot 10^{-2}$ | 398,41 |
| 34 | 811,712 | 142,180 | 80,262 | 80,068 | $3,785 \cdot 10^{-4}$ | 0,216 | $1,893 \cdot 10^{-2}$ | 452,58 |
| 110 | 1121,320 | 376,504 | 241,847 | 241,478 | $1,228 \cdot 10^{-3}$ | 0,065 | $6,137 \cdot 10^{-2}$ | 1469,33 |

En la Fig. 5.8a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 2) se reduce significativamente al final (iteración 110) de la optimización (40,57 y 4,64 veces respectivamente), aumentado un 861,77% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

En la Fig. 5.8b se observa que la fracción de volumen decrece rápidamente hasta la iteración 20 ($V/V_0 = 37,22\%$), disminuyendo de forma más gradual hasta la iteración 60 ($V/V_0 = 10,90\%$), y estabilizándose en la iteración 110 ($6,49\%$). Si se comparan los diseños inicial (iteración 2) y final (iteración 110) se aprecia que el valor de la compliance aumenta desde $5,934 \cdot 10^{-3}$ Nmm hasta $6,137 \cdot 10^{-2}$ Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 10,34 veces.

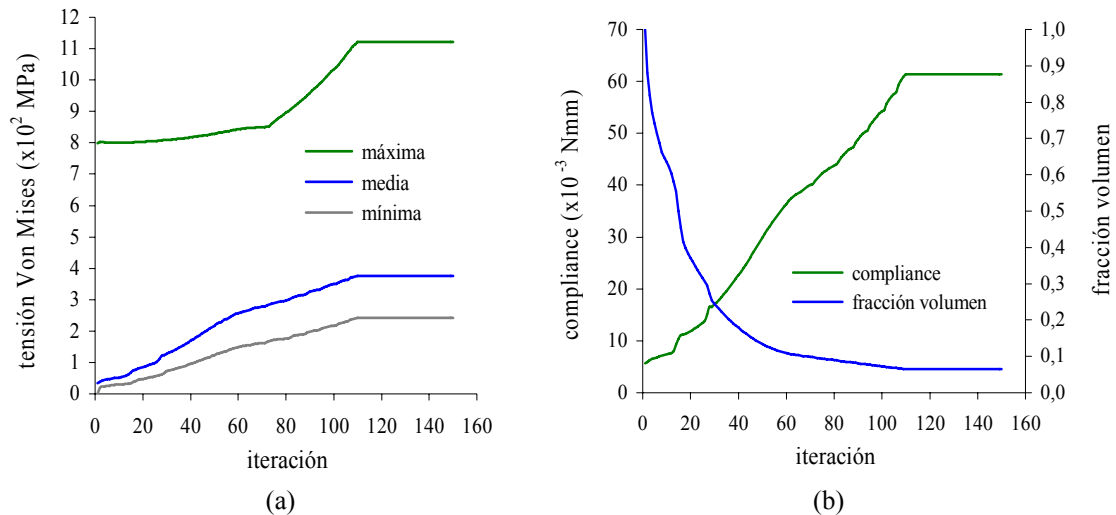


Figura 5.8 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

5.8.1.1 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$)

En este segundo ejemplo, el voladizo está sometido a una fuerza vertical de 1 kN en el centro del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 200 mm, la altura 100 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 11552 elementos, 152 en dirección longitudinal y 76 en dirección transversal (Fig. 5.9).

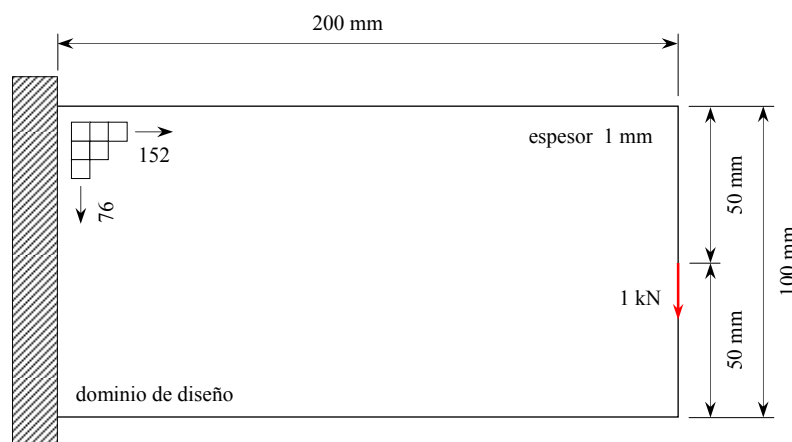


Figura 5.9 Voladizo con fuerza vertical de 1 kN centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Dominio de diseño

En las Figs. 5.10 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de iteraciones es 150, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 136.

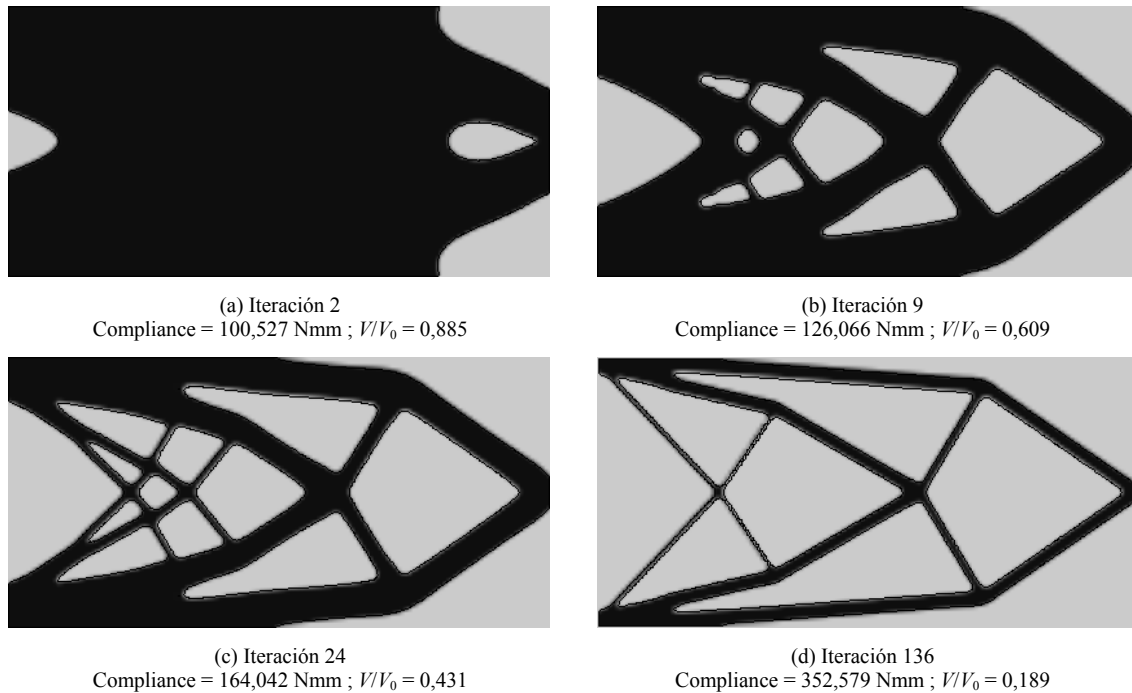


Figura 5.10 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones

En la tabla 5.4 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

En las Figs. 5.11 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

Tabla 5.4 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------|-----------------|--|---------------|
| 2 | 513,644 | 45,484 | 21,407 | 21,403 | 0,201 | 0,885 | 100,527 | 4,62 |
| 9 | 510,118 | 62,728 | 33,178 | 33,175 | 0,252 | 0,609 | 126,066 | 26,91 |
| 24 | 512,238 | 83,892 | 44,675 | 44,655 | 0,328 | 0,431 | 164,042 | 84,69 |
| 136 | 575,845 | 168,357 | 95,110 | 94,904 | 0,705 | 0,189 | 352,579 | 542,05 |

En la Fig. 5.11a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 2) se reduce apreciablemente al final (iteración 136) de la optimización (23,99 y 6,05 veces respectivamente), aumentado un 270,15% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

En la Fig. 5.11b se observa que la fracción de volumen decrece rápidamente hasta la iteración 20 ($V/V_0 = 46,96\%$), disminuyendo de forma más gradual hasta la iteración 136 ($V/V_0 = 18,89\%$). Si se comparan los diseños inicial (iteración 2) y final (iteración 136) se aprecia que el valor de la compliance aumenta desde 100,527 Nmm hasta 352,579 Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 3,51 veces.

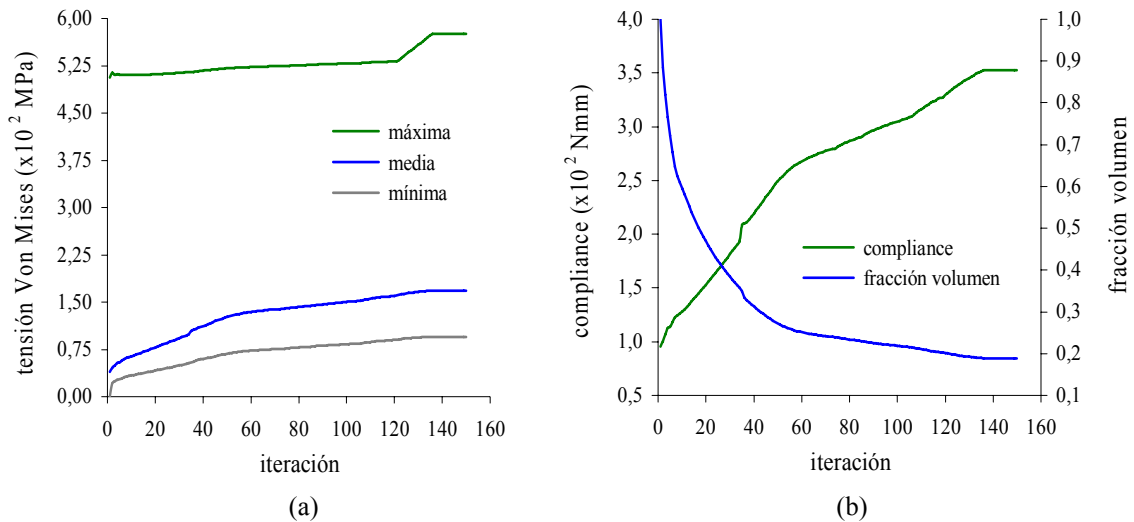


Figura 5.11 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

5.8.1.2 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$)

El voladizo está sometido a una fuerza vertical de 10 N en el centro del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 200 mm, la altura 50 mm, y el espesor 10 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 6400 elementos, 160 en dirección longitudinal y 40 en dirección transversal (Fig. 5.12).

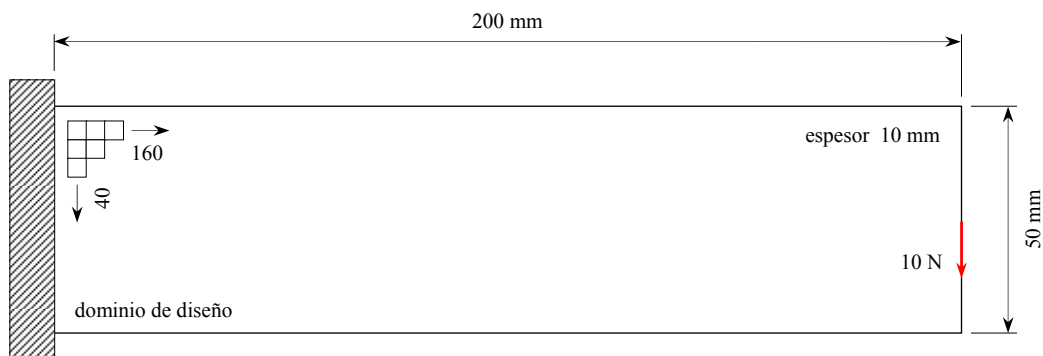


Figura 5.12 Voladizo con fuerza vertical de 10 N centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Dominio de diseño

En las Figs. 5.13 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de iteraciones es 125, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 89.

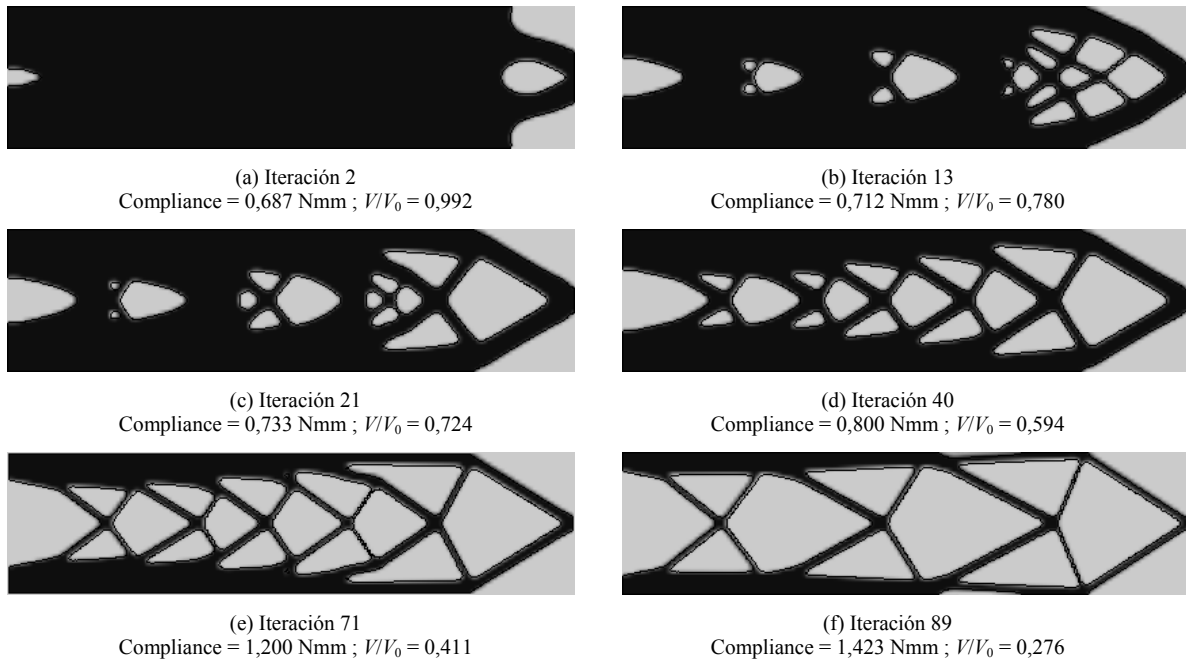


Figura 5.13 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones

En la tabla 5.5 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

En las Figs. 5.14 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

Tabla 5.5 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------|-----------------|--|---------------|
| 2 | 0,603 | 0,151 | 0,048 | $4,784 \cdot 10^{-2}$ | 0,139 | 0,922 | 0,687 | 1,99 |
| 13 | 0,621 | 0,171 | 0,061 | $6,101 \cdot 10^{-2}$ | 0,143 | 0,780 | 0,712 | 16,59 |
| 21 | 0,634 | 0,183 | 0,067 | $6,721 \cdot 10^{-2}$ | 0,148 | 0,724 | 0,733 | 28,38 |
| 40 | 0,680 | 0,215 | 0,089 | $8,907 \cdot 10^{-2}$ | 0,161 | 0,594 | 0,800 | 59,95 |
| 71 | 0,843 | 0,308 | 0,140 | $1,460 \cdot 10^{-1}$ | 0,241 | 0,411 | 1,200 | 121,08 |
| 89 | 1,002 | 0,394 | 0,213 | $2,128 \cdot 10^{-1}$ | 0,286 | 0,276 | 1,423 | 155,19 |

En la Fig. 5.14a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 2) se reduce apreciablemente al final (iteración 89) de la optimización (12,56 y 4,70 veces respectivamente), aumentado un 160,93% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

En la Fig. 5.14b se observa que la fracción de volumen decrece rápidamente con el número de iteraciones. Si se comparan los diseños inicial (iteración 2) y final (iteración 89) se

aprecia que el valor de la compliance aumenta desde 0,687 Nmm hasta 1,423 Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 2,07 veces.

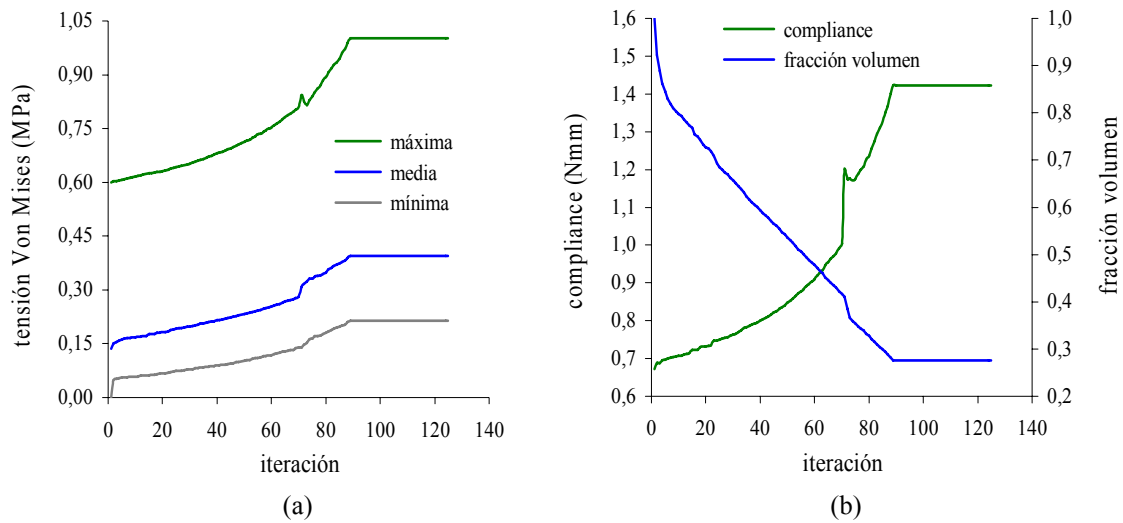


Figura 5.14 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

5.8.2 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$)

El cuarto ejemplo es una viga en voladizo sometida a una fuerza vertical de 100 N en la fibra inferior del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 16 mm, la altura 10 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 5760 elementos, 96 en dirección longitudinal y 60 en dirección transversal (Fig. 5.15).

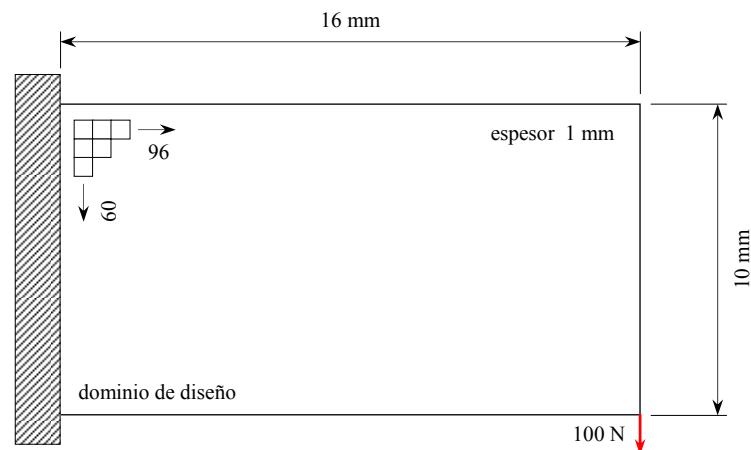


Figura 5.15 Voladizo con fuerza vertical de 100 N en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Dominio de diseño

En las Figs. 5.16 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de iteraciones es 300, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 247.

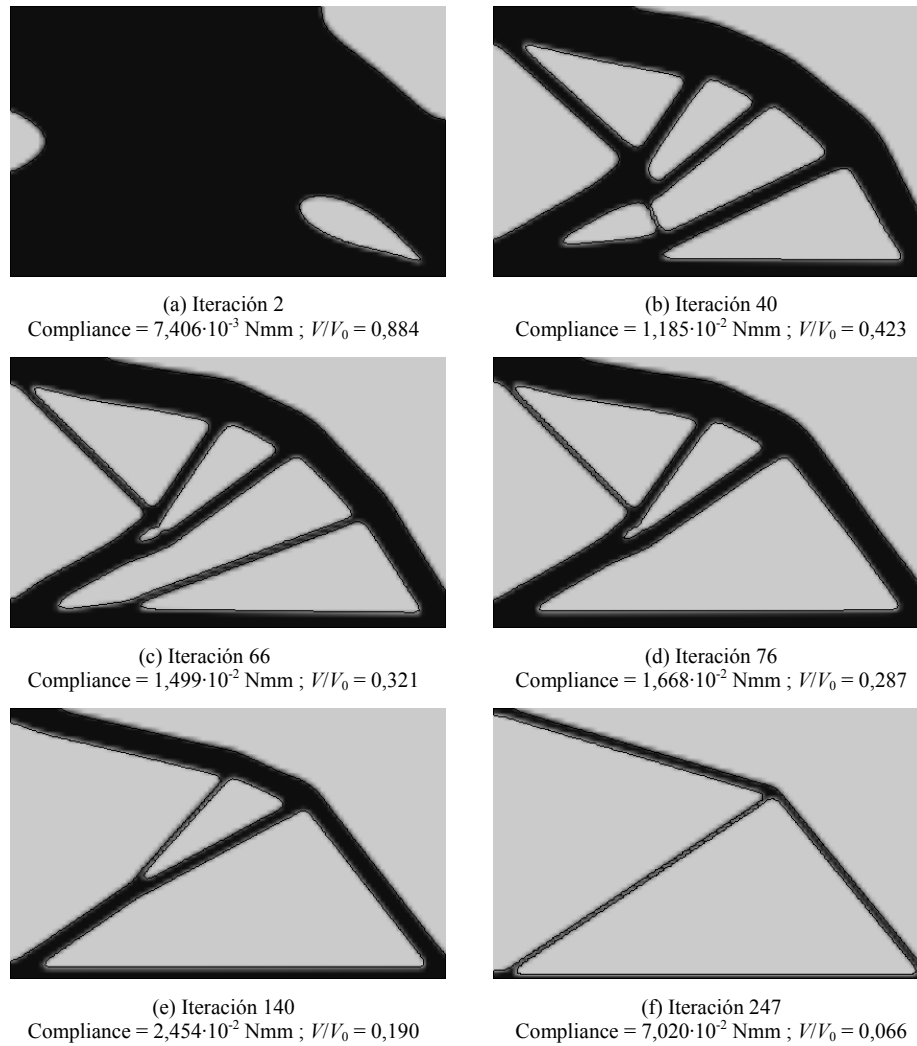


Figura 5.16 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Topologías óptimas para diferentes iteraciones

En la tabla 5.6 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

En las Figs. 5.17 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

Tabla 5.6 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------|--|---------------|
| 2 | 869,521 | 41,949 | 19,262 | 19,214 | $1,607 \cdot 10^{-4}$ | 0,884 | $7,406 \cdot 10^{-3}$ | 1,99 |
| 40 | 869,452 | 78,682 | 40,588 | 40,549 | $2,517 \cdot 10^{-4}$ | 0,423 | $1,185 \cdot 10^{-2}$ | 52,36 |
| 66 | 869,659 | 99,681 | 52,123 | 51,898 | $3,157 \cdot 10^{-4}$ | 0,321 | $1,499 \cdot 10^{-2}$ | 92,73 |
| 76 | 869,627 | 112,766 | 59,114 | 58,815 | $3,509 \cdot 10^{-4}$ | 0,287 | $1,668 \cdot 10^{-2}$ | 107,78 |
| 140 | 870,351 | 164,768 | 88,294 | 88,013 | $5,137 \cdot 10^{-4}$ | 0,190 | $2,454 \cdot 10^{-2}$ | 191,78 |
| 247 | 989,861 | 388,712 | 246,565 | 246,561 | $1,456 \cdot 10^{-3}$ | 0,066 | $7,020 \cdot 10^{-2}$ | 324,21 |

En la Fig. 5.17a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 2) se reduce significativamente al final (iteración 247) de la optimización (45,14 y 4,01 veces respectivamente), aumentado un 826,63% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

En la Fig. 5.17b se observa que la fracción de volumen decrece rápidamente hasta la iteración 50 ($V/V_0 = 36,63\%$), disminuyendo de forma más gradual hasta la iteración 200 ($V/V_0 = 10,80\%$), y estabilizándose en la iteración 247 (6,56%). Si se comparan los diseños inicial (iteración 2) y final (iteración 247) se aprecia que el valor de la compliance aumenta desde $7,406 \cdot 10^{-3}$ Nmm hasta $7,020 \cdot 10^{-2}$ Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 9,48 veces.

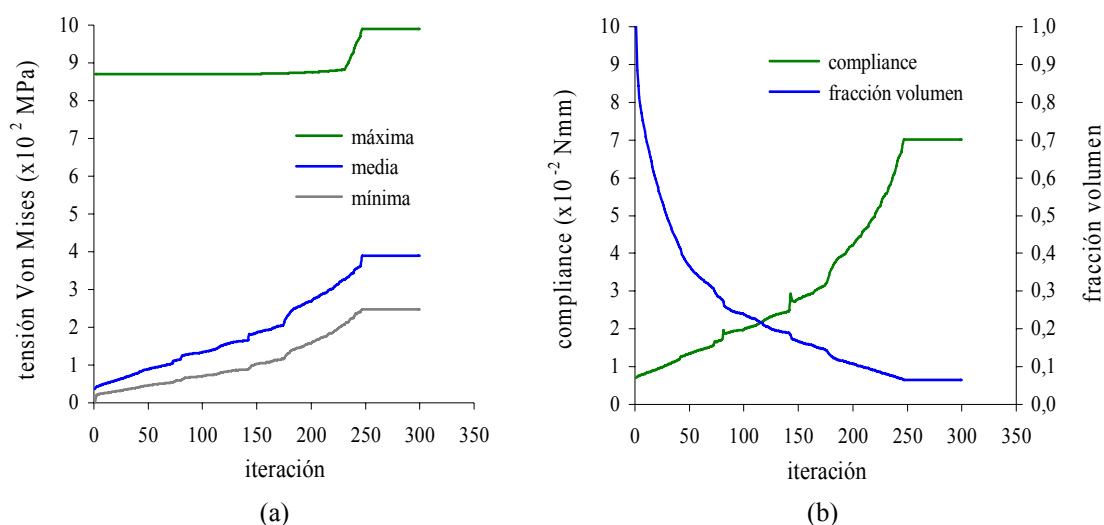


Figura 5.17 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$).
(a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

5.8.3 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior

El quinto ejemplo es una viga con apoyos fijos y una fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. La longitud del dominio de diseño es 200 mm, la altura 80 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 4840 elementos, 110 elementos en dirección longitudinal y 44 elementos en dirección transversal (Fig. 5.18).

En las Figs. 5.19 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de iteraciones es 225, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 183.

En la tabla 5.7 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

En las Figs. 5.20 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

En la Fig. 5.20a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 2) se reduce significativamente al final (iteración 183)

de la optimización (44,42 y 9,49 veces respectivamente), aumentado un 264,83% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

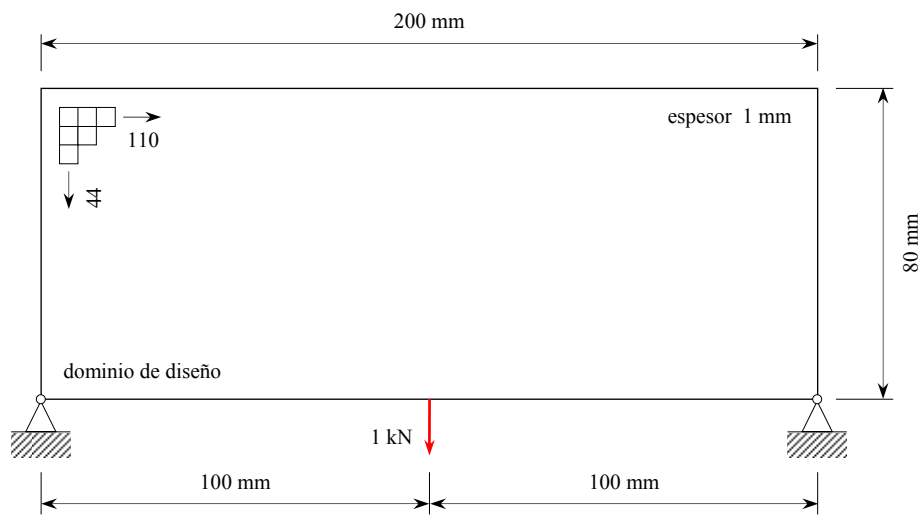


Figura 5.18 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño

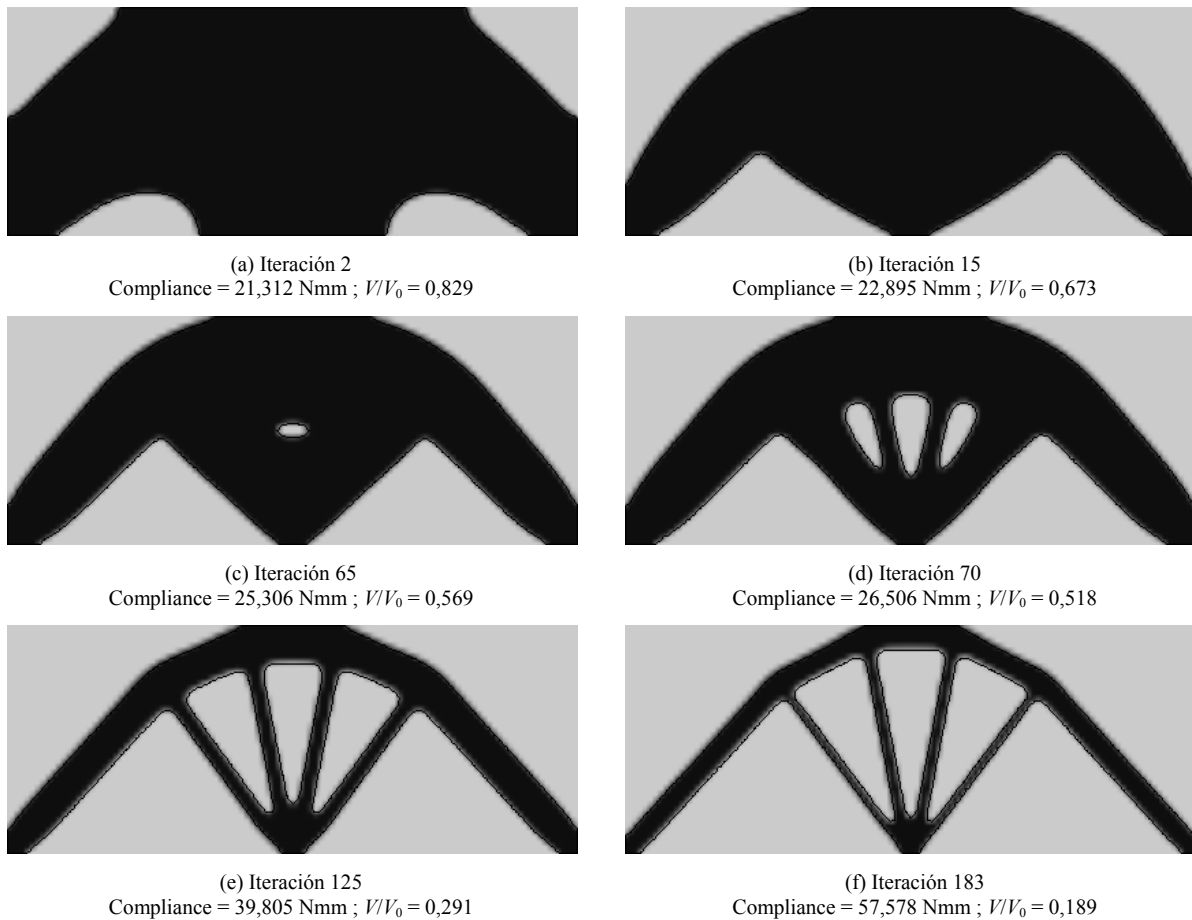


Figura 5.19 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes iteraciones

Tabla 5.7 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | V/V_0 | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-----------------------|---------|--|---------------|
| 2 | 384,133 | 20,761 | 8,647 | 8,583 | $4,262 \cdot 10^{-2}$ | 0,829 | 21,312 | 1,62 |
| 15 | 391,803 | 24,288 | 12,337 | 12,008 | $4,579 \cdot 10^{-2}$ | 0,673 | 22,895 | 12,40 |
| 65 | 405,833 | 28,307 | 14,496 | 14,489 | $5,061 \cdot 10^{-2}$ | 0,569 | 25,306 | 55,56 |
| 70 | 403,936 | 30,851 | 15,748 | 15,702 | $5,301 \cdot 10^{-2}$ | 0,518 | 26,506 | 60,39 |
| 125 | 404,396 | 52,484 | 27,199 | 27,079 | $7,961 \cdot 10^{-2}$ | 0,291 | 39,805 | 124,23 |
| 183 | 406,768 | 75,743 | 42,870 | 42,830 | $1,152 \cdot 10^{-1}$ | 0,189 | 57,578 | 195,73 |

En la Fig. 5.20b se observa que la fracción de volumen decrece rápidamente hasta la iteración 10 ($V/V_0 = 70,55\%$), disminuyendo de forma más gradual hasta la iteración 183 ($V/V_0 = 18,86\%$). Si se comparan los diseños inicial (iteración 2) y final (iteración 183) se observa que el valor de la compliance aumenta desde 21,312 Nmm hasta 57,578 Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 2,70 veces.

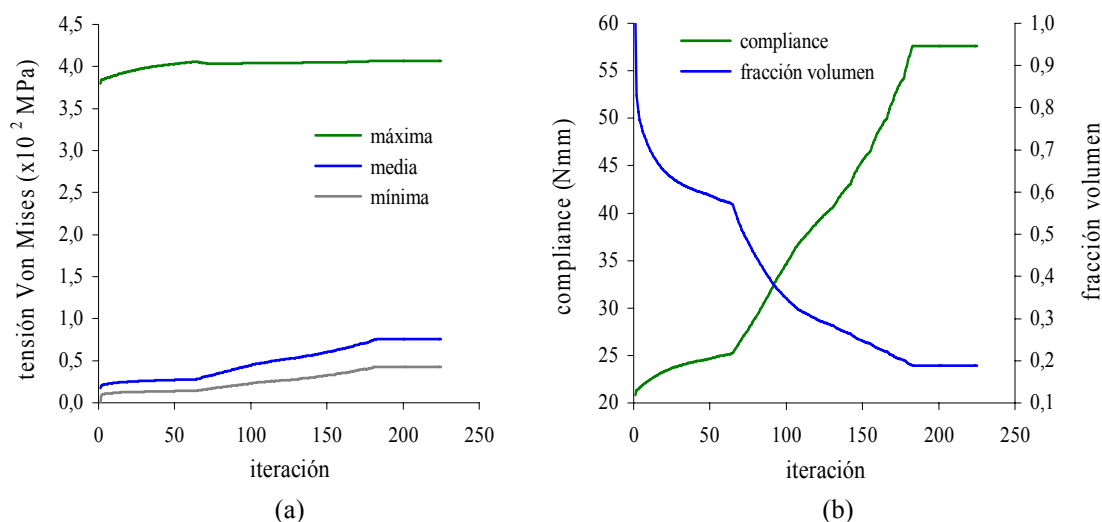


Figura 5.20 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

5.8.4 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior

El séptimo ejemplo es una viga con una carga vertical de 100 kN en el centro de la fibra inferior, y está soportada por dos apoyos situados en sus bordes inferiores, uno de los cuales es de tipo deslizante. La longitud del dominio de diseño es 4000 mm, la altura 2000 mm, y el espesor 10 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 2450 elementos, 70 en dirección longitudinal y 35 en dirección transversal (Fig. 5.21).

En las Figs. 5.22 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización, para cada una de las mallas estudiadas. El número máximo de iteraciones es 350, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 311.

En la tabla 5.8 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

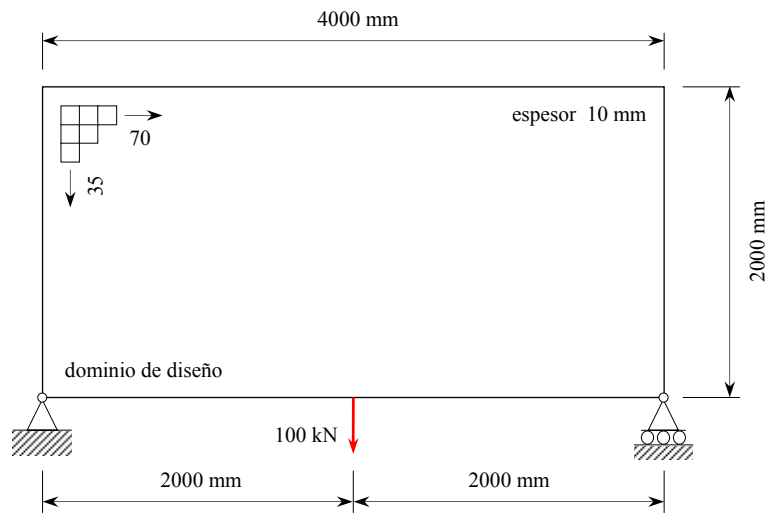


Figura 5.21 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical de 100 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño

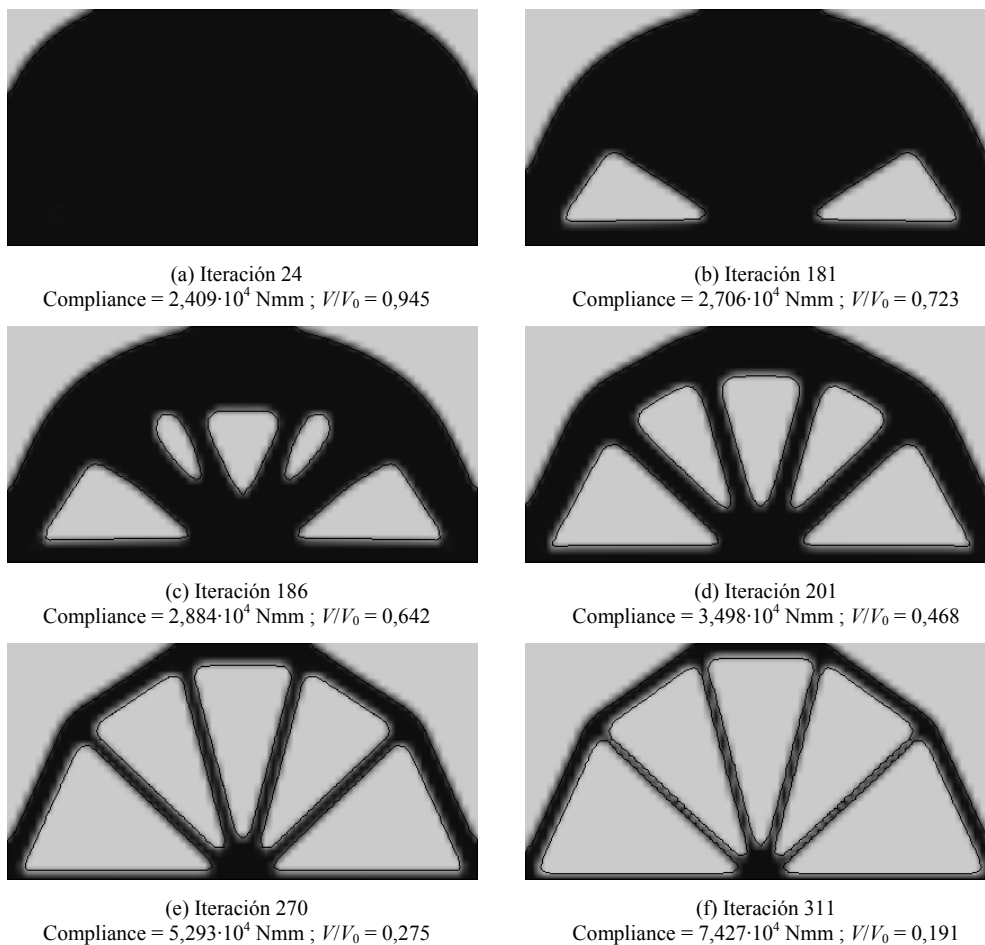


Figura 5.22 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes iteraciones

Tabla 5.8 Viga con apoyo deslizando y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | V/V_0 | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------|---------|--|---------------|
| 24 | 126,815 | 8,821 | 2,046 | 2,025 | 0,482 | 0,945 | $2,409 \cdot 10^4$ | 7,61 |
| 181 | 126,805 | 11,286 | 5,845 | 5,843 | 0,541 | 0,723 | $2,706 \cdot 10^4$ | 69,35 |
| 186 | 126,799 | 12,607 | 6,466 | 6,386 | 0,577 | 0,642 | $2,884 \cdot 10^4$ | 71,95 |
| 201 | 126,765 | 16,706 | 8,612 | 8,491 | 0,700 | 0,468 | $3,498 \cdot 10^4$ | 81,19 |
| 270 | 126,614 | 25,668 | 14,600 | 14,579 | 1,059 | 0,275 | $5,293 \cdot 10^4$ | 130,65 |
| 311 | 126,816 | 33,645 | 20,690 | 20,684 | 1,485 | 0,191 | $7,427 \cdot 10^4$ | 161,21 |

En las Figs. 5.23 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

En la Fig. 5.23a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 24) se reduce apreciablemente al final (iteración 311) de la optimización (61,98 y 6,13 veces respectivamente), aumentado un 281,42% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

En la Fig. 5.23b se observa que la fracción de volumen disminuye de forma gradual hasta la iteración 184 ($V/V_0 = 67,52\%$), decreciendo rápidamente hasta la iteración 311 ($V/V_0 = 19,09\%$). Si se comparan los diseños inicial (iteración 24) y final (iteración 311) se observa que el valor de la compliance aumenta desde $2,409 \cdot 10^4$ Nmm hasta $7,427 \cdot 10^4$ Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 3,08 veces.

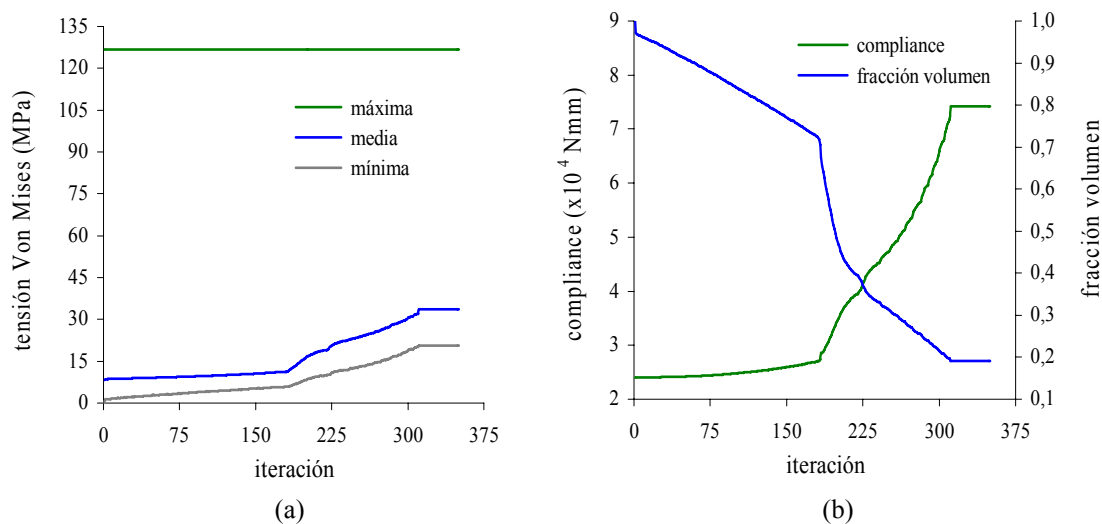


Figura 5.23 Viga con apoyo deslizando y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

5.8.5 Viga MBB

La viga de MBB (*Messerschmidt-Bölkow-Blohm*) es atribuida a la empresa aeronáutica Messerschmidt-Bölkow-Blohm, entonces DaimlerChrysler Aerospace AG, en la actualidad

EADS (*European Aeronautic Defence and Space Company*) y fue diseñada como parte del fuselaje encargado de soportar el suelo del avión de pasajeros Airbus. La viga está sometida a una fuerza vertical de 1 kN en el centro de la fibra superior, y está soportada por dos apoyos situados en sus bordes inferiores, uno de los cuales es de tipo deslizante.

La longitud del dominio de diseño es 900 mm, la altura 150 mm, y el espesor 1 mm. El dominio se ha dividido en 5400 elementos, 180 en dirección longitudinal y 30 en dirección transversal (Fig. 5.24).

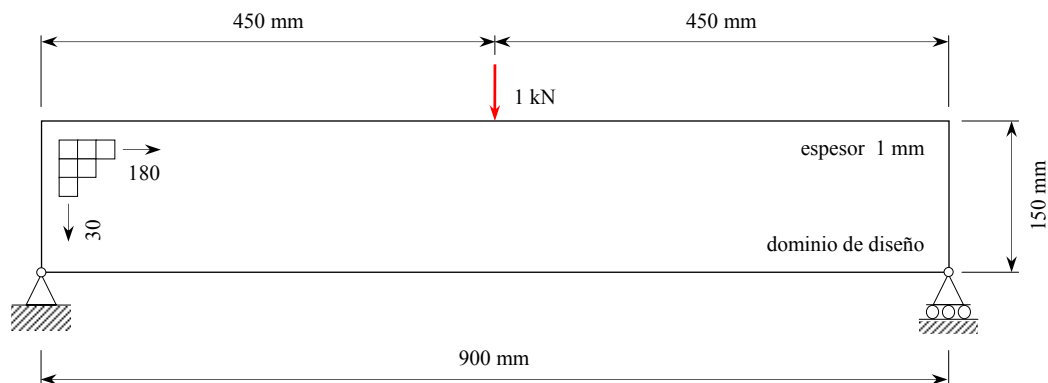


Figura 5.24 Viga MBB. Dominio de diseño

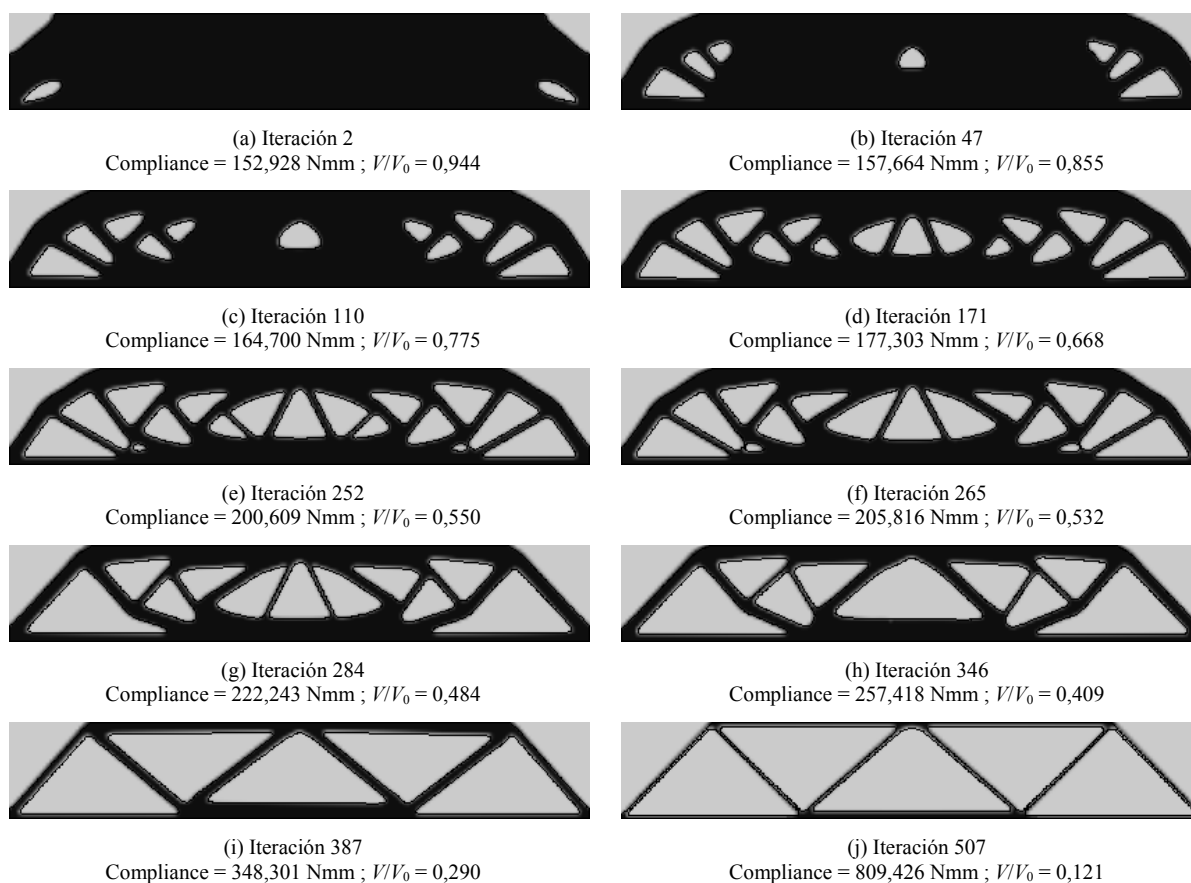


Figura 5.25 Viga MBB. Topologías óptimas para diferentes iteraciones

En las Figs. 5.25 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización, para cada una de las mallas estudiadas. El número máximo de iteraciones es 550, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 507.

En la tabla 5.9 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

En las Figs. 5.26 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

Tabla 5.9 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------|-----------------|--|---------------|
| 2 | 144,912 | 19,697 | 6,543 | 6,510 | 0,306 | 0,944 | 152,928 | 1,76 |
| 47 | 144,924 | 21,364 | 7,911 | 7,887 | 0,315 | 0,855 | 157,664 | 38,19 |
| 110 | 146,006 | 23,310 | 9,098 | 9,083 | 0,329 | 0,775 | 164,700 | 103,44 |
| 171 | 148,554 | 26,296 | 11,025 | 11,025 | 0,355 | 0,668 | 177,303 | 187,34 |
| 252 | 153,460 | 30,875 | 14,173 | 14,155 | 0,401 | 0,550 | 200,609 | 313,88 |
| 265 | 156,979 | 31,719 | 14,807 | 14,806 | 0,412 | 0,532 | 205,816 | 335,37 |
| 284 | 161,372 | 34,778 | 16,654 | 16,646 | 0,444 | 0,484 | 222,243 | 365,21 |
| 346 | 181,401 | 40,090 | 20,075 | 20,068 | 0,515 | 0,409 | 257,418 | 459,45 |
| 387 | 191,128 | 55,425 | 29,205 | 29,178 | 0,697 | 0,290 | 348,301 | 516,56 |
| 507 | 293,438 | 104,185 | 63,631 | 63,519 | 1,619 | 0,121 | 809,426 | 671,01 |

En la Fig. 5.26a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 2) se reduce apreciablemente al final (iteración 507) de la optimización (22,15 y 4,61 veces respectivamente), aumentado un 428,94% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

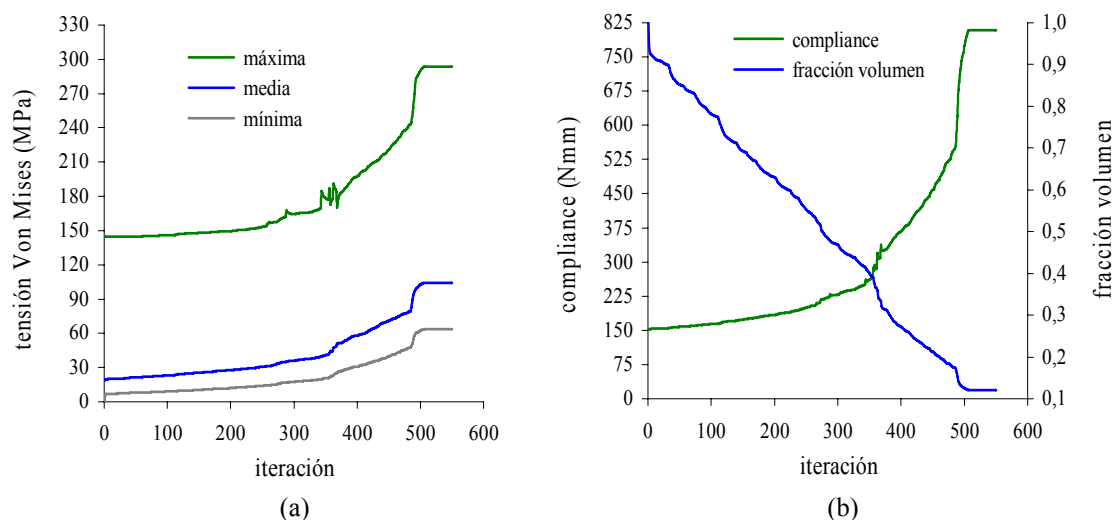


Figura 5.26 Viga MBB. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

En la Fig. 5.26b se observa que la fracción de volumen disminuye rápidamente hasta la iteración 507. Si se comparan los diseños inicial (iteración 2) y final (iteración 507) se observa que el valor de la compliance aumenta desde 152,928 Nmm hasta 809,426 Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 5,29 veces.

5.8.6 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida

El último de los ejemplos corresponde a un problema de características similares al planteado por Hassani y Hinton (1999) en el cual se resuelve el diseño óptimo de un puente con soportes múltiples y una fuerza vertical uniformemente repartida (Fig. 5.27).

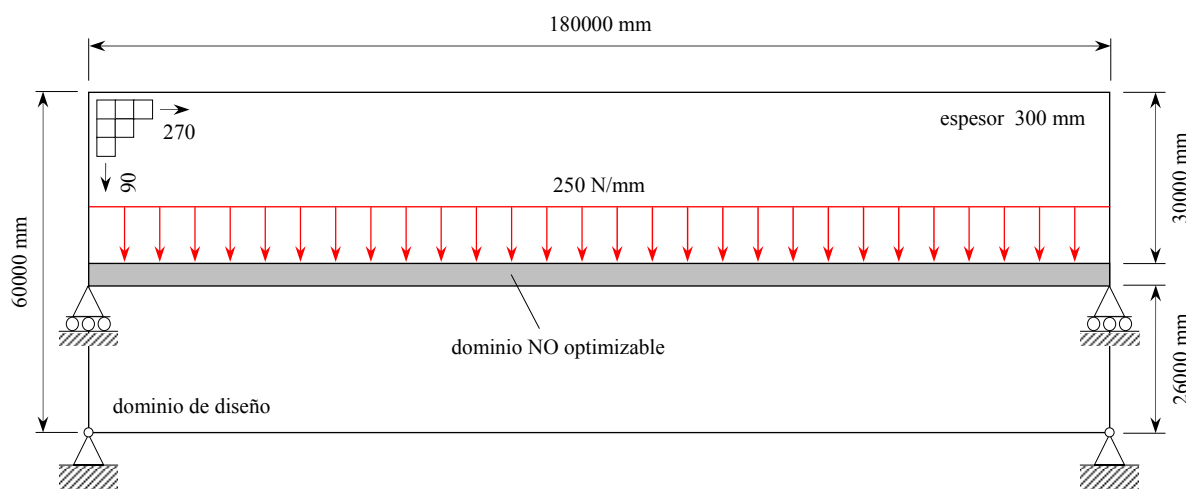


Figura 5.27 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida de 250 N/mm.
Dominio de diseño

La longitud del dominio de diseño es 180000 mm, la altura 60000 mm, y el espesor 300 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 24300 elementos, 270 en dirección longitudinal y 90 en dirección transversal. Las 6 seis filas de elementos (4000 mm) por debajo de la línea de carga son tratadas como elementos fijos (reales indefinidamente), y representan el tablero del puente (no sujeto al proceso de optimización).

En las Figs. 5.28 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de iteraciones es 650, obteniendo el diseño óptimo en la iteración 596.

En la tabla 5.10 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, y el tiempo acumulado de optimización para diferentes iteraciones.

En las Figs. 5.29 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media, y mínima, la compliance, y la fracción de volumen con las iteraciones.

En la Fig. 5.29a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en el diseño inicial (iteración 35) se reduce significativamente al final (iteración

596) de la optimización (53,06 y 7,53 veces respectivamente), aumentado un 449,92% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

En la Fig. 5.29b se observa que la fracción de volumen disminuye rápidamente hasta la iteración 596. Si se comparan los diseños inicial (iteración 35) y final (iteración 596) se observa que el valor de la compliance aumenta desde $3,740 \cdot 10^7$ hasta $1,571 \cdot 10^8$ Nmm, lo que supone que la rigidez disminuye 4,2 veces.

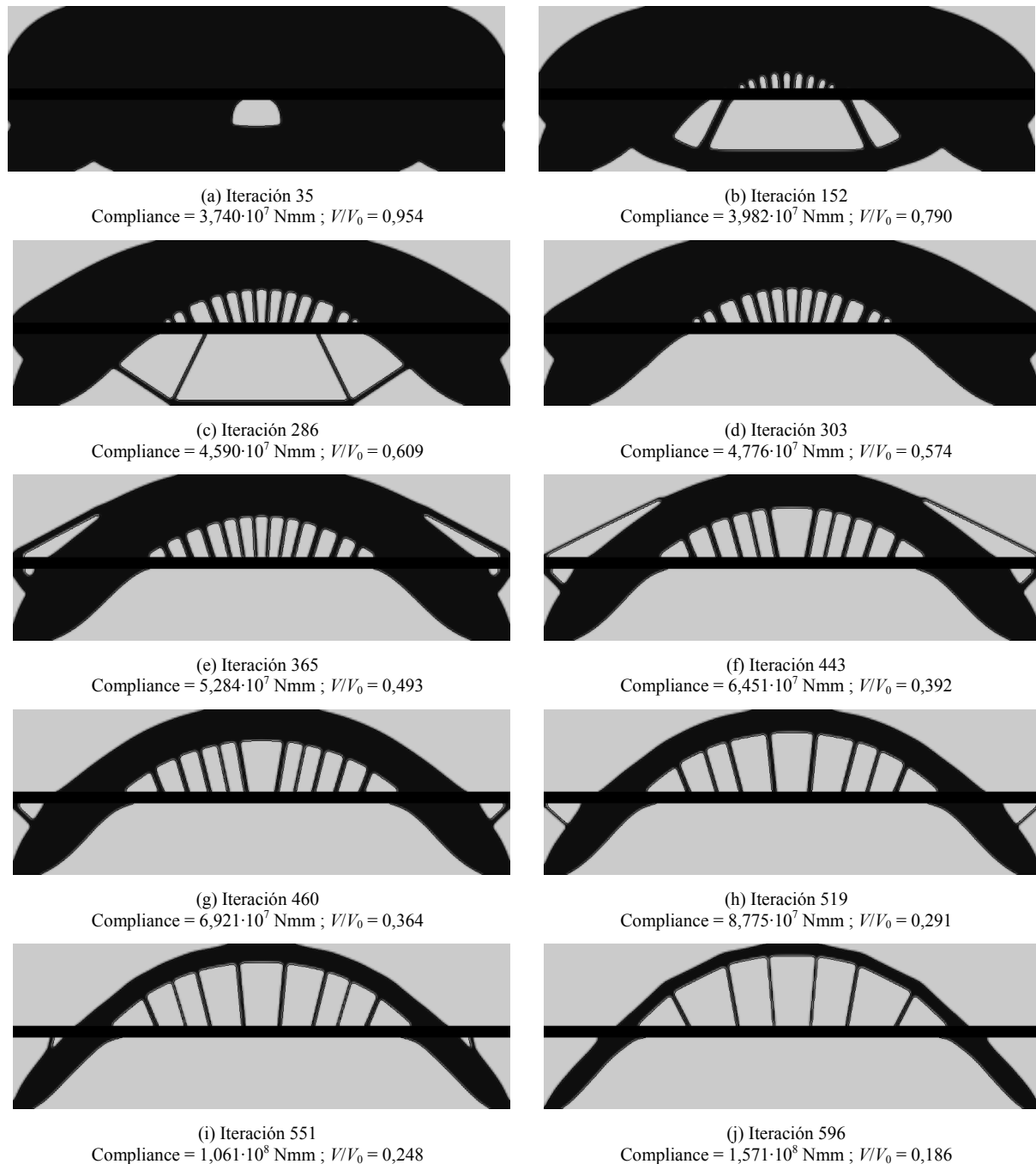
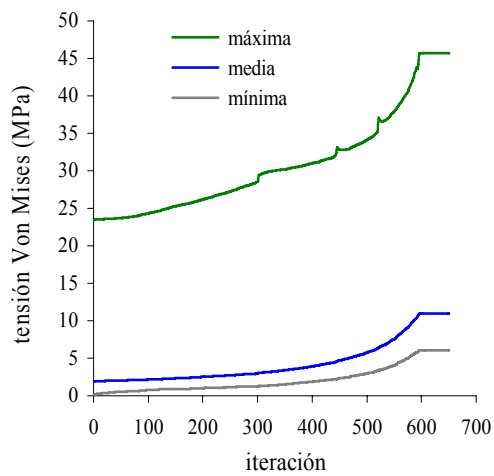


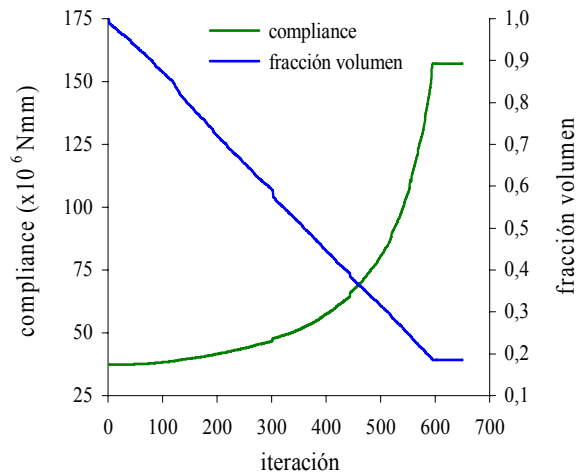
Figura 5.28 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Topologías óptimas para diferentes iteraciones

Tabla 5.10 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Resultados para diferentes iteraciones

| It | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | σ_{ref} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | Tiempo (s) |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------|-----------------|--|---------------|
| 35 | 23,612 | 1,999 | 0,445 | 0,439 | 2,575 | 0,954 | $3,740 \cdot 10^7$ | 115,53 |
| 152 | 25,315 | 2,331 | 0,884 | 0,884 | 2,861 | 0,790 | $3,982 \cdot 10^7$ | 495,02 |
| 286 | 28,152 | 2,900 | 1,248 | 1,245 | 3,402 | 0,609 | $4,590 \cdot 10^7$ | 974,64 |
| 303 | 29,442 | 3,043 | 1,265 | 1,265 | 3,591 | 0,574 | $4,776 \cdot 10^7$ | 1034,71 |
| 365 | 30,423 | 3,535 | 1,620 | 1,620 | 3,916 | 0,493 | $5,284 \cdot 10^7$ | 1252,34 |
| 443 | 32,114 | 4,467 | 2,181 | 2,178 | 4,739 | 0,392 | $6,451 \cdot 10^7$ | 1540,22 |
| 460 | 32,820 | 4,873 | 2,426 | 2,421 | 5,038 | 0,364 | $6,921 \cdot 10^7$ | 1600,04 |
| 519 | 35,212 | 6,273 | 3,307 | 3,304 | 6,366 | 0,291 | $8,775 \cdot 10^7$ | 1809,70 |
| 551 | 37,996 | 7,580 | 4,065 | 4,061 | 7,652 | 0,248 | $1,061 \cdot 10^8$ | 1923,26 |
| 596 | 45,692 | 10,993 | 6,073 | 6,072 | 11,425 | 0,186 | $1,571 \cdot 10^8$ | 2077,43 |



(a)



(b)

Figura 5.29 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/iteración. (b) Evolución compliance/fracción de volumen/iteración

Capítulo 6

Optimización de topología con isolíneas y algoritmos genéticos

6.1 INTRODUCCIÓN

En el campo de la optimización de topología, las aplicaciones desarrolladas para el diseño óptimo de estructuras continuas mediante algoritmos genéticos han sido hasta el momento limitadas. Esto se debe en parte a la ausencia de una asociación intuitiva que relacione el comportamiento estructural con una cadena de codificación. A continuación, se destacan cuatro de las metodologías más representativas.

Los primeros trabajos, y quizás el conjunto de métodos más intuitivos capaces de dirigir la optimización de topología, consideran la discretización del dominio de diseño como un conjunto de etiquetas, en donde el valor “1” indica que el elemento es real, y el valor “0” se interpreta como un agujero. Muchos investigadores (Sandgren, Jensen, y Welton, 1990; Chapman, Saitou, y Jakiela, 1994) han empleado en sus algoritmos genéticos este tipo de representación. Sin embargo, la eficiencia del procedimiento disminuye considerablemente cuando el número necesario de elementos es elevado.

Con el propósito de introducir una codificación con un nivel superior de eficiencia se realizaron nuevas investigaciones (Lin y Chao, 2000; Missoum, Gurdal, Hernández, y Guillot, 2000) dando como resultado un segundo conjunto de métodos. Este nuevo conjunto se caracteriza por reducir el espacio de búsqueda. Para ello, el tamaño, la forma, y la localización de las cavidades inicialmente definidas, se convierten en las nuevas variables del algoritmo genético. Estos métodos son notablemente más sofisticados que la simple representación material/agujero, lo que aporta las siguientes ventajas:

- La simplicidad de las formas seleccionadas para la representación de las cavidades facilita la producción de la solución final.

- La disociación parcial entre las cavidades y la discretización proporciona al diseñador una mayor libertad para definir la malla de elementos finitos.
- Por último, y quizás la más importante, el número de variables disminuye haciendo más tratable el proceso de optimización.

El tercer conjunto de métodos (Burczyński y Kokot, 1999; Cerrrolaza, Annicchiarico, y Martínez, 2000) se caracteriza por emplear el Método de los Elementos de Contorno (MEC) para el análisis de la estructura, así como utilizar curvas de tipo spline, b-spline, bezier, etc. para definir la forma exterior y las cavidades interiores. De este modo, la posición de los puntos de control que determinan la forma exterior, y el número de cavidades pasan a ser las variables de diseño del algoritmo (Watabe y Okino, 1993; Kita y Tanie, 1999).

Con el objetivo de mejorar la eficiencia de búsqueda, y aumentar la especialización del algoritmo de optimización, se desarrolla el cuarto, y más reciente conjunto de métodos (Woon, Tong, Querin, y Steven, 2003; Victoria y Martí, 2005). El proceso de optimización se diseña como un problema doble (forma y topología) de modo que, un conjunto de algoritmos organizados en cascada, o en multi-nivel, trabajan independientemente para cumplir unos objetivos parciales (forma, número, y distribución de cavidades, etc.), pero coordinados entre sí, para maximizar la función de aptitud.

En este capítulo se presenta un nuevo método MFAG-ig (Apéndices A y B) para la optimización de topología, utilizando para el análisis de la estructura una malla fija de elementos finitos, las isolíneas del problema para la representación de la topología, y un algoritmo genético para la extracción de los valores de referencia que definen la forma exterior y las cavidades interiores de la estructura (Victoria y Martí, 2006).

6.2 CODIFICACIÓN PARA LA OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA

La mayoría de los algoritmos evolucionarios utilizados para la optimización de topología, emplean una representación basada en cadenas de bits o vectores de valores reales. Las representaciones binarias son las representaciones estándar de los algoritmos genéticos canónicos. Por el contrario, la representación mediante valores reales ha sido tradicionalmente empleada por los investigadores de las estrategias evolutivas. Habitualmente, esta representación se utiliza para representar el fenotipo, sobre todo en problemas de optimización donde no resulta necesaria su relación explícita con el genotipo. De este modo, los problemas asociados a las representaciones con diferentes niveles (generalmente binarias) se eliminan directamente. Existen, sin embargo, dos inconvenientes relacionados con las representaciones mediante valores reales:

- La representación mediante valores reales permite la representación de problemas con dominios muy específicos, y que usualmente se corresponden con problemas de optimización previamente ajustados.
- No todos los problemas para el diseño óptimo de topología pueden ser descritos a través de un vector de valores reales.

Como se ha comprobado desde los primeros trabajos, la representación del algoritmo resulta uno de los elementos clave para que el procedimiento de optimización se desarrolle satisfactoriamente. Durante estos últimos años, una gran cantidad del trabajo experimental se ha dedicado al estudio de las diferentes representaciones. A pesar de ello, muy poco se conoce teóricamente sobre su influencia en el comportamiento del algoritmo. El marco inicial para la teoría de la representación evolutiva ha sido presentado por Rothlauf (2002), aunque éste constituye solamente el comienzo de las investigaciones sobre este elemento tan clave para el desarrollo de estos algoritmos.

La característica principal que identifica al método MFAG-ig, es la introducción de un algoritmo genético en el proceso de optimización. El objetivo fundamental del algoritmo genético es determinar el valor de referencia para las isolíneas del problema, a partir del cual se extrae el contorno que define la forma y la topología del diseño.

Para determinar el valor de las isolíneas de referencia se recurre a una representación basada en una cadena binaria. Cadena que, una vez descodificada, proporciona un valor real, a través del cual podremos determinar qué isolíneas son las que debemos de representar para la definición de la topología. Por tanto, la longitud de la cadena depende de dos factores:

1. Valores máximo V_r^{max} y mínimo V_r^{min} a partir de los cuales se acotan superior e inferiormente los valores de referencia.
2. La precisión con la que se representa numéricamente el valor de referencia. Es decir, el número de bits que disponemos para que el valor de referencia expresado de forma binaria se convierta en un número real.

6.3 CRITERIOS PARA LA OBTENCIÓN DEL VALOR DE REFERENCIA

Una vez se ha determinado que la codificación que se va utilizar es de tipo binario, y que la descodificación de los cromosomas proporciona como resultado una población de números reales, se describen las distintas alternativas que se han probado para interpretar los valores reales, enumerando en cada caso las principales ventajas e inconvenientes que se han presentado al introducirse en el algoritmo de optimización.

La primera opción es la más sencilla, ya que el valor real obtenido de la descodificación del cromosoma V_r , se considera el valor de referencia σ_{ref} con el cual se representan las isolíneas del problema

$$\sigma_{ref} = V_r \quad (6.1)$$

Su principal ventaja es la simplicidad con la que se plantea obtener el valor de referencia utilizado para la extracción de las isolíneas. Por el contrario, surgen los siguientes inconvenientes:

1. Los valores máximo V_r^{max} y mínimo V_r^{min} que acotan el valor de las isolíneas de referencia resultan inicialmente desconocidos,
2. cuando se comienza el estudio de un problema particular, la inexperiencia nos impide asignar un rango adecuado para estos valores, lo que implica un proceso de

optimización con una evolución inestable, que en la mayoría de los casos da como resultado óptimos locales.

3. Para estabilizar el progreso de la optimización, cabe la opción de introducir el valor real V_r de forma secuencial (o en subpasos), lo que proporciona una transición más suave, pero con el inconveniente de aumentar el tiempo de análisis.

Con el propósito de superar los problemas planteados por la primera opción, se plantea que el valor de referencia sea el resultado del producto del valor real V_r por el valor máximo del estimador de referencia σ_{ref}^{max}

$$\sigma_{ref} = V_r \sigma_{ref}^{max} \quad (6.2)$$

Este criterio presenta las siguientes ventajas:

1. Los valores correspondientes para V_r^{min} y V_r^{max} se pueden establecer como cero y uno, respectivamente.
2. Al incorporar al criterio de extracción el valor máximo del estimador de referencia, se introduce una realimentación entre el criterio y la respuesta estructural. De esta forma se consigue reducir la dispersión de los valores de σ_{ref} .
3. Por el contrario, y a pesar de contar con los valores para V_r^{min} y V_r^{max} , los valores de referencia obtenidos, sobre todo en las primeras generaciones, presentan valores muy variables, provocando pequeñas inestabilidades que sugieren de nuevo la división del valor de referencia en pequeños pasos, aumentando con ello el tiempo de cálculo total.

Tras analizar las ventajas e inconvenientes presentados por los dos casos anteriores, se propone un último criterio. Este criterio es el utilizado para la realización de los ejemplos numéricos resueltos en este capítulo

$$\sigma_{ref} = \sigma_{ref}^{min} + RR \sigma_{ref}^{med} \quad (6.3)$$

donde

$$RR = \begin{cases} 0 & \text{si } g = 1 \\ RR + V_r & \text{si } g > 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

$$-\Delta_r = V_r^{min} \leq V_r \leq V_r^{max} = +\Delta_r$$

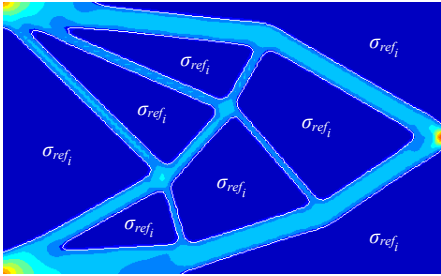
siendo σ_{ref}^{min} el valor de referencia mínimo en los nodos, σ_{ref}^{med} el valor de referencia medio en los nodos, y RR un ratio para modular el valor σ_{ref} .

Este criterio tiene las siguientes ventajas:

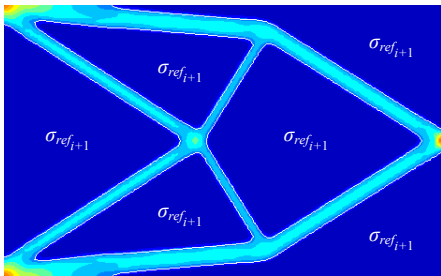
1. El valor de referencia medio σ_{ref}^{med} reproduce la evolución de la estructura mejor, que el valor máximo σ_{ref}^{max} , evitando valores de referencia no representativos.
2. Los valores para V_r^{min} y V_r^{max} se obtienen a partir del valor Δ_r (se recomiendan valores para $\Delta_r = 0,005 \div 0,025$).

3. El objetivo del algoritmo genético es determinar cual es el mejor valor para V_r , dentro del intervalo $\pm \Delta_r$ (ver tabla 6.1).
4. El valor de referencia mantiene un carácter reversible, a la vez que se elimina la necesidad de fraccionar su valor, ya que su variación se produce de una forma más suave, aportando directamente una mayor estabilidad al proceso de optimización. Aunque, por el contrario, la convergencia resulte un poco más lenta.

Tabla 6.1 Codificación binaria para la extracción del valor de referencia



Mejor diseño, generación (i)
Tensiones de Von Mises



Mejor diseño, generación ($i+1$)
Tensiones de Von Mises

| Generación ($i+1$) | Número bits (N_{bit}) | Valor real (V_r) | Valor real ($V_r [\pm \Delta_r]$) | Valor referencia ($\sigma_{ref_{i+1}}$) |
|-------------------------|------------------------------|-------------------------|---|--|
| 1 | 000000000 | 0 | V_r^{min} | $\sigma_{ref_i}^{min} + (RR_i + V_r^{min}) \sigma_{ref_i}^{med}$ |
| 2 | 0001000100 | 68 | $V_r^{min} \leq V_{r_2, \Delta r} \leq V_r^{max}$ | $\sigma_{ref_i}^{min} + (RR_i + V_{r_2, \Delta r}) \sigma_{ref_i}^{med}$ |
| 3 | 1001001000 | 584 | $V_r^{min} \leq V_{r_3, \Delta r} \leq V_r^{max}$ | $\sigma_{ref_i}^{min} + (RR_i + V_{r_3, \Delta r}) \sigma_{ref_i}^{med}$ |
| 4 | 0000100010 | 34 | $V_r^{min} \leq V_{r_4, \Delta r} \leq V_r^{max}$ | $\sigma_{ref_i}^{min} + (RR_i + V_{r_4, \Delta r}) \sigma_{ref_i}^{med}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| n | 1111111111 | 1023 | V_r^{max} | $\sigma_{ref_i}^{min} + (RR_i + V_r^{max}) \sigma_{ref_i}^{med}$ |

Una vez se ha obtenido el valor de referencia, el contorno de la estructura se genera inicialmente a partir de las isolíneas determinadas para dicho valor. Sin embargo, la distorsión que se produce en el campo de tensiones (o de energías de deformación) al introducir el contorno asociado a las isolíneas de referencia es elevada, impidiendo que las isolíneas del problema se ajusten de forma exacta al contorno de la estructura (Fig. 6.1).

Con el objeto de estabilizar las isolíneas del problema, y representar de forma más precisa el contorno de los sucesivos diseños, es recomendable reanalizar el dominio de la estructura, pero sin modificar el valor fijado para las isolíneas de referencia, refinando de este modo las isolíneas del problema.

El número de iteraciones o reanálisis dedicado al refinamiento local de las isolíneas debe de ser establecido al comienzo de la optimización. Es importante resaltar que no todas las iteraciones de refinamiento producen resultados satisfactorios, por lo que se recomienda no abusar de esta técnica. La experiencia conseguida mediante los ejemplos realizados en este

capítulo nos indica que un número entre una y tres iteraciones consigue una correcta estabilización de las isolíneas, sin aumentar excesivamente el coste de la optimización.

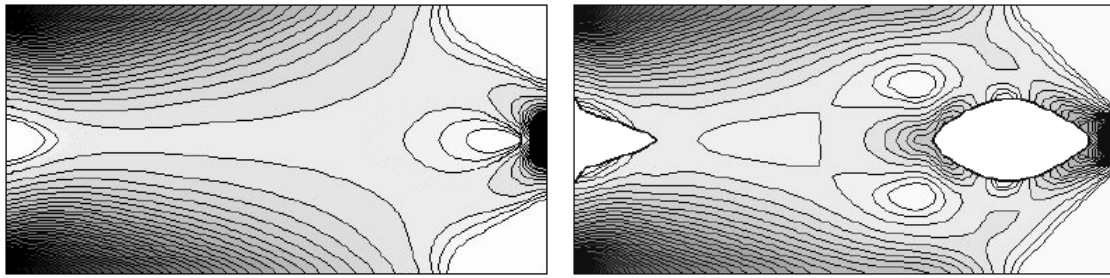


Figura 6.1 Alteración del campo de tensiones de Von Mises tras introducir en el diseño de la estructura dos nuevas cavidades (Woon, 2002)

6.4 FUNCIÓN DE APTITUD

La energía de deformación es un concepto fundamental en la mecánica aplicada, y sus principios se utilizan repetidamente en la optimización de estructuras (Hemp, 1973).

Sea una barra prismática (Fig. 6.2) de longitud L sometida a una fuerza de tracción P , que se mueve con lentitud a través de la distancia δ . Para obtener el trabajo realizado por la carga en estas condiciones, necesitamos conocer la forma en que la fuerza varía. Un diagrama fuerza-desplazamiento como el representado en la Fig. 6.3a proporciona esta información.

Si denominamos con P_1 a cualquier valor de la carga entre cero y el valor máximo de P , y con δ_1 a su correspondiente alargamiento; un incremento dP_1 en la carga producirá un incremento $d\delta_1$ en el alargamiento. El trabajo realizado por la carga durante este alargamiento es el producto de la carga por la distancia a través de la que se mueve; es decir, el trabajo es igual a $P_1 d\delta_1$.

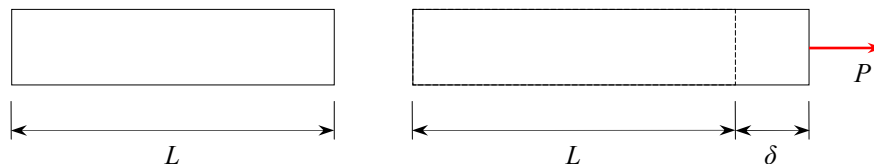


Figura 6.2 Pieza prismática sometida a una carga aplicada estáticamente

En la Fig. 6.3a, el área de la franja sombreada debajo de la curva fuerza-desplazamiento representa este trabajo. Por tanto, el trabajo total W realizado por la carga desde su valor cero hasta alcanzar el valor máximo P es la suma de todas estas franjas elementales

$$W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \quad (6.5)$$

En términos geométricos, el trabajo realizado por la carga es igual al área de debajo de la curva fuerza-desplazamiento.

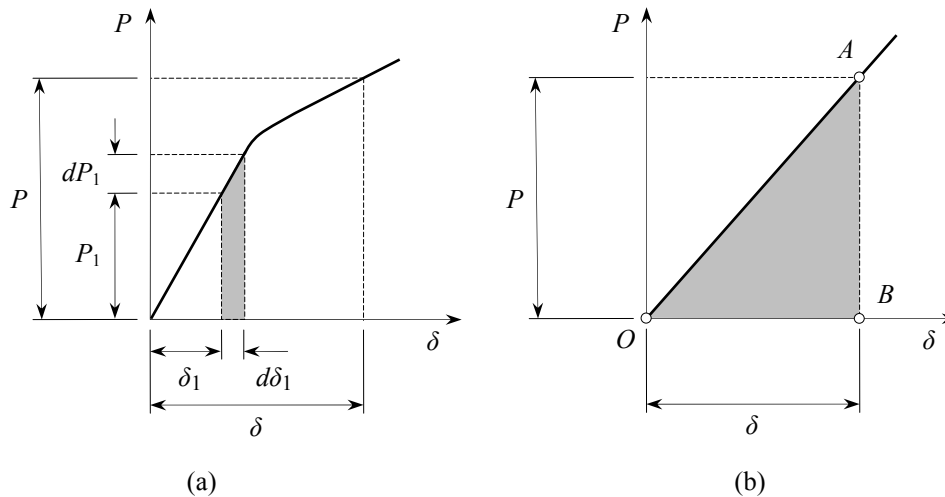


Figura 6.3 (a) Diagrama fuerza-desplazamiento. (b) Diagrama fuerza-desplazamiento para una pieza de material con comportamiento elástico lineal

Cuando la fuerza produce un alargamiento en la pieza, se producen deformaciones que incrementan el nivel de energía de la pieza. Por lo tanto, la energía de deformación, se define como la energía absorbida por la pieza durante el proceso de carga. Por el principio de conservación de la energía sabemos que esta energía de deformación es igual al trabajo realizado por la carga, siempre que no se agregue o libere energía en forma de calor

$$C = W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1 \quad (6.6)$$

donde C es la energía de deformación.

En el caso de que el material de la pieza obedezca la ley de Hooke, la energía de deformación almacenada en la pieza es

$$C = \frac{P\delta}{2} \quad (6.7)$$

siendo ésta, el área del triángulo OAB (Fig. 6.3b).

En un análisis por elementos finitos, el comportamiento estático de una estructura se representa mediante la ecuación de equilibrio

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (6.8)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura, \mathbf{u} el vector de desplazamientos nodales, y \mathbf{f} el vector de fuerzas en los nodos. De este modo, la energía de deformación (o compliance) de la estructura se obtiene como

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n_e} C_j^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_{int}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} v_i \quad (6.9)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de tensiones, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el vector de deformaciones, n_e el número de elementos finitos en la malla, n_{int} el número de puntos de integración en el elemento, y v_i el volumen del punto de integración i .

Una vez se ha obtenido el valor de la energía de deformación $C^{(e)}$ para cada uno de los elementos, su valor C_i en un nodo i puede ser aproximado a partir de las energías de los k elementos que comparten dicho nodo, y del ratio de área ξ

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^k \xi_j C_j^{(e)}}{\sum_{j=1}^k \xi_j} \quad (6.10)$$

La rigidez es uno de los factores clave a tener en cuenta en el diseño óptimo de estructuras. Si utilizamos en la optimización el valor obtenido de la compliance, la función objetivo es obtener una estructura que minimice su energía de deformación (o maximice su rigidez) para un volumen dado

$$f = C \approx \sum_{i=1}^{n_n} C_i \quad (6.11)$$

donde n_n es el número de nodos.

Para incluir el efecto del volumen, la expresión de la compliance se multiplica por el área y el espesor del diseño

$$f = \sum_{i=1}^{n_n} C_i A^{(e)} t \sum_{j=1}^{n_e} \xi_j \quad (6.12)$$

El problema de minimizar la compliance específica puede ser transformado en un problema de maximización utilizando simplemente su valor inverso. De este modo, el objetivo de la función de aptitud F es obtener un diseño que maximice la rigidez de la estructura a la vez que minimiza el volumen

$$F = \frac{1}{f} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_n} C_i A^{(e)} t \sum_{j=1}^{n_e} \xi_j} \quad (6.13)$$

6.5 OPERADORES GENÉTICOS

A continuación, se detallan los operadores que se han utilizado en el algoritmo genético para la optimización de topología de estructuras continuas mediante isolíneas.

Insistir que, aunque es el valor real proporcionado por el cromosoma decodificado el que se utiliza para evaluar la aptitud de los diseños, los operadores (selección, cruce, mutación y elitismo) que facilitan la evolución de la optimización continúan siendo binarios, empleando para ello los operadores: selección (torneo binario), cruce (por un punto simple), mutación (multi-bit), y elitismo (se mantiene entre generaciones, solamente el individuo mejor adaptado de la población).

6.6 METODOLOGÍA PARA LA OPTIMIZACIÓN DE TOPOLOGÍA CON ISOLÍNEAS Y ALGORITMOS GENÉTICOS

A continuación, se procede a describir paso a paso el procedimiento seguido por el método MFAG-ig para la optimización de topología con isolíneas y algoritmos genéticos, incluido en el programa MFAG. Una representación esquemática de la metodología seguida por el proceso de optimización se muestra en la Fig. 6.4.

1. Definir las características del dominio inicial de la estructura (longitud, altura, espesor, regiones optimizables, no optimizables, etc.).
2. Establecer los parámetros del modelo para el análisis por elementos finitos con malla fija: número de elementos en ambas direcciones, módulo de elasticidad para el material real y virtual, coeficiente de Poisson, tipo de elemento, orden de integración, cargas aplicadas, condiciones de apoyo, etc.
3. Definir los parámetros del algoritmo genético: micro-GA, tamaño de la población, probabilidad de cruce y mutación, número máximo de generaciones, tipo de selección, tipo de cruce, número de descendientes, elitismo, nicho, número de bits por individuo, valores máximos y mínimos reales.
4. Establecer el estimador para el valor de referencia (tensión de Von Mises, energía de deformación, etc.) para las isolíneas y el número de refinamientos.
5. Generar una población pseudo-aleatoria de individuos.
6. Analizar la respuesta inicial de la estructura.
7. Descodificar cada uno de los cromosomas binarios de la población para obtener los valores, que definen las isolíneas de referencia.
8. Obtener las matrices de rigidez correspondientes a los elementos finitos. En caso de que el elemento se encuentre intersectado por el contorno de la estructura, utilizar el algoritmo de recorte para determinar la parte proporcional del elemento que se encuentra en el interior de la isolínea.
9. Analizar la respuesta de los diseños, una vez actualizada la matriz de rigidez de la estructura, a partir de la situación del nuevo contorno.
10. Repetir los pasos 8 y 9 hasta satisfacer el número fijado para el refinamiento del contorno. En el caso de que éste sea cero, continuar en el paso 11.
11. Evaluar la función de aptitud para los individuos de la población, identificando al mejor de los individuos.
12. Si el número de generaciones supera el número máximo permitido, finalizar el proceso de optimización. En caso contrario, continuar en el paso 13.
13. Aplicar a la población de individuos los operadores genéticos: selección, cruce, mutación, y elitismo. Volver al paso 7.

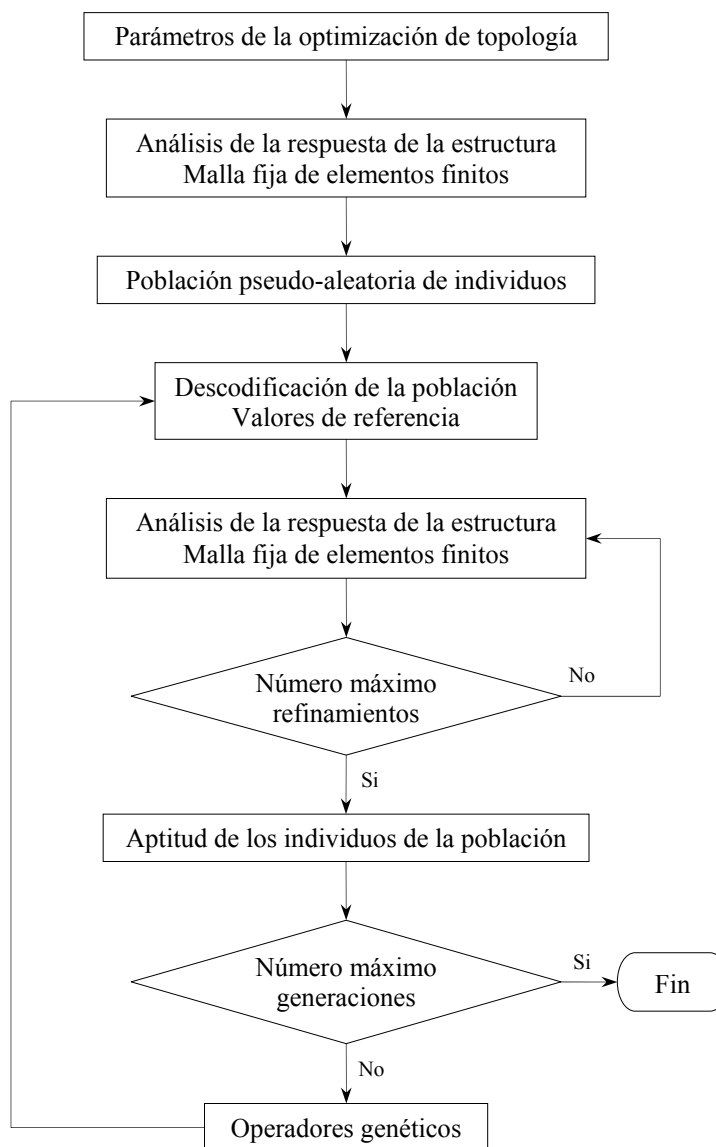


Figura 6.4 Diagrama de flujo del método MFAG-ig para la optimización de topología con isóneas y algoritmos genéticos

6.7 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para validar el nuevo método propuesto MFAG-ig se han resuelto diez ejemplos diferentes para el voladizo de Michell, la viga biapoyada de Michell, la viga de Messerschmidt-Bölkow-Blohm (viga MBB), la estructura de un puente con tablero fijo, y la viga con disco circular rígido.

A lo largo de los distintos ejemplos se estudiará el efecto de la relación longitud/altura, condiciones de apoyo, tamaño del elemento y la orientación de la carga.

En todos los ejemplos, el elemento finito utilizado es el elemento plano rectangular para tensión plana de cuatro nodos, utilizando para la integración numérica un total de cuatro puntos de Gauss. El estimador utilizado para la extracción de las isolíneas de referencia es la tensión de Von Mises.

Los valores adoptados para los parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño (longitud, altura, espesor), y el análisis del modelo con malla fija (número de elementos en dirección longitudinal y transversal, módulo de elasticidad real, relación entre el módulo de elasticidad real y virtual y coeficiente de Poisson) se muestran en la tabla 6.2.

Tabla 6.2 Parámetros que controlan las dimensiones del dominio de diseño, y el análisis del modelo con malla fija de elementos finitos

| Ejemplo | L (mm) | h (mm) | t (mm) | Malla | E (MPa) | $\frac{E}{E_0}$ | ν |
|---|-----------------|----------------|----------------|----------------------------|------------------|-----------------|-------|
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$) | 16 | 10 | 1 | 64×40 96×60 192×120 | $210 \cdot 10^5$ | 10^4 | 0,3 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$) | 200 | 100 | 1 | 152×76 | $210 \cdot 10^3$ | 10^4 | 0,3 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$) | 200 | 50 | 10 | 160×40 | $2 \cdot 10^3$ | 10^4 | 0,4 |
| Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$) | 16 | 10 | 1 | 64×40 96×60 192×120 | $210 \cdot 10^5$ | 10^4 | 0,3 |
| Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 200 | 80 | 1 | 110×44 | $210 \cdot 10^3$ | 10^4 | 0,3 |
| Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior | 10 | 5 | 1 | 100×50 | $1 \cdot 10^5$ | 10^4 | 0,3 |
| Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | $4 \cdot 10^3$ | $2 \cdot 10^3$ | 10 | 70×35 120×60 240×120 | $200 \cdot 10^3$ | 10^4 | 0,3 |
| Viga MBB | 900 | 150 | 1 | 90×15 120×20 180×30 | $210 \cdot 10^3$ | 10^4 | 0,3 |
| Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida | $18 \cdot 10^4$ | $6 \cdot 10^4$ | $3 \cdot 10^3$ | 270×90 | $200 \cdot 10^3$ | 10^4 | 0,3 |
| Viga con disco circular rígido | 550 | 400 | 5 | 220×160 | $200 \cdot 10^3$ | 10^4 | 0,3 |

Los valores adoptados para el algoritmo genético (tamaño de la población, probabilidad de cruce y mutación, número de bits por cromosoma y número máximo de generaciones) y para la extracción del valor de referencia (número de refinamientos de cavidades e intervalo del valor real) se recogen en la tabla 6.3.

Tabla 6.3 Parámetros del algoritmo genético, y parámetros para la extracción del valor de referencia para la definición del contorno

| Ejemplo | n | p_c | p_m | N_{bit} | N | R_{cav} | Δ_r |
|---|-----|-------|--------|-----------|-----|-----------|------------|
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$) | 10 | 0,85 | 0,0050 | 10 | 75 | 3 | 0,0100 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$) | 10 | 0,85 | 0,0025 | 10 | 125 | 2 | 0,0100 |
| Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$) | 10 | 0,75 | 0,0010 | 10 | 75 | 2 | 0,0050 |
| Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$) | 10 | 0,80 | 0,0025 | 10 | 100 | 3 | 0,0100 |
| Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 10 | 0,75 | 0,0025 | 10 | 75 | 1 | 0,0075 |
| Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior | 10 | 0,85 | 0,0025 | 10 | 100 | 1 | 0,0100 |
| Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior | 10 | 0,85 | 0,0025 | 10 | 75 | 2 | 0,0150 |
| Viga MBB | 10 | 0,85 | 0,0100 | 10 | 125 | 2 | 0,0100 |
| Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida | 10 | 0,75 | 0,0010 | 10 | 125 | 2 | 0,0035 |
| Viga con disco circular rígido | 10 | 0,85 | 0,0025 | 10 | 75 | 3 | 0,0100 |

6.7.1 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$)

El primer ejemplo para el algoritmo de diseño óptimo de topología con isóneas y algoritmos genéticos MFAG-ig, es el voladizo corto de Michell. El voladizo está sometido a una fuerza vertical de 100 N en el centro del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 16 mm, la altura 10 mm, y el espesor 1 mm. Para estudiar el efecto del tamaño de los elementos en la solución final, se han utilizado mallas de 64×40 (2560) elementos, 96×60 (5760) elementos, y 192×120 (23040) elementos (Fig. 6.5).

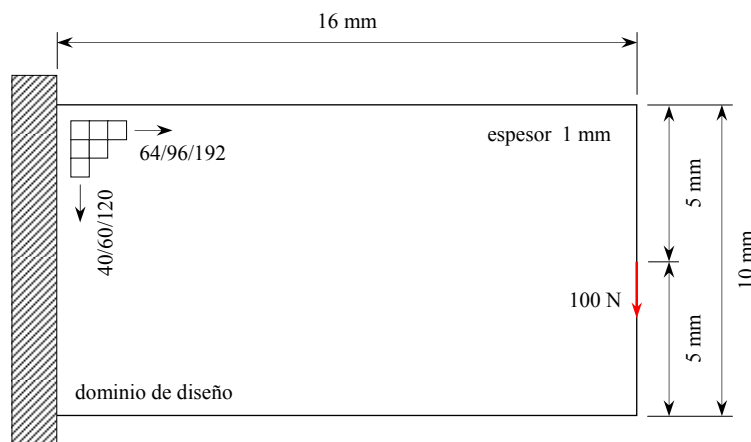


Figura 6.5 Voladizo con fuerza vertical de 100 N centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Dominio de diseño

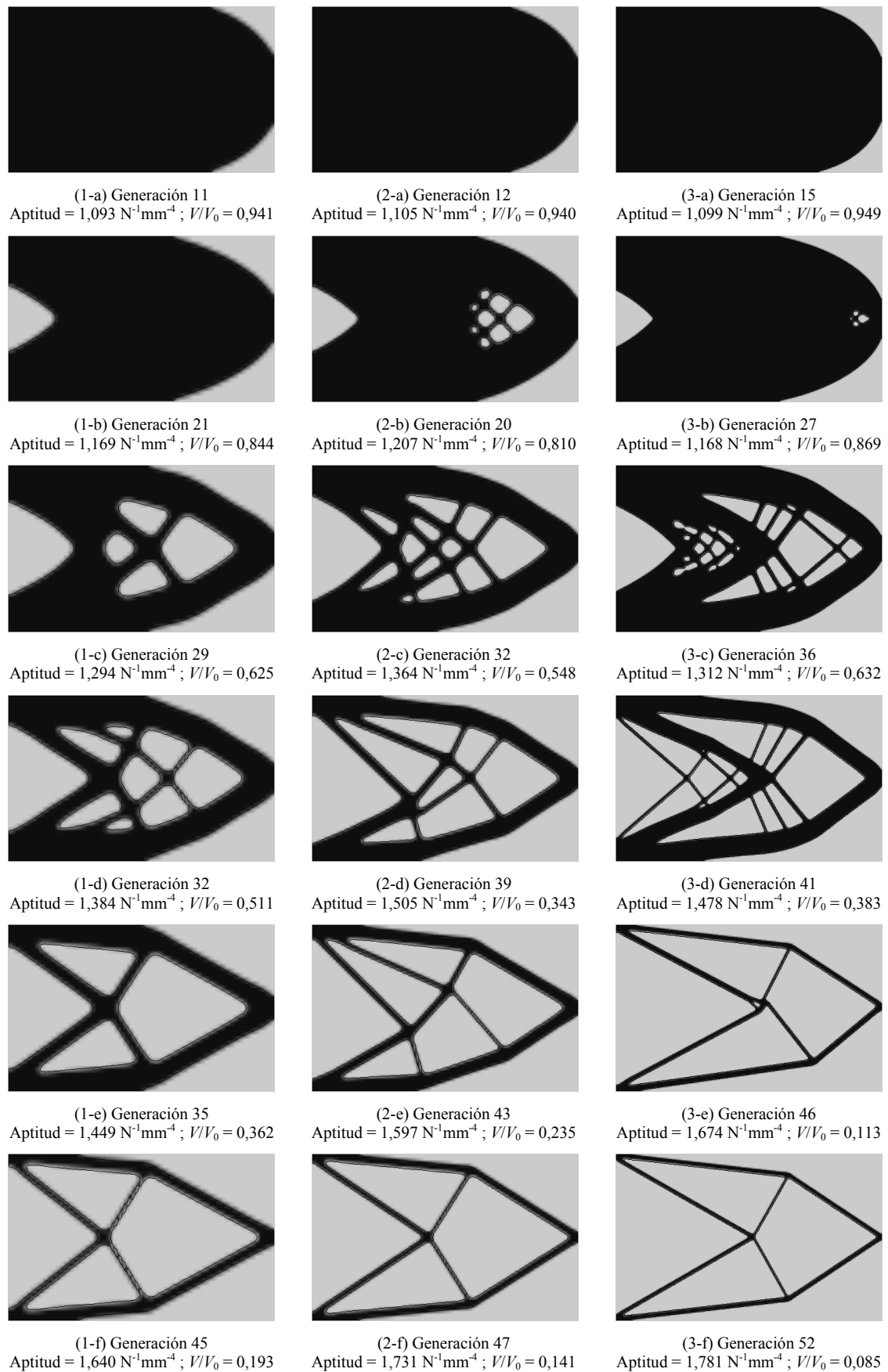


Figura 6.6 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). De izquierda a derecha, mallas de 64×40 , 96×60 y 192×120 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones

En la tabla 6.4 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

Tabla 6.4 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes mallas y generaciones

| Malla | g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_n} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|---------|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------|---|---------------|--------------------------------|
| 64×40 | 11 | 267,020 | 36,142 | 10,554 | $1,101 \cdot 10^{-4}$ | 0,941 | $6,077 \cdot 10^{-3}$ | 106,34 | 1,093 |
| | 21 | 267,916 | 39,427 | 16,470 | $1,156 \cdot 10^{-4}$ | 0,844 | $6,329 \cdot 10^{-3}$ | 210,57 | 1,169 |
| | 29 | 270,349 | 51,680 | 24,382 | $1,449 \cdot 10^{-4}$ | 0,625 | $7,728 \cdot 10^{-3}$ | 296,77 | 1,294 |
| | 32 | 272,133 | 60,614 | 27,514 | $1,694 \cdot 10^{-4}$ | 0,511 | $8,842 \cdot 10^{-3}$ | 330,48 | 1,384 |
| | 35 | 277,493 | 83,816 | 42,630 | $2,315 \cdot 10^{-4}$ | 0,362 | $1,191 \cdot 10^{-2}$ | 364,71 | 1,449 |
| | 45 | 357,221 | 136,619 | 82,856 | $4,252 \cdot 10^{-4}$ | 0,193 | $1,973 \cdot 10^{-2}$ | 478,58 | 1,640 |
| 96×60 | 12 | 399,939 | 36,020 | 9,956 | $1,114 \cdot 10^{-4}$ | 0,940 | $6,019 \cdot 10^{-3}$ | 335,35 | 1,105 |
| | 20 | 400,848 | 40,882 | 16,210 | $1,195 \cdot 10^{-4}$ | 0,810 | $6,393 \cdot 10^{-3}$ | 568,43 | 1,207 |
| | 32 | 402,964 | 57,809 | 25,205 | $1,610 \cdot 10^{-4}$ | 0,548 | $8,355 \cdot 10^{-3}$ | 927,99 | 1,364 |
| | 39 | 408,183 | 86,820 | 43,955 | $2,413 \cdot 10^{-4}$ | 0,343 | $1,209 \cdot 10^{-2}$ | 1148,51 | 1,505 |
| | 43 | 417,395 | 120,298 | 64,885 | $3,449 \cdot 10^{-4}$ | 0,235 | $1,664 \cdot 10^{-2}$ | 1274,12 | 1,597 |
| | 47 | 480,477 | 185,551 | 111,129 | $5,660 \cdot 10^{-4}$ | 0,141 | $2,565 \cdot 10^{-2}$ | 1398,43 | 1,731 |
| 192×120 | 15 | 799,110 | 35,526 | 8,211 | $1,132 \cdot 10^{-4}$ | 0,949 | $5,990 \cdot 10^{-3}$ | 5681,54 | 1,099 |
| | 27 | 799,828 | 38,288 | 13,932 | $1,170 \cdot 10^{-4}$ | 0,869 | $6,162 \cdot 10^{-3}$ | 10610,23 | 1,168 |
| | 36 | 800,730 | 51,299 | 13,409 | $1,461 \cdot 10^{-4}$ | 0,632 | $7,536 \cdot 10^{-3}$ | 14451,83 | 1,312 |
| | 41 | 803,218 | 80,428 | 31,158 | $2,204 \cdot 10^{-4}$ | 0,383 | $1,104 \cdot 10^{-2}$ | 16723,90 | 1,478 |
| | 46 | 843,942 | 249,482 | 136,540 | $7,179 \cdot 10^{-4}$ | 0,113 | $3,316 \cdot 10^{-2}$ | 19040,49 | 1,674 |
| | 52 | 862,313 | 311,938 | 178,584 | $9,291 \cdot 10^{-4}$ | 0,085 | $4,132 \cdot 10^{-2}$ | 21714,29 | 1,781 |

En las gráficas de la Fig. 6.7 se comparan la evolución de la función de aptitud, la compliance, y la fracción de volumen con el tiempo y las generaciones.

En la Fig. 6.7a se puede apreciar que los diseños óptimos finales obtenidos con las mallas de 192×120 y 96×60 elementos son mejores (aptitudes un 8,6% y un 5,5% mayores respectivamente) que el conseguido con la malla de 64×40 elementos, aunque los tiempos totales de optimización en los dos primeros casos son mayores (45,37 y 2,92 veces respectivamente) que el invertido con la malla de 64×40 elementos (ver tabla 6.4), coste computacional que se refleja en las Figs. 6.7b, 6.7d y 6.7f.

En la Fig. 6.7c se muestra que los diseños óptimos finales conseguidos con las mallas de 192×120 y 96×60 elementos son menos rígidos (109,43% y 30,00% respectivamente) que el obtenido con la malla de 64×40 elementos.

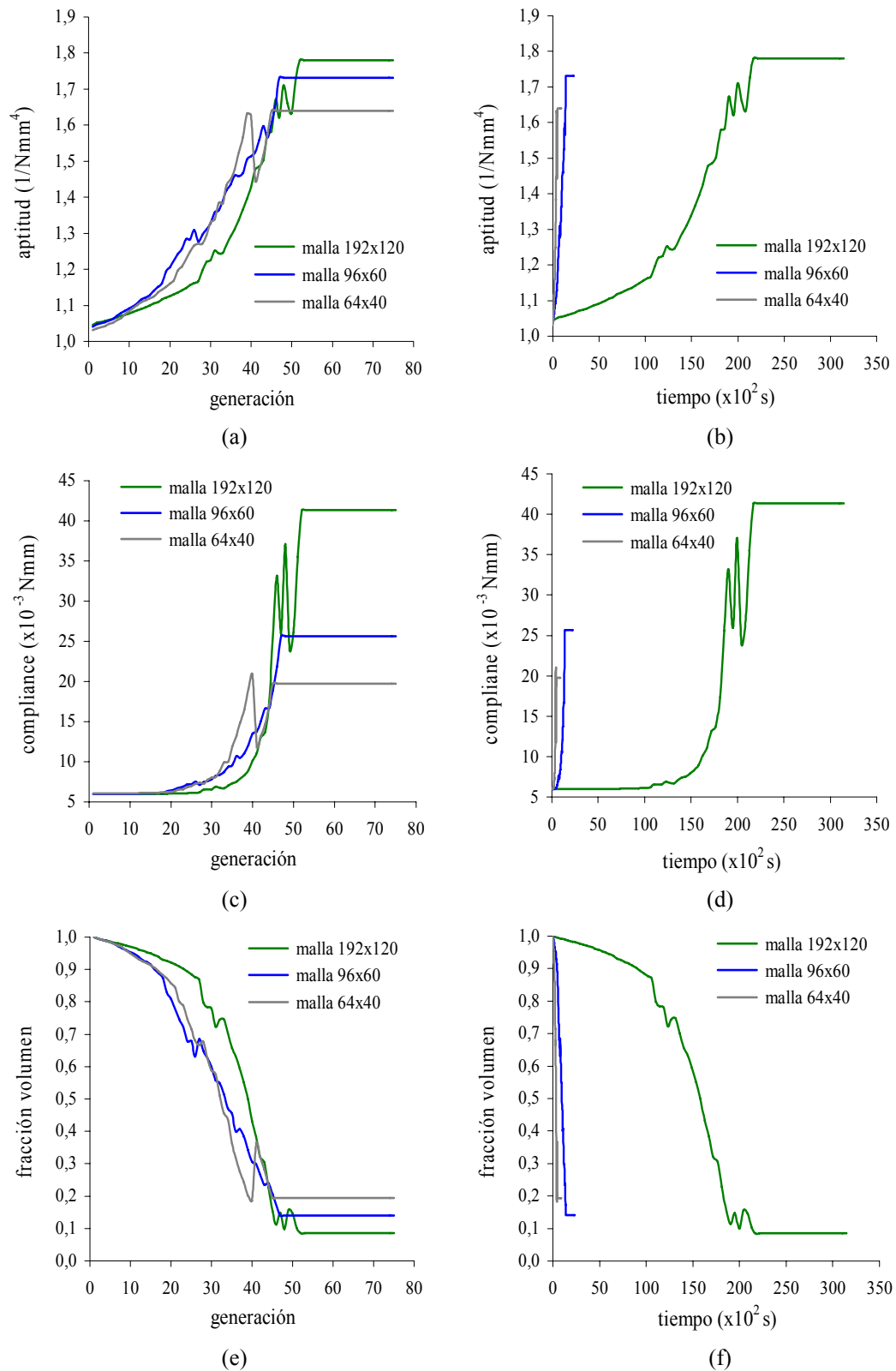


Figura 6.7 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución aptitud/generación. (b) Evolución aptitud/tiempo. (c) Evolución compliance/generación. (d) Evolución compliance/tiempo. (e) Evolución fracción de volumen/generación. (f) Evolución fracción de volumen/tiempo

Por el contrario, las fracciones de volumen en los dos primeros casos son menores (127,06% y 36,88% respectivamente) que la obtenida con la malla de 64×40.

En las Figs. 6.8 se muestran la evolución del desplazamiento máximo y la tensión de Von Mises media con las generaciones. En la Fig. 6.8a se aprecia que los diseños óptimos finales obtenidos con las mallas de 192×120 y 96×60 elementos presentan desplazamientos máximos superiores (118,51% y 33,11% respectivamente), que el obtenido con la malla de 64×40 elementos. De la misma forma, los diseños óptimos finales conseguidos con las mallas de 192×120 y 96×60 elementos presentan tensiones de Von Mises medias superiores (128,32% y 35,82% respectivamente) a la obtenida con la malla de 64×40 elementos (Fig. 6.8b).

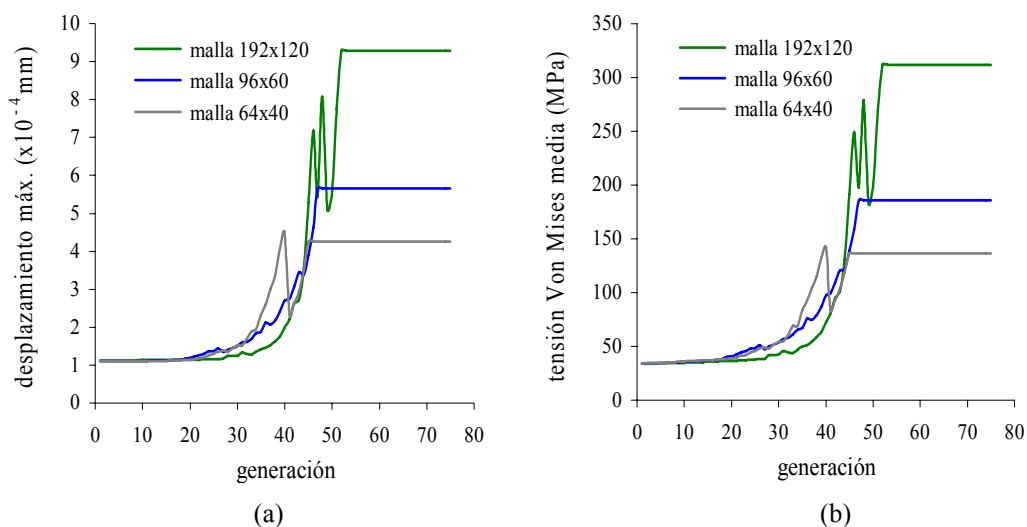


Figura 6.8 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución desplazamiento máximo/generación. (b) Tensión de Von Mises media/generación

En las gráficas de la Fig. 6.9 se comparan la evolución de la aptitud, la compliance, el volumen, y el desplazamiento máximo con el número de elementos.

Con el objetivo de mejorar el ajuste en las curvas de evolución (Fig. 6.9), se introduce en las gráficas un nuevo punto (malla de 144×90 elementos), situado entre los obtenidos para las mallas de 96×60 y 192×120 elementos. En la Fig. 6.9a se observa que el valor final de la aptitud aumenta rápidamente hasta 5000 elementos, estabilizando su valor hasta 15000 elementos, y volviendo a aumentar aunque de forma más suave hasta 23000 elementos. En la Fig. 6.9b se aprecia que el volumen final del diseño decrece rápidamente hasta 5000 elementos, volviendo a decrecer aunque de forma más gradual hasta 23000 elementos. Por el contrario, los valores del desplazamiento máximo (Fig. 6.9b) y la compliance (Fig. 6.9a) aumentan de forma progresiva conforme el número de elementos es mayor.

En las Figs. 6.10a y 6.10b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 8,44% y 8,50% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños presentan la misma topología. Sin embargo, aunque la compliance obtenida con el método MFAG-i es solamente un 0,75% mayor que la conseguida con el método MFAG-ig, las geometrías de los diseños resultan diferentes.

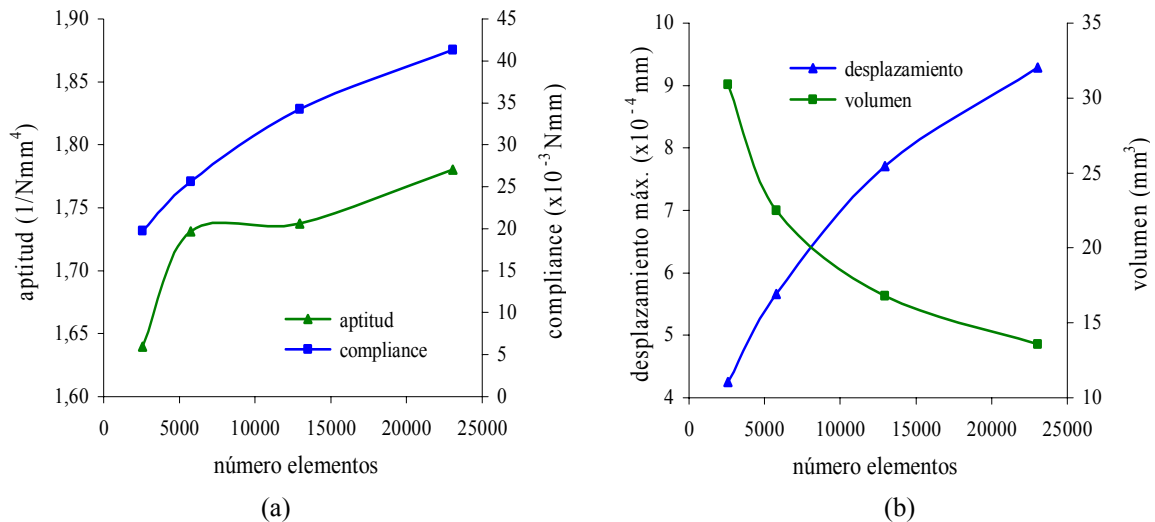


Figura 6.9 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución aptitud/compliance con el número de elementos. (b) Desplazamiento máximo/volumen con el número de elementos

En las Figs. 6.10c y 6.10d se comparan con la solución discreta óptima con 6 nudos (Castejón, 2003) obtenida con el programa TTO (*Truss Topology Optimization*), apreciando que el diseño obtenido con el método MFAG-ig se ajusta de forma más precisa al diseño óptimo de barras articuladas.

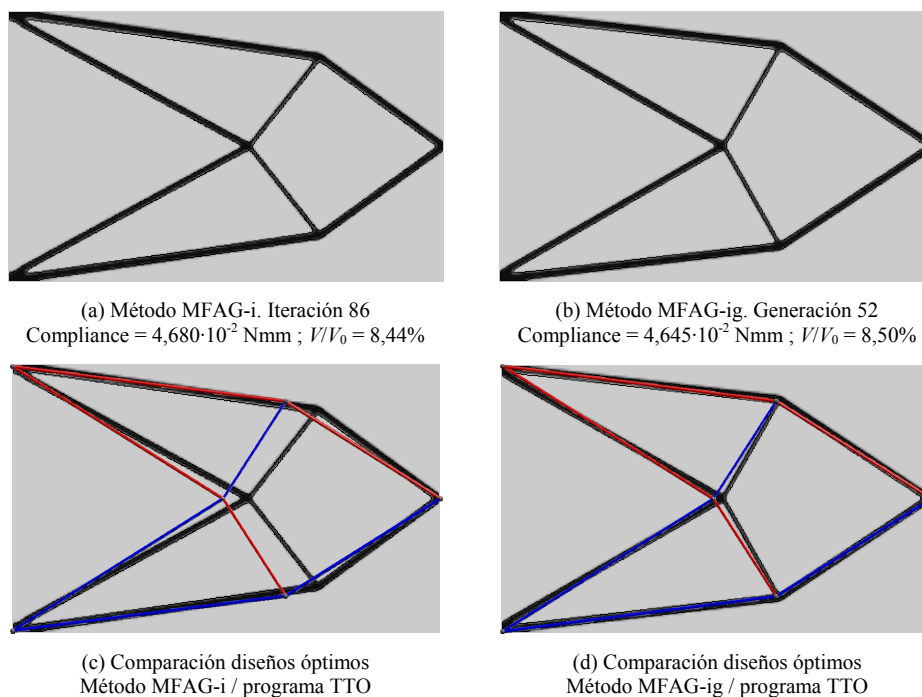


Figura 6.10 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 192×120 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Método MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO

En la tabla 6.5 se muestran los resultados finales de la optimización de topología obtenidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i para una malla de 192×120 elementos. Como

se puede apreciar, las fracciones de volumen obtenidas en el óptimo por ambos métodos son similares. Sin embargo, los valores de la compliance y la tensión de Von Mises media obtenidos con el método MFAG-i son mayores (32,1% y 20,7% respectivamente) que los alcanzados con el método MFAG-ig.

Tabla 6.5 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 192×120 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|---|-----------------|-----------|-----------------|------------|
| MFAG-i | 4,636 | 11,137 | 10,871 | $6,137 \cdot 10^{-2}$ | 0,065 | 0 | 110 | 1469,33 |
| MFAG-ig | 4,829 | 9,227 | 8,229 | $4,645 \cdot 10^{-2}$ | 0,085 | 3 | 2080 | 21714,29 |

Las conclusiones que se extraen de la tabla 6.5 y de las Figs. 6.10c y 6.10d son que con el método propuesto MFAG-ig se obtienen diseños mejores, y que se ajustan más a la solución discreta. Por el contrario, el tiempo total de la optimización es superior (14,78 veces) al invertido por el método MFAG-i, salvo para casos con bajo número de elementos, en los que el tiempo de análisis es poco significativo.

En las gráficas de la Fig. 6.11 se comparan la evolución de la fracción de volumen y de la compliance (en forma normalizada), con las generaciones y las iteraciones obtenidas con los métodos MFAG-ig y MFAG-i.

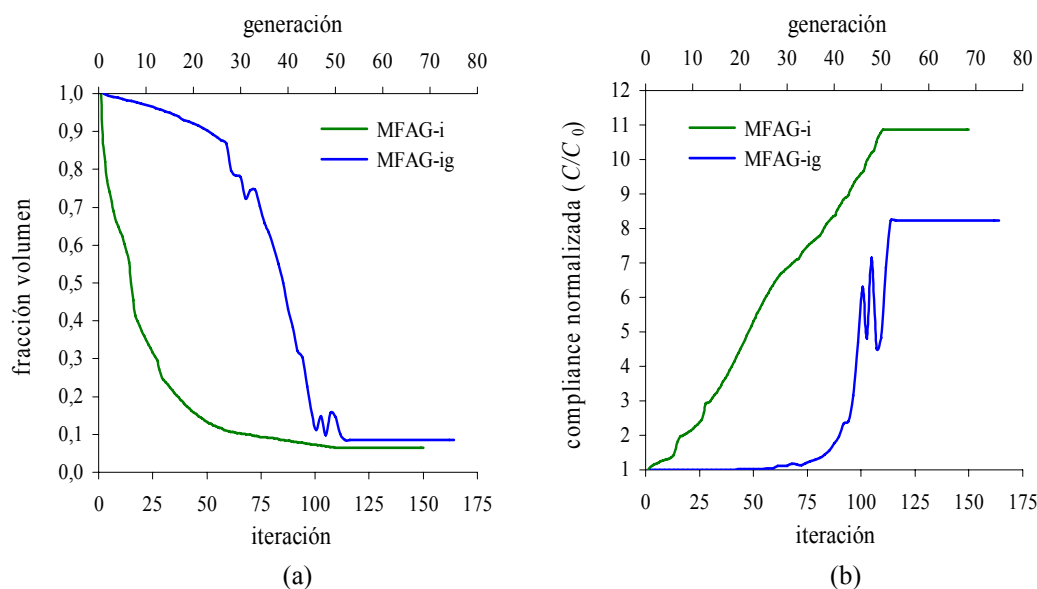


Figura 6.11 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 192×120 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración

En la Fig. 6.11a se observa que el método MFAG-i reduce la fracción de volumen de forma más gradual que el método MFAG-ig, apreciando que hasta la generación 23 solo se

reduce un 10% (85% con MFAG-i) el volumen, disminuyendo rápidamente hasta el 91,5% en la generación 52.

En la Fig. 6.11b se aprecia que el valor de la compliance con el método MFAG-i aumenta progresivamente con el número de iteraciones. Por el contrario, con el método MFAG-ig el valor de la compliance permanece constante hasta la generación 30, aumentando su valor (7,5 veces) rápidamente hasta la generación 52.

En las Figs. 6.12a a 6.12c se representan, los óptimos conseguidos con los métodos multi-GA (Woon, 2002), PLATO-am (Bulman, Sienz y Hinton, 2001) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 41,9%, 37,5% y 36,2% respectivamente.

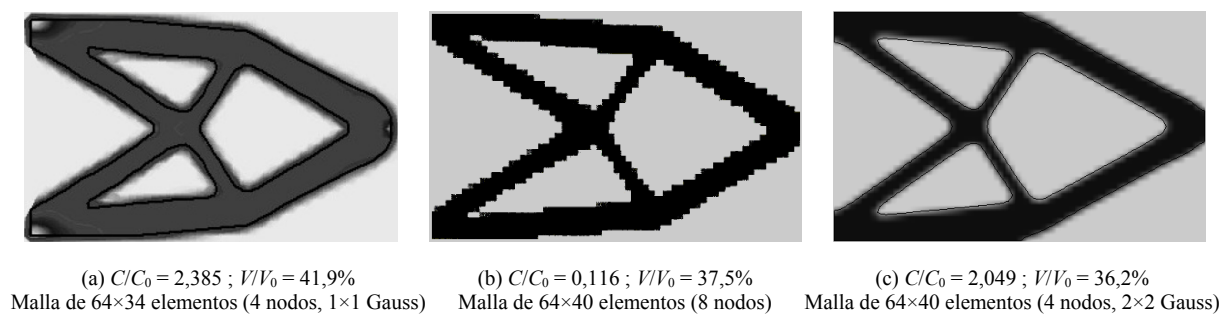


Figura 6.12 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 1,6$).

(a) Método multi-GA. (b) Método PLATO-am. (c) Método MFAG-ig

En las Figs. 6.12 se observa, que las topologías óptimas obtenidas con los tres métodos son similares, presentando en todos los casos la misma forma, número, y distribución de cavidades. La diferencia en la compliance (en forma normalizada) entre los métodos MFAG-ig y multi-GA, en comparación con el método PLATO-am, se debe a que el proceso de optimización en los dos primeros métodos es controlado por una función de aptitud que intenta maximizar la rigidez específica de la estructura, mientras que con el método de homogenización PLATO-am, la función objetivo consiste en minimizar exclusivamente la energía de deformación. También se puede apreciar que el diseño conseguido con el método MFAG-ig presenta una compliance un 16,39% menor que la obtenida con el método multi-GA (Figs. 6.12a y 6.12c respectivamente).

Otra ventaja de los diseños obtenidos con el método MFAG-ig con respecto a los obtenidos con el método PLATO-am es la “calidad práctica” de las soluciones, presentando contornos plenamente definidos, y evitando con ello la presencia de bordes (*jagged edges*) que implican la necesidad de interpretar la topología para proponer el diseño final.

6.7.1.1 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$)

En este segundo ejemplo, el voladizo está sometido a una fuerza vertical de 1 kN en el centro del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 200 mm, la altura 100 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 11552 elementos, 152 en dirección longitudinal y 76 en dirección transversal (Fig. 6.13).

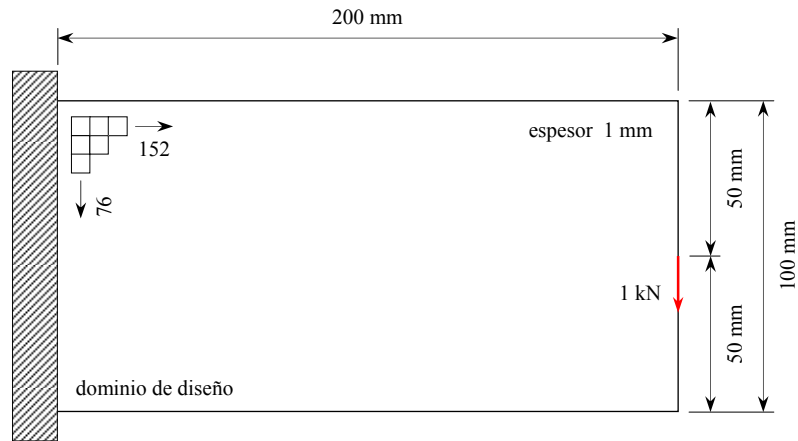


Figura 6.13 Voladizo con fuerza vertical de 1 kN centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$).
Dominio de diseño

El número máximo de generaciones es 125, obteniendo el diseño óptimo en la generación 93. En las Figs. 6.14 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización.

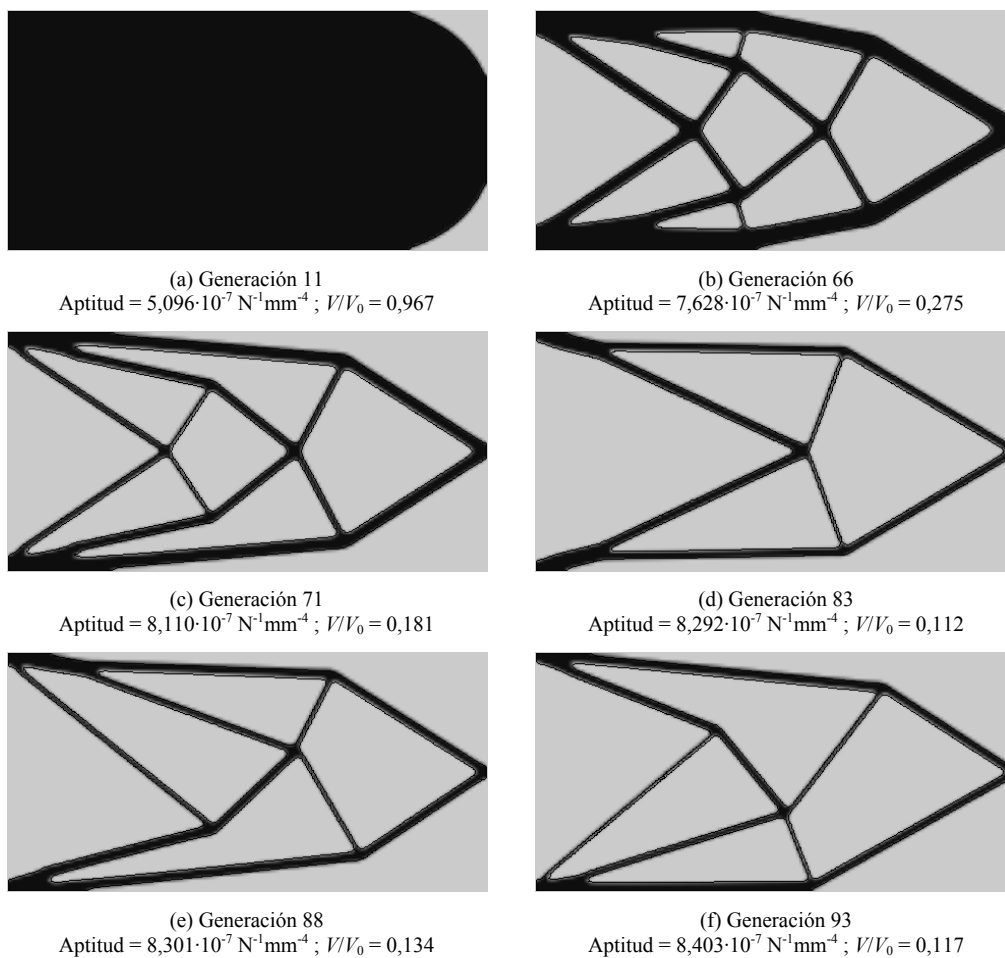


Figura 6.14 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Malla de 152×76 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones

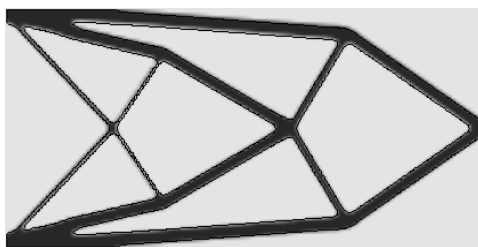
En la tabla 6.6 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

En las Figs. 6.15a y 6.15b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 18,9% y 18,1% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños presentan la misma topología. La fracción de volumen obtenida con el método MFAG-i es solo un 4,41% superior a la conseguida con el método MFAG-ig, y el valor de la compliance un 3,79 % superior.

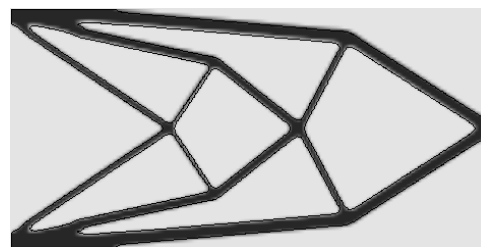
En la tabla 6.7 se muestran los resultados finales de la optimización de topología obtenidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i para una malla de 152×76 elementos. Como se puede apreciar, el valor de la compliance obtenido con el método MFAG-ig es un 60,91% mayor que el alcanzado con el método MFAG-i. En este caso, las topologías simétricas son mucho más rígidas que las topologías asimétricas.

Tabla 6.6 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_n} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------|-----------------|---|---------------|--------------------------------|
| 11 | 506,269 | 40,518 | 6,905 | 0,191 | 0,967 | 101,484 | 639,53 | $5,096 \cdot 10^{-7}$ |
| 66 | 519,545 | 123,497 | 59,935 | 0,483 | 0,275 | 238,476 | 4746,88 | $7,628 \cdot 10^{-7}$ |
| 71 | 537,869 | 174,358 | 91,704 | 0,732 | 0,181 | 341,243 | 5139,70 | $8,110 \cdot 10^{-7}$ |
| 83 | 796,523 | 267,522 | 155,046 | 1,215 | 0,112 | 537,754 | 6071,32 | $8,292 \cdot 10^{-7}$ |
| 88 | 669,168 | 226,469 | 124,988 | 0,998 | 0,134 | 449,096 | 6449,11 | $8,301 \cdot 10^{-7}$ |
| 93 | 805,716 | 252,293 | 148,188 | 1,135 | 0,117 | 508,744 | 6818,76 | $8,403 \cdot 10^{-7}$ |



(a) Iteración 136
Compliance = 352,579 Nmm ; $V/V_0 = 18,90\%$



(b) Generación 71
Compliance = 365,928 Nmm ; $V/V_0 = 18,10\%$

Figura 6.15 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Malla de 152×76 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig

Tabla 6.7 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$). Malla de 152×76 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|--|-----------------|-----------|--------------------|---------------|
| MFAG-i | 6,054 | 4,286 | 3,691 | 352,579 | 0,189 | 0 | 136 | 542,05 |
| MFAG-ig | 5,437 | 6,442 | 5,932 | 567,336 | 0,117 | 2 | 2790 | 6818,76 |

El método MFAG-ig tiene un coste computacional mayor (12,58 veces) que el método MFAG-i, debido principalmente al tamaño de la población y al número de refinamientos de las isolíneas.

En las Figs. 6.16a y 6.16b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos ESO (Xie y Steven, 1993) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 26,95% y 25,83% respectivamente.

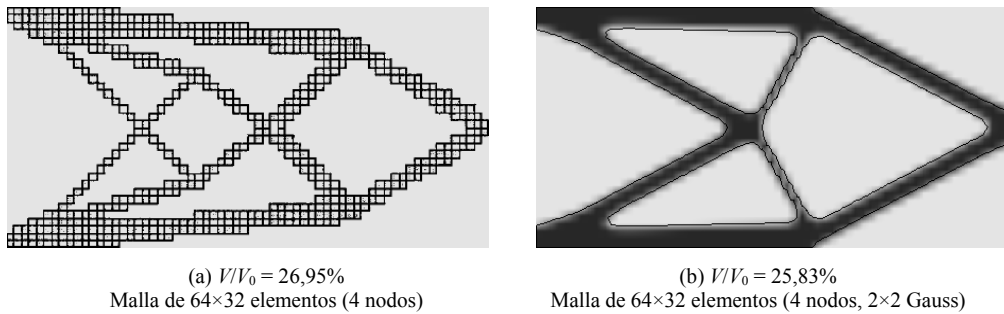


Figura 6.16 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$).
(a) Método ESO. (b) Método MFAG-ig

En las Figs. 6.16a y 6.16b se observa que las topologías óptimas obtenidas no son similares, presentando distinto número, forma, y distribución de cavidades. Además, en la Fig. 6.16a se aprecian algunos de los problemas asociados al método ESO, como las cadenas de elementos cuadriláteros unidos por sus nodos de esquina, y la necesidad de interpretar la topología para proponer un diseño final construible.

6.7.1.2 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$)

El voladizo está sometido a una fuerza vertical de 10 N en el centro del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 200 mm, la altura 50 mm, y el espesor 10 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 6400 elementos, 160 en dirección longitudinal y 40 en dirección transversal (Fig. 6.17).

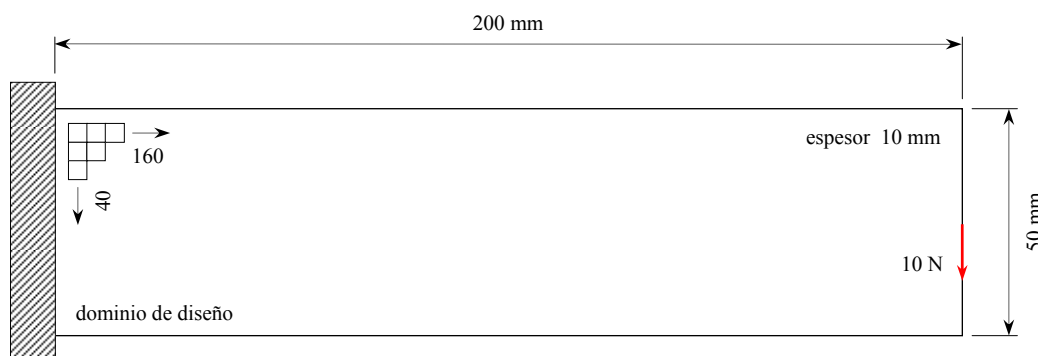


Figura 6.17 Voladizo con fuerza vertical de 10 N centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$).
Dominio de diseño

En las Figs. 6.18 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 75, obteniendo el diseño óptimo en la generación 47.

En la tabla 6.8 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo de optimización acumulado, y la aptitud para diferentes generaciones.

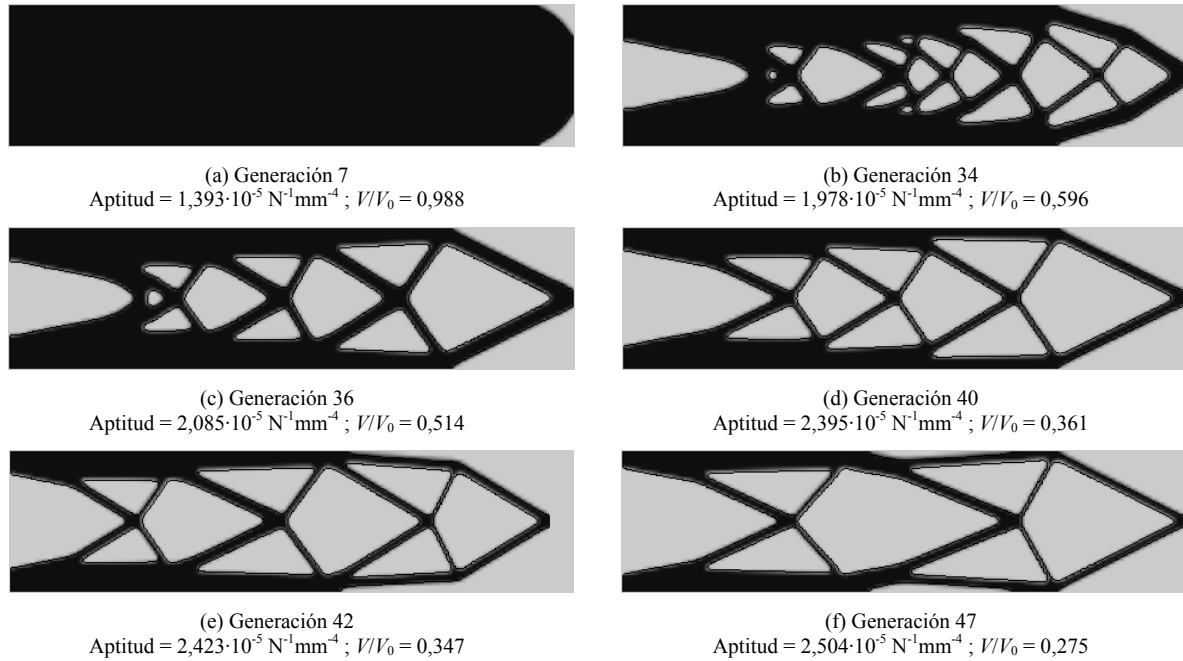


Figura 6.18 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Topologías óptimas para diferentes generaciones

Tabla 6.8 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^n C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($\text{N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$) |
|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------|---|---------------|--|
| 7 | $6,002 \cdot 10^{-1}$ | $1,375 \cdot 10^{-1}$ | $1,066 \cdot 10^{-2}$ | $1,355 \cdot 10^{-1}$ | 0,988 | 0,727 | 137,72 | $1,393 \cdot 10^{-5}$ |
| 34 | $7,162 \cdot 10^{-1}$ | $2,133 \cdot 10^{-1}$ | $8,382 \cdot 10^{-2}$ | $1,613 \cdot 10^{-1}$ | 0,596 | 0,849 | 753,14 | $1,978 \cdot 10^{-5}$ |
| 36 | $7,474 \cdot 10^{-1}$ | $2,439 \cdot 10^{-1}$ | $9,575 \cdot 10^{-2}$ | $1,770 \cdot 10^{-1}$ | 0,514 | 0,933 | 802,99 | $2,085 \cdot 10^{-5}$ |
| 40 | $9,381 \cdot 10^{-1}$ | $3,197 \cdot 10^{-1}$ | $1,422 \cdot 10^{-1}$ | $2,249 \cdot 10^{-1}$ | 0,361 | 1,158 | 906,02 | $2,395 \cdot 10^{-5}$ |
| 42 | $9,027 \cdot 10^{-1}$ | $3,288 \cdot 10^{-1}$ | $1,472 \cdot 10^{-1}$ | $2,341 \cdot 10^{-1}$ | 0,347 | 1,190 | 957,17 | $2,423 \cdot 10^{-5}$ |
| 47 | $1,119 \cdot 10^0$ | $4,054 \cdot 10^{-1}$ | $1,942 \cdot 10^{-1}$ | $2,913 \cdot 10^{-1}$ | 0,275 | 1,452 | 1080,93 | $2,504 \cdot 10^{-5}$ |

En las Figs. 6.19a y 6.19b se muestran los óptimos conseguidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 35,9% y 36,1% respectivamente. Como se observa, los diseños presentan topologías diferentes, aunque las fracciones de volumen se diferencian solamente un 0,56%.

En la tabla 6.9 se muestran los resultados finales de la optimización de topología obtenidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i para una malla de 160×40 elementos. Como se aprecia, los valores de la compliance y la fracción de volumen obtenidos con los métodos MFAG-i y método MFAG-ig son muy similares.

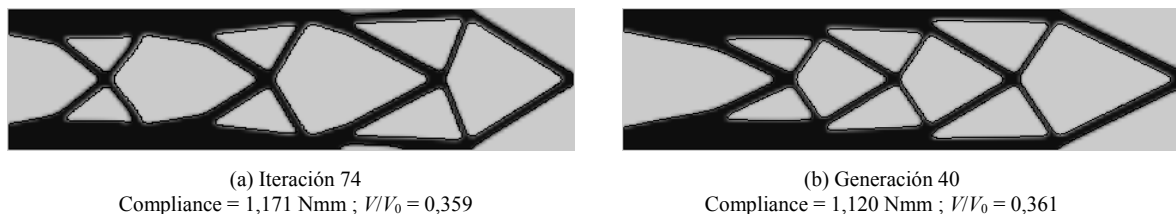


Figura 6.19 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Malla de 160×40 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig

Tabla 6.9 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). Malla de 160×40 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|---|-----------------|-----------|-----------------|------------|
| MFAG-i | 4,704 | 2,905 | 2,118 | 1,423 | 0,276 | 0 | 89 | 155,19 |
| MFAG-ig | 5,760 | 2,990 | 2,149 | 1,451 | 0,275 | 2 | 1410 | 1080,93 |

El método MFAG-ig tiene un coste computacional solo 6,96 veces superior al método MFAG-i, debido a que la malla fija dispuesta para este ejemplo presenta un número menor de elementos finitos.

En las Figs. 6.20a y 6.20b se representan, los óptimos conseguidos con los métodos MMA (Bruns y Tortorelli, 2003) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 50,0% y 51,4% respectivamente.

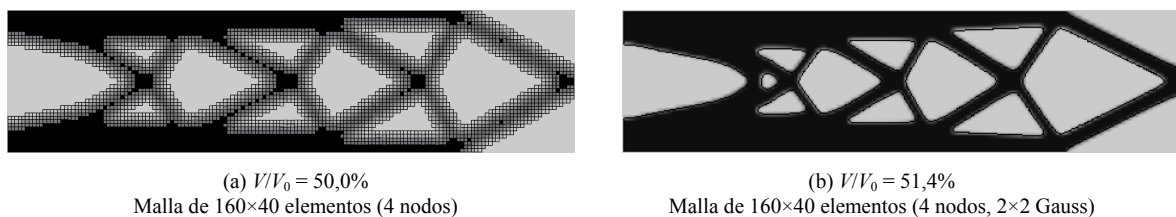


Figura 6.20 Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 4,0$). (a) Método MMA. (b) Método MFAG-ig

En las Figs. 6.20a y 6.20b se observa, que las topologías óptimas obtenidas disponen de un número y una distribución de cavidades similares. Sin embargo, en la Fig. 6.20a se observa que el diseño óptimo obtenido con el método MMA presenta un número elevado de elementos con densidades intermedias, lo que obliga a interpretar la topología para proponer el diseño final.

6.7.2 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$)

El cuarto ejemplo es una viga en voladizo sometida a una fuerza vertical de 100 N en la fibra inferior del extremo libre. La longitud del dominio de diseño es 16 mm, la altura 10 mm, y el espesor 1 mm. Para estudiar el efecto del tamaño de los elementos en la solución final, se han utilizado mallas de 64×40 (2560) elementos, 96×60 (5760) elementos, y 192×120 (23040) elementos (Fig. 6.21).

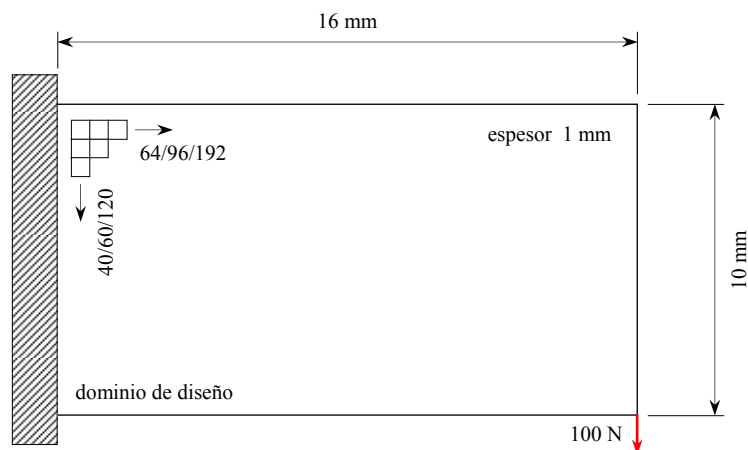


Figura 6.21 Voladizo con fuerza vertical de 100 N en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$).
Dominio de diseño

En las Figs. 6.22 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización, para cada una de las mallas estudiadas. El número máximo de generaciones es 100, obteniendo el diseño óptimo en la generación 40 en el caso de la malla de 64×40 elementos, en la generación 70 para la malla de 96×60 , y en la generación 90 para la malla de 192×120 elementos.

En la tabla 6.10 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones y para cada una de las mallas.

En las Figs. 6.23 se muestran la evolución del desplazamiento máximo y la tensión de Von Mises media con las generaciones.

En la Fig. 6.23a se aprecia que los diseños óptimos finales obtenidos con las mallas de 96×60 y 64×40 elementos presentan desplazamientos máximos inferiores (123,76% y 216,72% respectivamente) que el obtenido con la malla de 192×120 elementos. De la misma forma, los diseños óptimos finales conseguidos con las mallas de 96×60 y 64×40 elementos presentan tensiones de Von Mises medias inferiores (93,76% y 180,05% respectivamente), a la obtenida con la malla de 192×120 elementos (Fig. 6.23b).

En las gráficas de la Fig. 6.24 se comparan la evolución de la función de aptitud, la compliance, y la fracción de volumen con el tiempo y las generaciones.

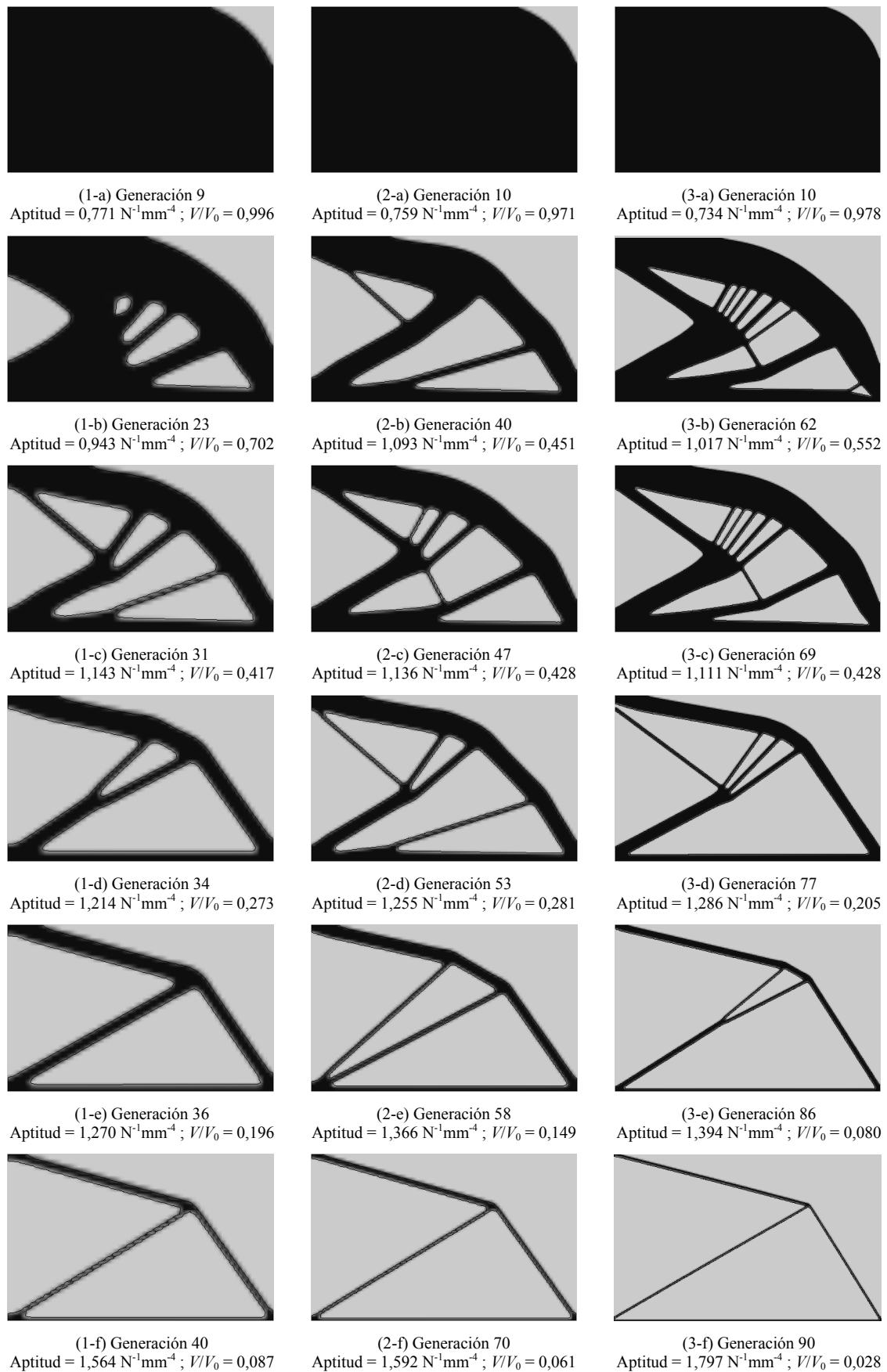
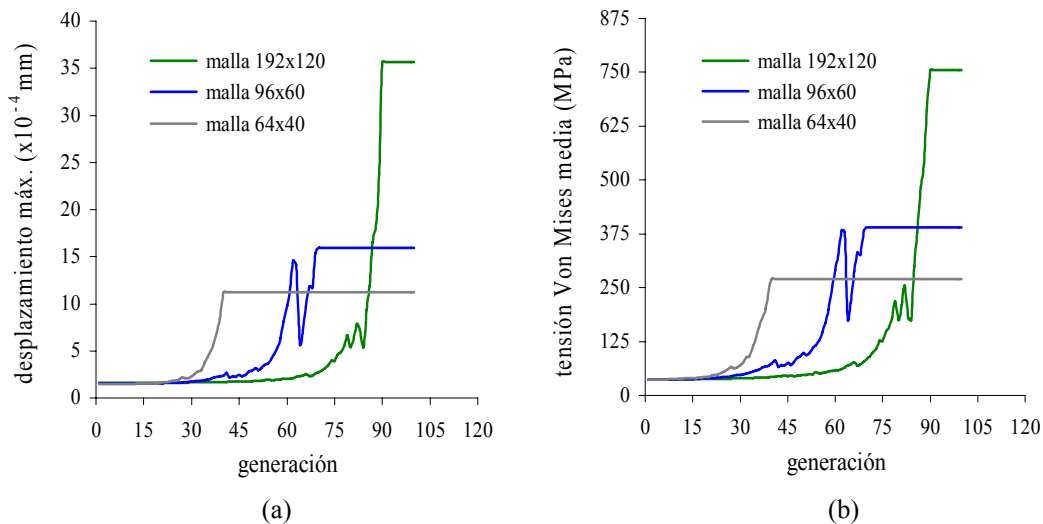


Figura 6.22 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). De izquierda a derecha, mallas de 64×40 , 96×60 y 192×120 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones

Tabla 6.10 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Resultados para diferentes mallas y generaciones

| Malla | g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_s} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|---------|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------|---|---------------|--------------------------------|
| 64×40 | 9 | 579,730 | 38,044 | 7,002 | $1,499 \cdot 10^{-4}$ | 0,966 | $8,392 \cdot 10^{-3}$ | 85,020 | 0,771 |
| | 23 | 579,661 | 49,830 | 16,763 | $1,727 \cdot 10^{-4}$ | 0,702 | $9,447 \cdot 10^{-3}$ | 229,140 | 0,943 |
| | 31 | 579,928 | 77,361 | 36,890 | $2,511 \cdot 10^{-4}$ | 0,417 | $1,310 \cdot 10^{-2}$ | 318,220 | 1,143 |
| | 34 | 580,391 | 115,653 | 57,933 | $3,676 \cdot 10^{-4}$ | 0,273 | $1,886 \cdot 10^{-2}$ | 353,070 | 1,214 |
| | 36 | 581,510 | 157,669 | 81,557 | $5,027 \cdot 10^{-4}$ | 0,196 | $2,510 \cdot 10^{-2}$ | 375,470 | 1,270 |
| | 40 | 650,155 | 269,726 | 180,752 | $1,124 \cdot 10^{-3}$ | 0,087 | $4,616 \cdot 10^{-2}$ | 419,720 | 1,564 |
| 96×60 | 10 | 869,612 | 37,606 | 5,466 | $1,547 \cdot 10^{-4}$ | 0,971 | $8,481 \cdot 10^{-3}$ | 262,210 | 0,759 |
| | 40 | 869,565 | 74,263 | 33,087 | $2,421 \cdot 10^{-4}$ | 0,451 | $1,267 \cdot 10^{-2}$ | 1133,310 | 1,093 |
| | 47 | 869,423 | 76,885 | 35,005 | $2,480 \cdot 10^{-4}$ | 0,428 | $1,284 \cdot 10^{-2}$ | 1347,880 | 1,136 |
| | 53 | 869,829 | 111,289 | 56,168 | $3,542 \cdot 10^{-4}$ | 0,281 | $1,772 \cdot 10^{-2}$ | 1538,200 | 1,255 |
| | 58 | 871,649 | 199,152 | 111,238 | $6,371 \cdot 10^{-4}$ | 0,149 | $3,071 \cdot 10^{-2}$ | 1694,450 | 1,366 |
| | 70 | 918,289 | 389,847 | 260,600 | $1,591 \cdot 10^{-3}$ | 0,061 | $6,487 \cdot 10^{-2}$ | 2060,290 | 1,592 |
| 192×120 | 10 | 1739,240 | 37,063 | 3,848 | $1,629 \cdot 10^{-4}$ | 0,978 | $8,714 \cdot 10^{-3}$ | 3373,800 | 0,734 |
| | 62 | 1739,170 | 61,680 | 25,535 | $2,138 \cdot 10^{-4}$ | 0,552 | $1,112 \cdot 10^{-2}$ | 24053,090 | 1,017 |
| | 69 | 1739,060 | 78,013 | 33,402 | $2,569 \cdot 10^{-4}$ | 0,428 | $1,314 \cdot 10^{-2}$ | 27124,480 | 1,111 |
| | 77 | 1739,100 | 158,429 | 74,172 | $4,811 \cdot 10^{-4}$ | 0,205 | $2,341 \cdot 10^{-2}$ | 30704,490 | 1,286 |
| | 86 | 1741,780 | 378,059 | 204,390 | $1,188 \cdot 10^{-3}$ | 0,080 | $5,237 \cdot 10^{-2}$ | 34690,330 | 1,394 |
| | 90 | 2005,260 | 755,359 | 545,077 | $3,560 \cdot 10^{-3}$ | 0,028 | $1,247 \cdot 10^{-1}$ | 36442,420 | 1,797 |

**Figura 6.23** Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). (a) Evolución desplazamiento máximo/generación. (b) Tensión de Von Mises media/generación

En la Fig. 6.24a se puede apreciar que los diseños óptimos finales obtenidos con las mallas de 192×120 y 96×60 elementos son mejores (aptitudes un 14,90% y un 1,79% mayores respectivamente) que el conseguido con la malla de 64×40 elementos, aunque los tiempos totales de optimización en los dos primeros casos son mayores (86,82 y 4,91 veces respectivamente) que el invertido con la malla de 64×40 elementos (ver tabla 6.10), coste computacional que se refleja en las Figs. 6.24b, 6.24d y 6.24f.

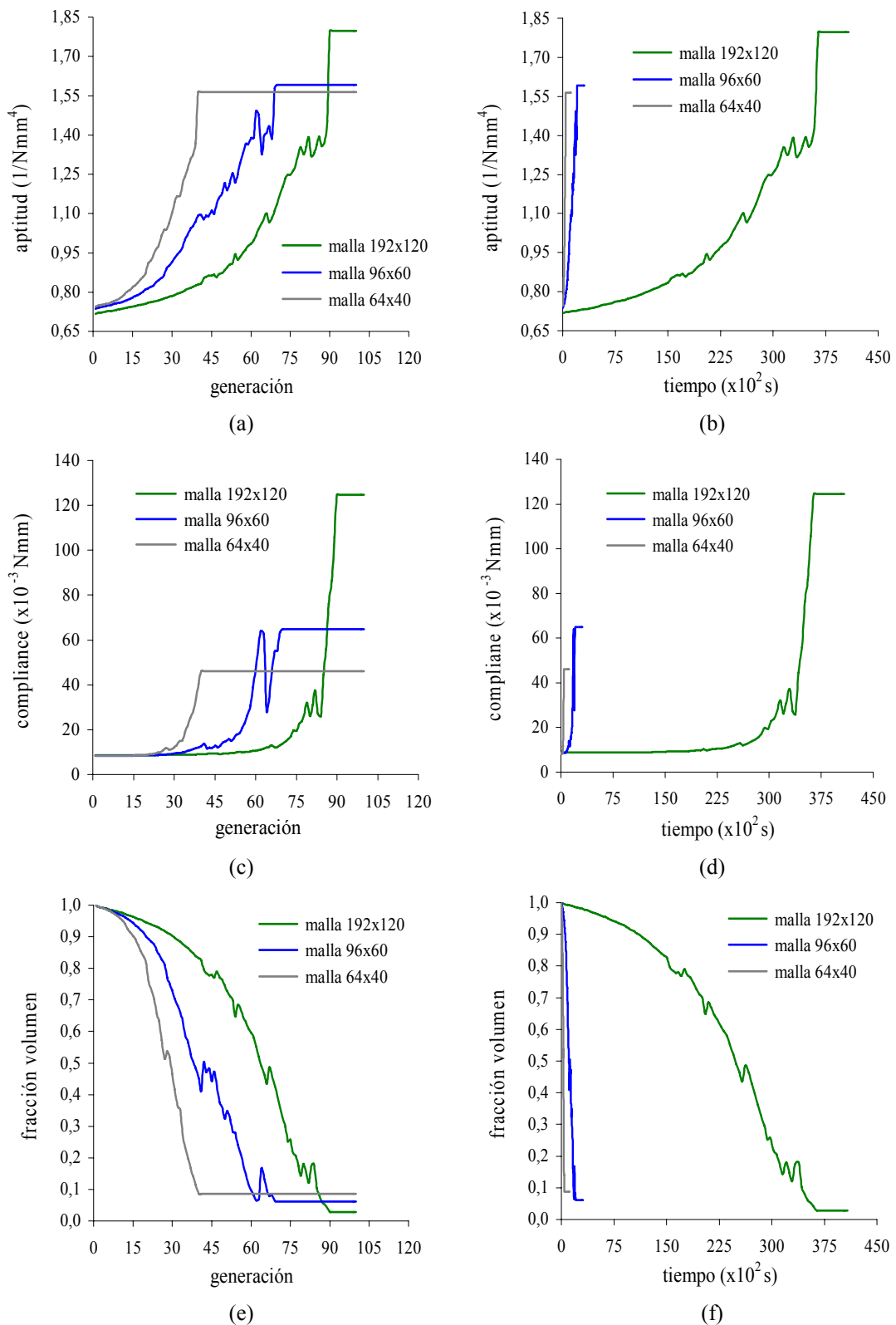


Figura 6.24 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$).
 (a) Evolución aptitud/generación. (b) Evolución aptitud/tiempo. (c) Evolución compliance/generación.
 (d) Evolución compliance/tiempo. (e) Evolución fracción de volumen/generación.
 (f) Evolución fracción de volumen/tiempo

En la Fig. 6.24c se muestra que los diseños óptimos finales conseguidos con las mallas de 192×120 y 96×60 elementos son menos rígidos (170,15% y 40,53% respectivamente) que el obtenido con la malla de 64×40 elementos, aunque las fracciones de volumen en los dos primeros casos son menores (210,71% y 42,62% respectivamente) que la conseguida con la malla de 64×40 elementos (Fig. 6.24e).

En las gráficas de la Fig. 6.25 se comparan la evolución de la aptitud, la compliance, el volumen, y el desplazamiento máximo con el número de elementos.

Con el objetivo de mejorar el ajuste en las curvas de evolución (Fig. 6.25), se introduce en las gráficas un nuevo punto (malla de 144×90 elementos), situado entre los obtenidos para las mallas de 96×60 y 192×120 elementos.

En la Fig. 6.25b se observa que el valor final de la aptitud aumenta con el número de elementos. En la Fig. 6.25a se aprecia que el volumen final del diseño decrece rápidamente hasta 5000 elementos, volviendo a decrecer aunque de forma más gradual hasta 23000 elementos. Por el contrario, los valores del desplazamiento máximo (Fig. 6.25a) y la compliance (Fig. 6.25b) aumentan de forma progresiva conforme el número de elementos es mayor.

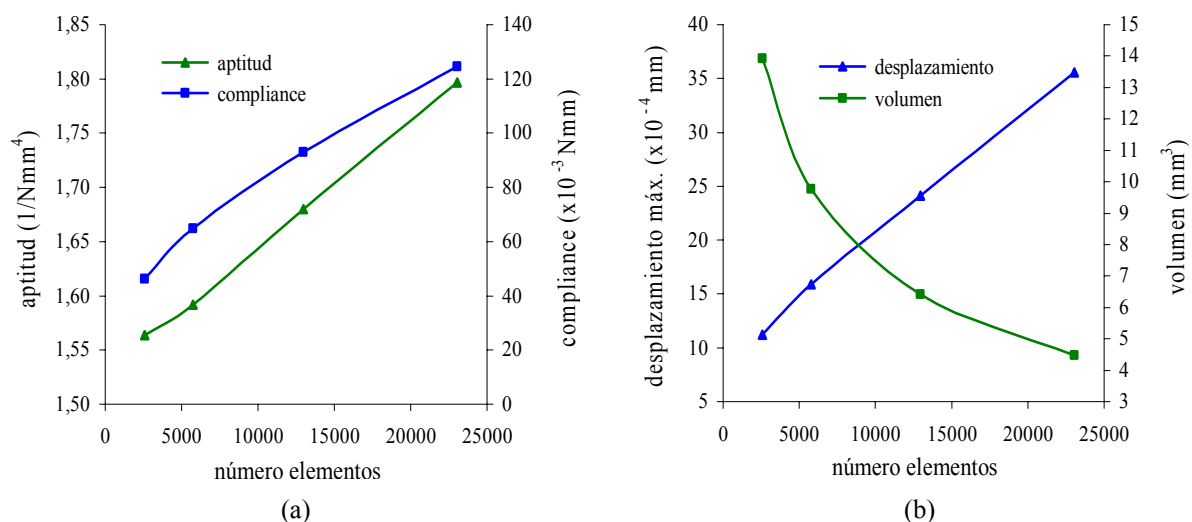


Figura 6.25 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$).
(a) Evolución aptitud/compliance con el número de elementos. (b) Desplazamiento máximo/volumen con el número de elementos

En las Figs. 6.26a y 6.26b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 6,56% y 6,05% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños presentan la misma topología y una forma similar. Sin embargo, aunque la compliance conseguida con el método MFAG-ig es un 9,15% mayor que la obtenida con el método MFAG-i, debido en parte, a una fracción de volumen un 8,43% menor, el diseño se ajusta de forma más exacta a la solución óptima con 4 nudos obtenida con el programa TTO (Figs. 6.26c y 6.26d).

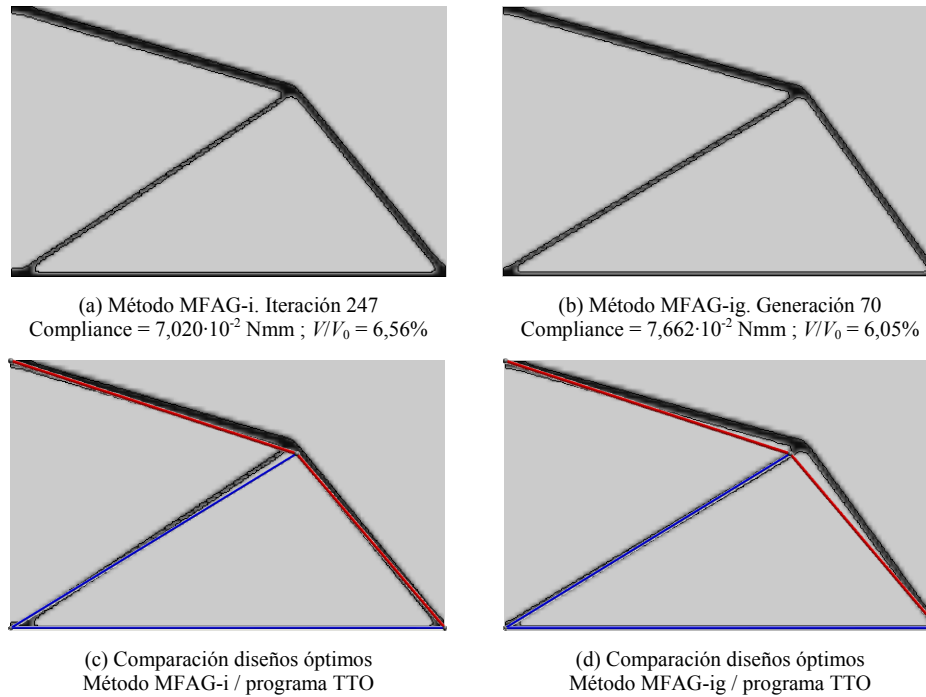


Figura 6.26 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 96×60 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Método MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO

En la tabla 6.11 se muestran los resultados finales de la optimización de topología conseguidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i para una malla de 96×60 elementos. Como se aprecia, la compliance, las relaciones entre las tensiones de Von Mises medias, y los desplazamientos máximos iniciales y finales obtenidos con el método MFAG-ig son mayores (9,16%, 0,29% y 9,24% respectivamente) que con el método MFAG-i. Por el contrario, la relación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima finales y la fracción de volumen son menores (13,90% y 8,20% respectivamente) que las obtenidas con el método MFAG-i.

Tabla 6.11 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 96×60 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|--|-----------------|-----------|--------------------|---------------|
| MFAG-i | 4,014 | 10,651 | 9,420 | $7,020 \cdot 10^{-2}$ | 0,066 | 0 | 247 | 324,21 |
| MFAG-ig | 3,524 | 10,682 | 10,291 | $7,662 \cdot 10^{-2}$ | 0,061 | 3 | 2800 | 2060,29 |

Las conclusiones que se extraen de la tabla 6.11 y de las Figs. 6.26c y 6.26d son, que con el método propuesto MFAG-ig se obtienen diseños ligeramente mejores y que se ajustan más a la solución discreta. Por el contrario, el tiempo total de la optimización es superior (6,35 veces) al invertido por el método MFAG-i.

En las gráficas de la Fig. 6.27 se comparan la evolución de la compliance (en forma normalizada) y de la fracción de volumen, con las generaciones y las iteraciones obtenidas con los métodos MFAG-ig y MFAG-i respectivamente.

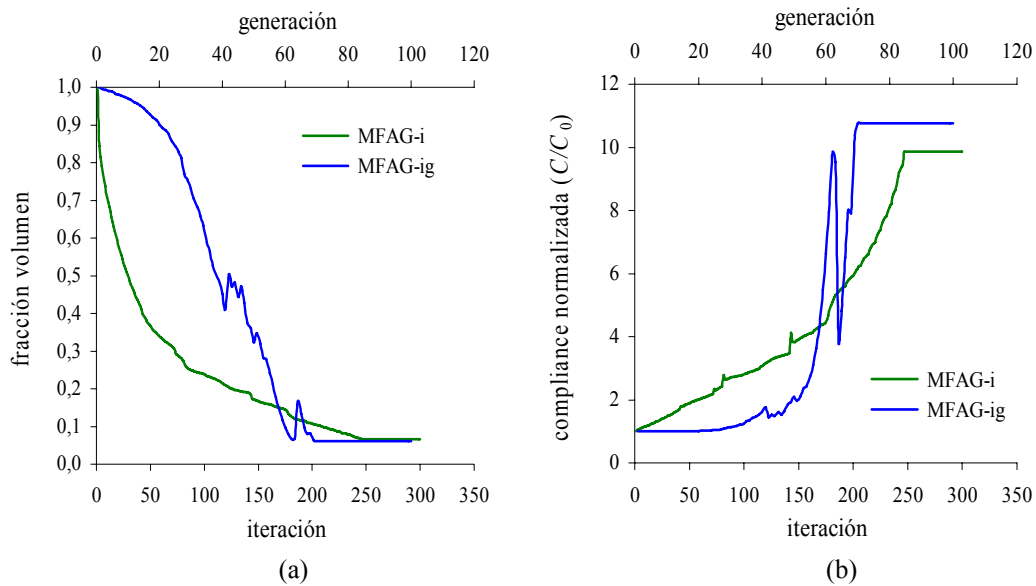


Figura 6.27 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre ($L/h = 1,6$). Malla de 96×60 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración

En la Fig. 6.27a se observa que el método MFAG-i reduce la fracción de volumen de forma más gradual que el método MFAG-ig, apreciando que hasta la generación 20 solo se reduce un 10% (65% con MFAG-i) el volumen, disminuyendo rápidamente hasta el 93,95% en la generación 70. En la Fig. 6.27b se aprecia que el valor de la compliance con el método MFAG-i aumenta con el número de iteraciones. Sin embargo, con el método MFAG-ig el valor de la compliance permanece constante hasta la generación 30, aumentando su valor (9,7 veces) rápidamente hasta la generación 70.

En las Figs. 6.28a a 6.28c se muestran los óptimos obtenidos con los métodos SIMP (ANSYS, 2005), funciones implícitas con regularización (Belytschko, Xiao, y Parimi, 2003) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 30%, 30%, y 23% respectivamente.

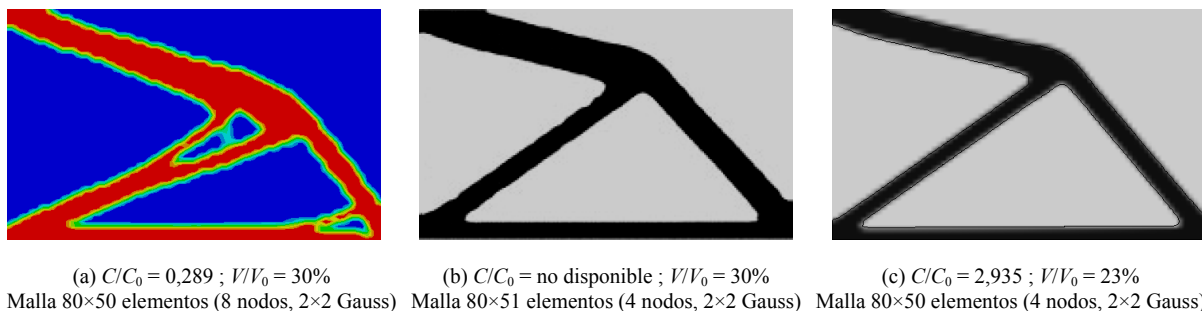


Figura 6.28 Voladizo con fuerza vertical en la fibra inferior del extremo libre. (a) Método SIMP. (b) Método funciones implícitas con regulación. (c) Método MFAG-ig

Como se observa en las Figs. 6.28, solamente las topologías óptimas obtenidas con los métodos MFAG-ig y funciones implícitas con regularización son similares, disponiendo en ambos casos la misma forma, número, y distribución de cavidades.

Conviene aclarar que la diferencia en la compliance (en forma normalizada) entre los métodos MFAG-ig y el método SIMP, se debe a que el proceso de optimización, en este último caso, es controlado por una función objetivo que intenta minimizar exclusivamente la compliance para una fracción de volumen.

La principal ventaja de los diseños obtenidos con el método MFAG-ig frente a los conseguidos con los métodos SIMP y funciones implícitas es la calidad con la que se definen las topologías finales. Aunque, en el caso del método de las funciones implícitas, el proceso de regularización permite que la topología presente formas suavizadas.

6.7.3 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior

El quinto ejemplo es una viga con apoyos fijos y una fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. La longitud del dominio de diseño es 200 mm, la altura 80 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 4840 elementos, 110 elementos en dirección longitudinal y 44 elementos en dirección transversal (Fig.6.29).

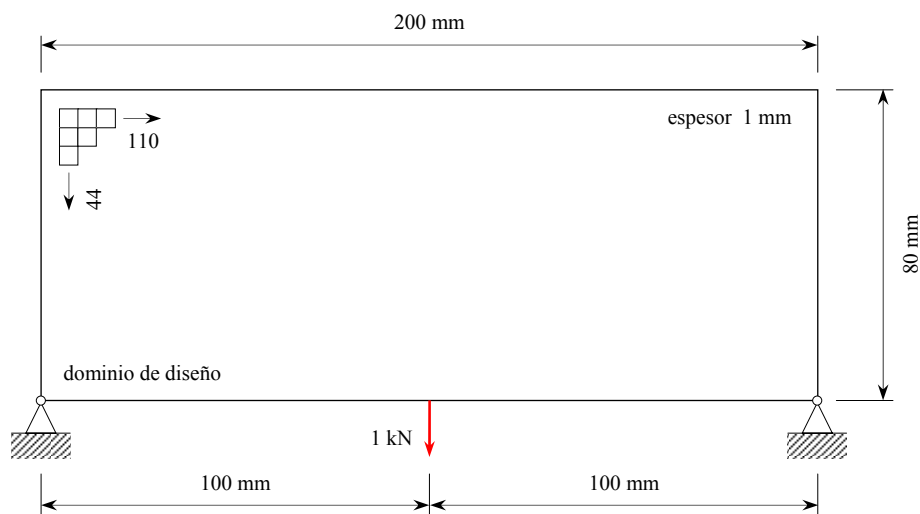


Figura 6.29 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño

En las Figs. 6.30 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 75, obteniendo el diseño óptimo en la generación 48.

En la tabla 6.12 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

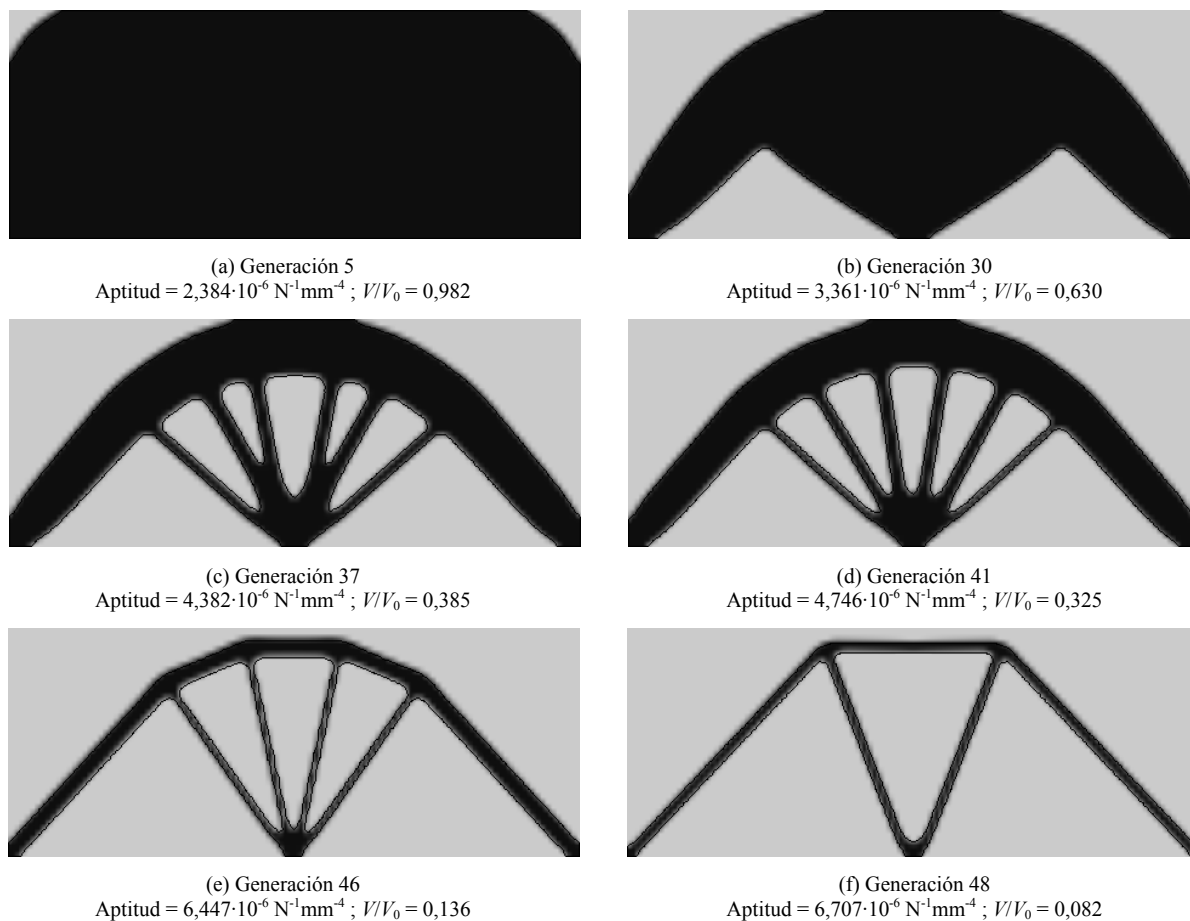


Figura 6.30 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones

Tabla 6.12 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_s} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($\text{N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$) |
|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------|---|---------------|--|
| 5 | 379,812 | 17,474 | 0,700 | $4,170 \cdot 10^{-2}$ | 0,982 | 26,692 | 48,290 | $2,384 \cdot 10^{-6}$ |
| 30 | 394,820 | 25,653 | 10,792 | $4,751 \cdot 10^{-2}$ | 0,630 | 29,522 | 319,120 | $3,361 \cdot 10^{-6}$ |
| 37 | 398,495 | 39,856 | 17,778 | $6,456 \cdot 10^{-2}$ | 0,385 | 37,058 | 400,470 | $4,382 \cdot 10^{-6}$ |
| 41 | 400,910 | 45,984 | 19,867 | $7,314 \cdot 10^{-2}$ | 0,325 | 40,563 | 447,540 | $4,746 \cdot 10^{-6}$ |
| 46 | 411,189 | 94,352 | 55,346 | $1,553 \cdot 10^{-1}$ | 0,136 | 71,045 | 508,220 | $6,447 \cdot 10^{-6}$ |
| 48 | 427,485 | 149,964 | 96,261 | $2,633 \cdot 10^{-1}$ | 0,082 | 113,150 | 531,770 | $6,707 \cdot 10^{-6}$ |

En las Figs. 6.31 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la aptitud, la compliance, y la fracción de volumen con las generaciones.

En la Fig. 6.31a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en los diseños iniciales (generación 5) se reduce significativamente al final de la optimización (542,59 y 4,44 veces respectivamente), aumentado un 758,21% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

Si se comparan los diseños inicial y final (ver tabla 6.12) se aprecia que el valor de la aptitud aumenta desde $2,384 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^4$ hasta $6,707 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^4$, lo que supone un incremento del 181,33% (Fig. 6.31b).

En la Fig. 6.31c se observa que el desplazamiento máximo es prácticamente constante hasta la generación 30 ($4,751 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$), aumentando hasta 5,54 veces en la generación 48 ($2,633 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$). Por el contrario, la fracción de volumen decrece de forma progresiva hasta la generación 30 (62,98%), disminuyendo hasta 7,65 veces en la generación 48 (8,23%).

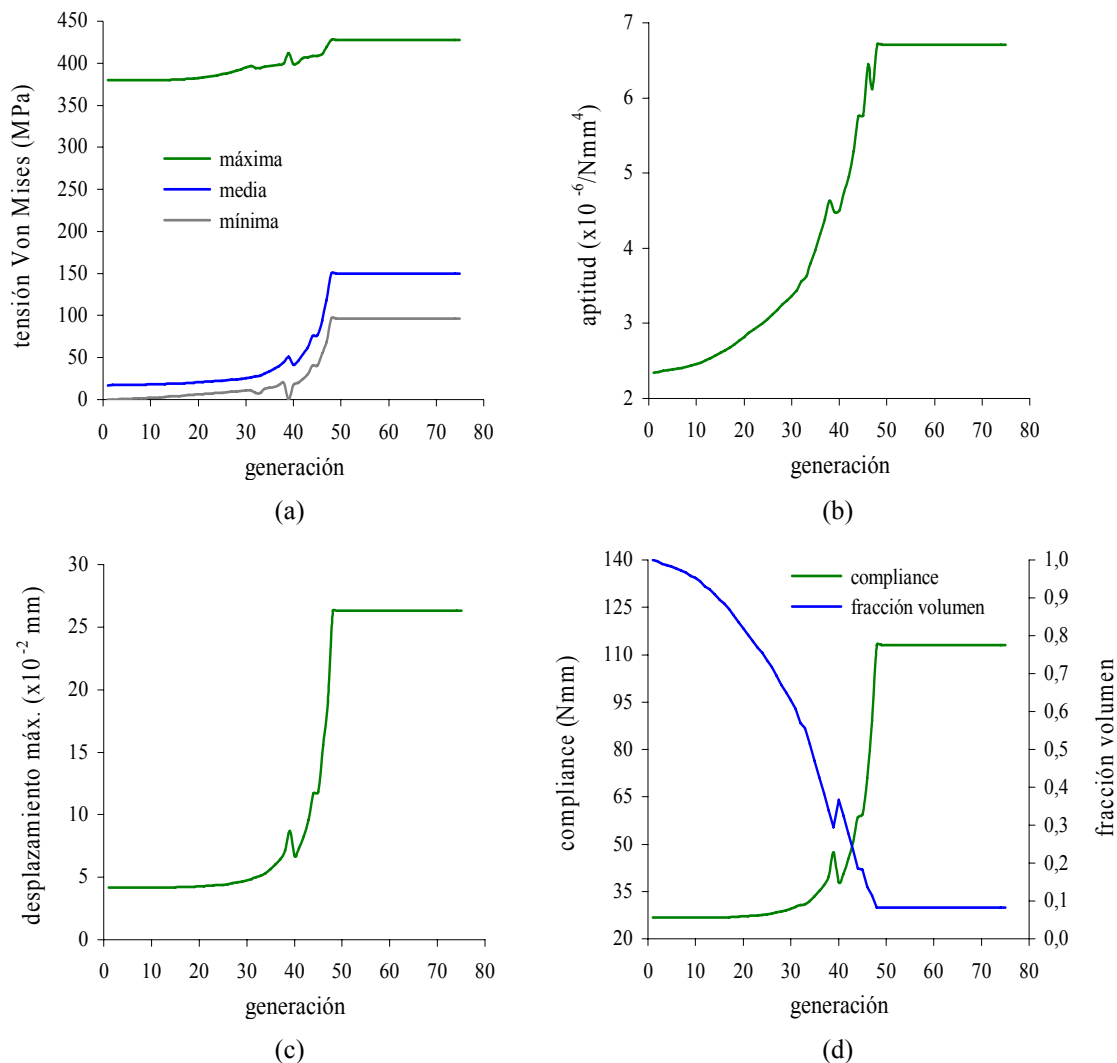


Figura 6.31 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/generación. (b) Evolución aptitud/generación. (c) Evolución desplazamiento máximo/generación. (d) Evolución compliance/fracción de volumen/generación

En las Figs. 6.32a y 6.32b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 18,85% y 18,28% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños muestran la misma topología y una forma similar. Sin embargo, aunque la compliance obtenida con el método MFAG-ig es un 2,68% mayor que la conseguida con el método MFAG-i, debido en parte, a una fracción de volumen un 3,12%

menor, el diseño se ajusta de forma más precisa a la solución óptima con 7 nudos conseguida con el programa TTO (Figs. 6.32c y 6.32d).

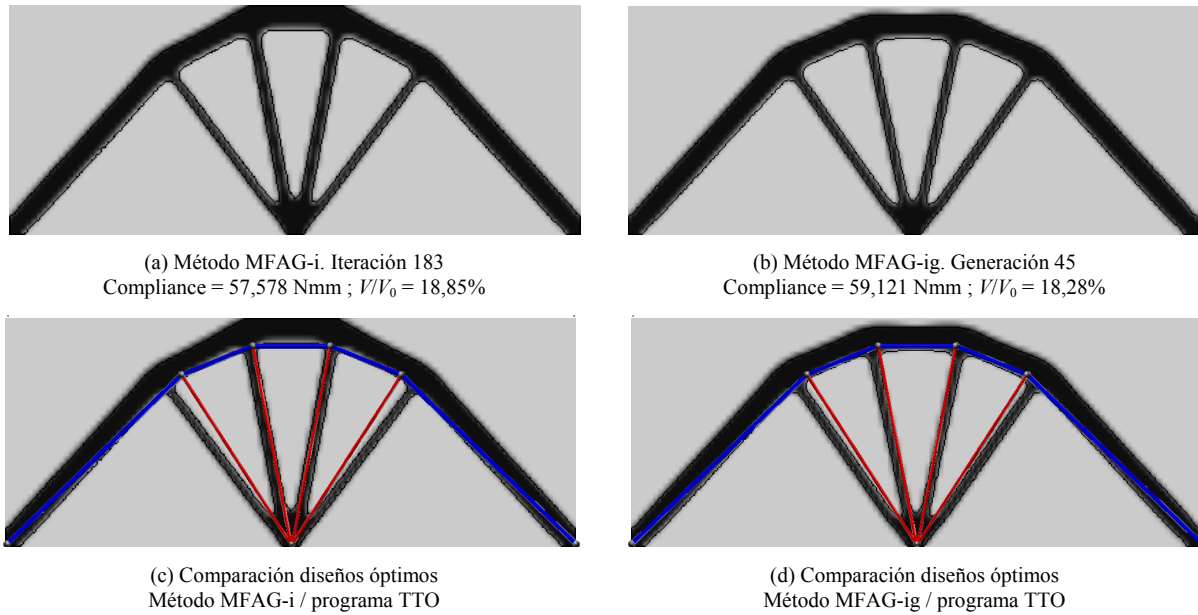


Figura 6.32 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Malla de 110×44 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Método MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO

En la tabla 6.13 se muestran los resultados finales de la optimización de topología obtenidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i. Como se aprecia, la compliance, las relaciones entre las tensiones de Von Mises medias, y los desplazamientos máximos iniciales y finales conseguidos con el método MFAG-ig son mayores (2,29, 1,98, y 2,28 veces respectivamente) que con el método MFAG-i. Por el contrario, la relación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima finales, y la fracción de volumen son menores (2,14 y 2,30 veces respectivamente) que las obtenidas con el método MFAG-i

Tabla 6.13 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|---|-----------------|-----------|-----------------|------------|
| MFAG-i | 9,488 | 4,432 | 2,762 | 57,578 | 0,189 | 0 | 183 | 195,73 |
| MFAG-ig | 4,441 | 8,775 | 6,314 | 131,657 | 0,082 | 1 | 960 | 531,77 |

Las conclusiones que se extraen de la tabla 6.13 y de las Figs. 6.32c y 6.32d son, que con el método propuesto MFAG-ig se obtienen diseños mejores y que se ajustan más a la solución discreta. Por el contrario, el tiempo total de la optimización es superior (2,72 veces) al invertido por el método MFAG-i.

En las gráficas de la Fig. 6.33 se comparan la evolución de la fracción de volumen y la compliance (en forma normalizada), con las generaciones y las iteraciones obtenidas con los métodos MFAG-ig y MFAG-i.

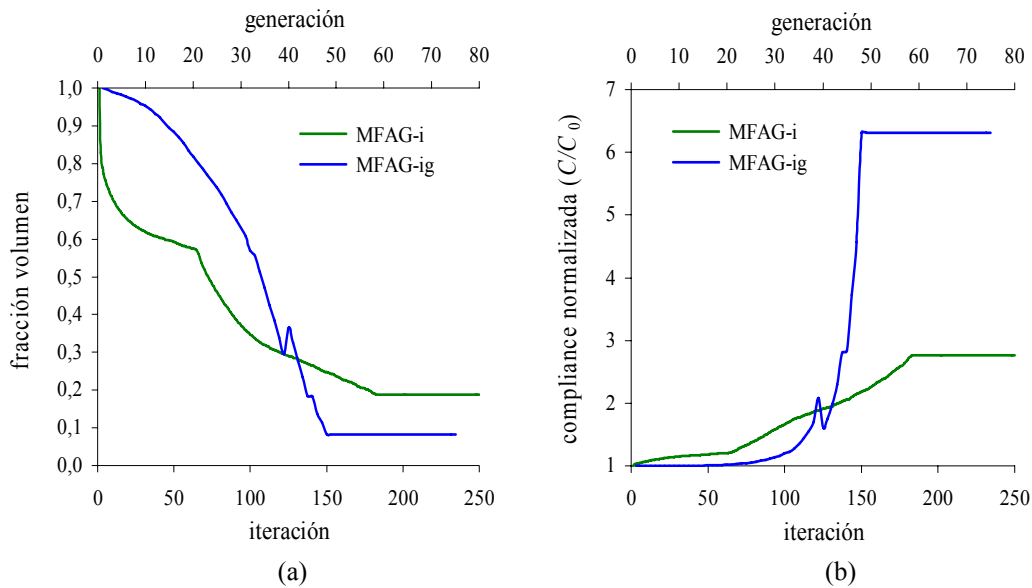


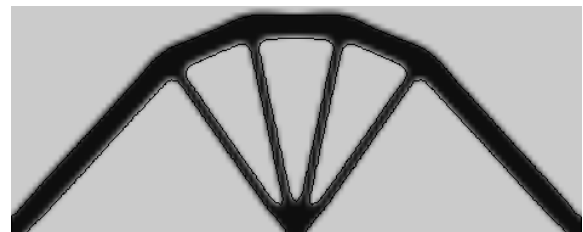
Figura 6.33 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior.(a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración

En la Fig. 6.33a se observa que el método MFAG-i reduce la fracción de volumen de forma más gradual que el método MFAG-ig, apreciando que hasta la generación 10 solo se reduce un 4,8% (38% con MFAG-i) el volumen, disminuyendo rápidamente hasta el 91,76% en la generación 48. En la Fig. 6.27b se aprecia que el valor de la compliance con el método MFAG-i aumenta progresivamente con el número de iteraciones. Sin embargo, con el método MFAG-ig el valor de la compliance permanece constante hasta la generación 25, aumentando su valor (6 veces) rápidamente hasta la generación 48.

En las Figs. 6.34a y 6.34b se muestran los óptimos conseguidos con los métodos multi-GA (Woon, Tong, Querin y Steven, 2003) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 20,37% y 18,28% respectivamente.



(a) Aptitud = $56,20 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^4$; Compliance = 54,50 Nmm
Malla de 104×44 elementos (4 nodos, 1×1 Gauss)



(b) Aptitud = $57,70 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^4$; Compliance = 59,27 Nmm
Malla de 110×44 elementos (4 nodos, 2×2 Gauss)

Figura 6.34 Viga con apoyos fijos y fuerza vertical centrada en la fibra inferior.
(a) Método multi-GA. (b) Método MFAG-ig

Como se observa en las Figs. 6.34, la topología obtenida con el método MFAG-ig es un 2,66% mejor que la conseguida con el método multi-GA. No obstante, los diseños obtenidos son similares, presentando la misma forma, número, y distribución de cavidades.

6.7.3.1 Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior

El sexto ejemplo es una viga con apoyos fijos y una fuerza inclinada 45° de 1 kN centrada en la fibra inferior. La longitud del dominio de diseño es 10 mm, la altura 5 mm, y el espesor 1 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 5000 elementos, 100 elementos en dirección longitudinal y 50 elementos en dirección transversal (Fig.6.35).

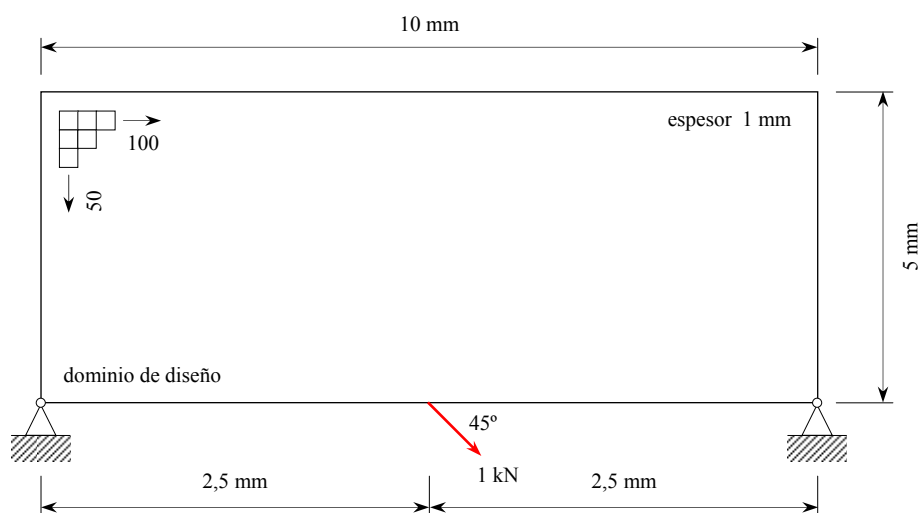


Figura 6.35 Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada 45° de 1 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño

En las Figs. 6.36 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 100, obteniendo el diseño óptimo en la generación 64.

En la tabla 6.14 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

En las Figs. 6.37a y 6.37b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 8,19% y 8,03% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños presentan la misma topología. Sin embargo, aunque la fracción de volumen obtenida con el método MFAG-i es solamente un 2% superior a la conseguida con el método MFAG-ig, las geometrías de los diseños son diferentes.

En la tabla 6.15 se muestran los resultados finales de la optimización de topología obtenidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i. Como se puede apreciar, los valores obtenidos en todos los estimadores son similares. Sin embargo, el método MFAG-ig presenta un coste computacional solo 2,88 veces mayor que el método MFAG-i, debido principalmente al mínimo número de refinamientos.

En las Figs. 6.38a y 6.38b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos ESO (Akin y Arjona-Baez, 2001) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 24,00% y 21,16% respectivamente.

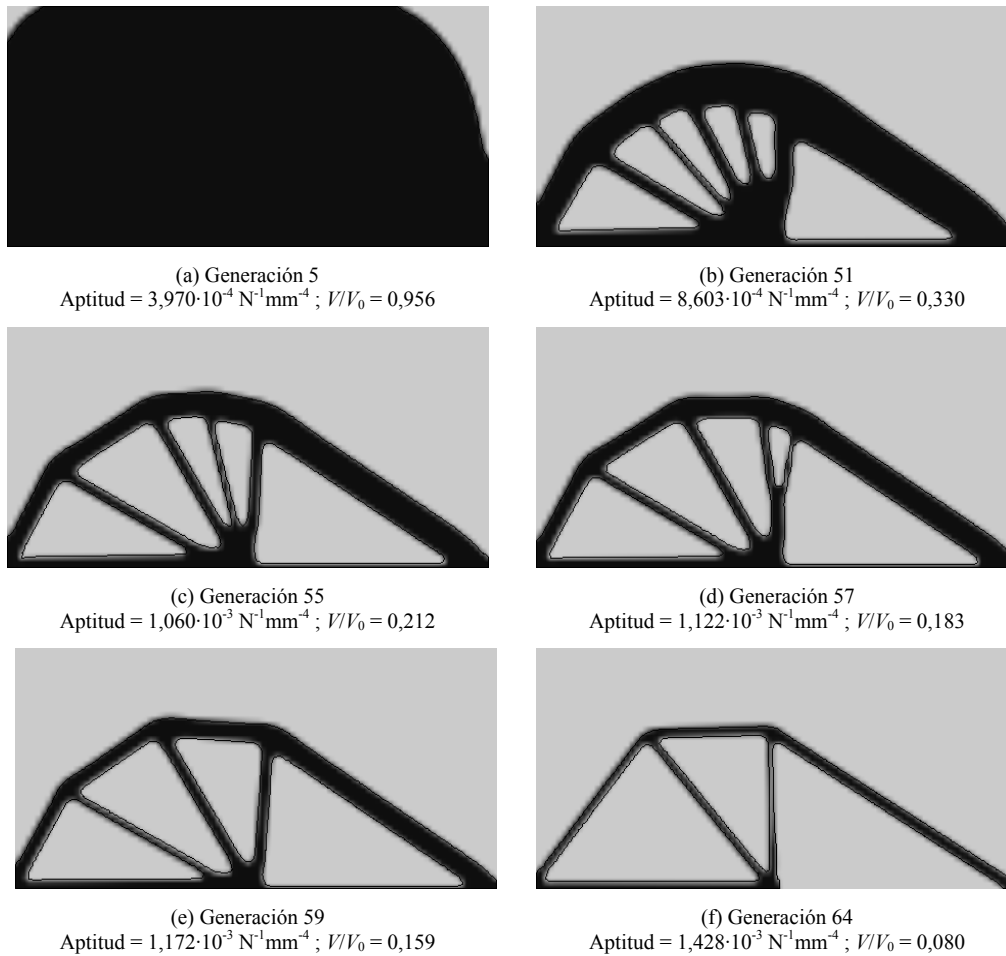


Figura 6.36 Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones

Tabla 6.14 Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_n} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($\text{N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$) |
|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------|---|---------------|--|
| 5 | $7,818 \cdot 10^3$ | $2,626 \cdot 10^2$ | $7,041 \cdot 10^0$ | $7,797 \cdot 10^{-2}$ | 0,956 | 52,692 | 52,01 | $3,970 \cdot 10^{-4}$ |
| 51 | $8,405 \cdot 10^3$ | $6,876 \cdot 10^2$ | $3,029 \cdot 10^2$ | $1,178 \cdot 10^{-1}$ | 0,330 | 70,373 | 593,97 | $8,603 \cdot 10^{-4}$ |
| 55 | $8,350 \cdot 10^3$ | $8,792 \cdot 10^2$ | $4,174 \cdot 10^2$ | $1,644 \cdot 10^{-1}$ | 0,212 | 89,144 | 644,67 | $1,060 \cdot 10^{-3}$ |
| 57 | $8,190 \cdot 10^3$ | $1,154 \cdot 10^3$ | $5,535 \cdot 10^2$ | $1,854 \cdot 10^{-1}$ | 0,183 | 97,336 | 670,65 | $1,122 \cdot 10^{-3}$ |
| 59 | $8,005 \cdot 10^3$ | $1,307 \cdot 10^3$ | $6,721 \cdot 10^2$ | $2,090 \cdot 10^{-1}$ | 0,159 | 107,363 | 696,89 | $1,172 \cdot 10^{-3}$ |
| 64 | $7,519 \cdot 10^3$ | $2,291 \cdot 10^3$ | $1,402 \cdot 10^3$ | $4,213 \cdot 10^{-1}$ | 0,080 | 174,503 | 761,37 | $1,428 \cdot 10^{-3}$ |

Como se puede observar en las Figs. 6.38a y 6.38b, las topologías óptimas obtenidas son similares, presentando el mismo número de cavidades, aunque sus formas y distribución resultan diferentes.

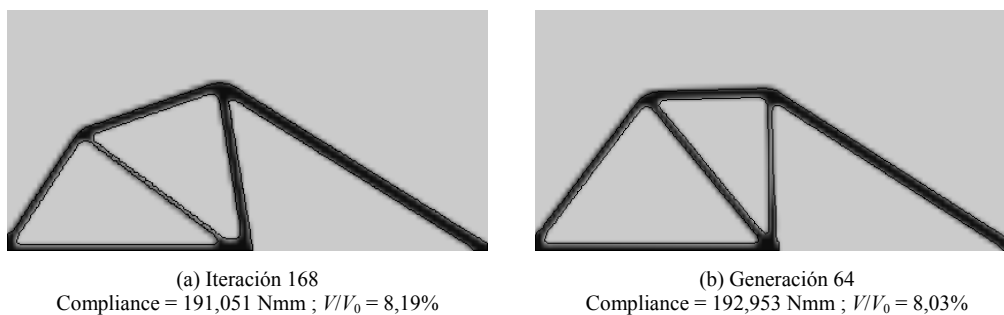


Figura 6.37 Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior.
(a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig

Tabla 6.15 Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|--|-----------------|-----------|--------------------|---------------|
| MFAG-i | 5,371 | 9,067 | 5,289 | 191,051 | 0,082 | 0 | 168 | 264,49 |
| MFAG-ig | 5,363 | 9,164 | 5,403 | 192,953 | 0,080 | 1 | 1280 | 761,37 |

El diseño que se muestra en la Fig. 6.38a está basado en el método ESO clásico. La principal aportación de esta nueva implementación es el aumento de calidad en las soluciones. Para ello, se introducen en el algoritmo de optimización, estimadores de errores locales y filtros que evitan algunos de los problemas asociados al método ESO, como los conjuntos de elementos en forma de cadenas (fuentes de inestabilidades geométricas). Aunque, sigue siendo necesario interpretar la topología para proponer un diseño final.

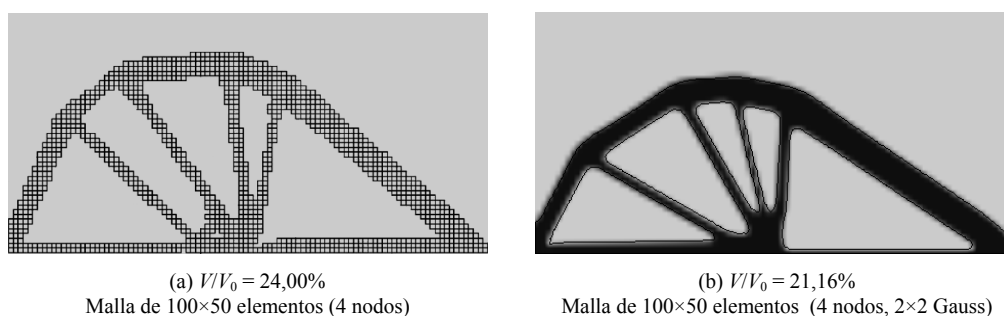


Figura 6.38 Viga con apoyos fijos y fuerza inclinada centrada en la fibra inferior. Malla de 100×50 elementos. (a) Método ESO. (b) Método MFAG-ig

6.7.3.2 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior

El séptimo ejemplo es una viga con una carga vertical de 100 kN en el centro de la fibra inferior, y está soportada por dos apoyos situados en sus bordes inferiores, uno de los cuales es de tipo deslizante. La longitud del dominio de diseño es 4000 mm, la altura 2000 mm, y el espesor 10 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 7200 elementos, 120 en dirección longitudinal y 60 en dirección transversal (Fig. 6.39).

En las Figs. 6.40 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 75, obteniendo el diseño óptimo en la generación 59.

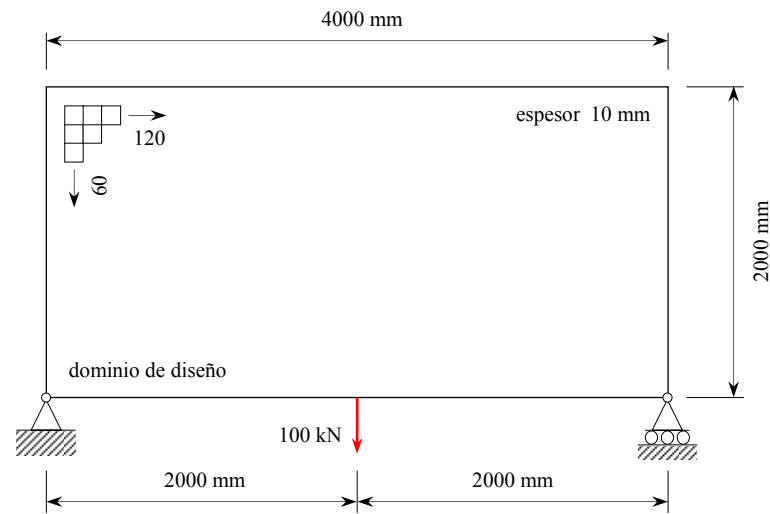


Figura 6.39 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical de 100 kN centrada en la fibra inferior. Dominio de diseño

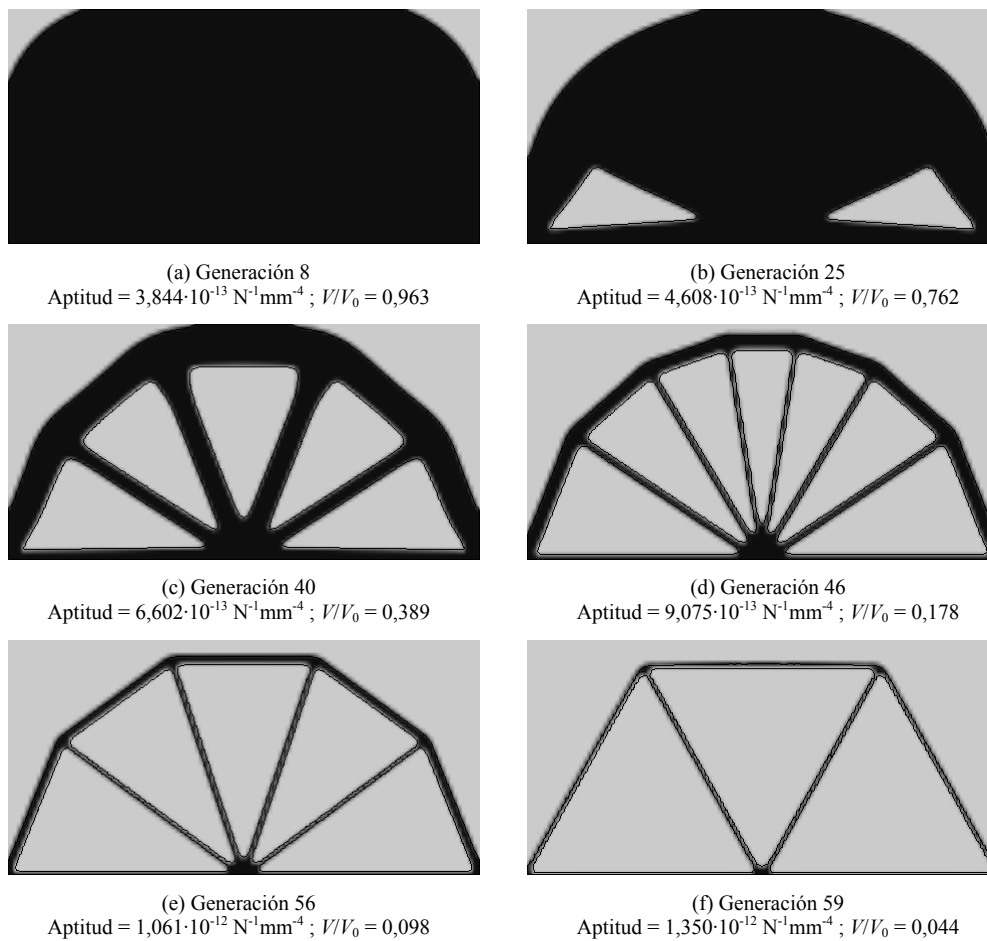


Figura 6.40 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Topologías óptimas para diferentes generaciones

En la tabla 6.16 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

Tabla 6.16 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_n} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------|-----------------|---|---------------|--------------------------------|
| 8 | 217,404 | 8,595 | 1,157 | 0,527 | 0,963 | $3,376 \cdot 10^4$ | 209,42 | $3,844 \cdot 10^{-13}$ |
| 25 | 217,367 | 10,620 | 5,164 | 0,568 | 0,762 | $3,562 \cdot 10^4$ | 693,94 | $4,608 \cdot 10^{-13}$ |
| 40 | 217,187 | 20,076 | 8,807 | 0,845 | 0,389 | $4,873 \cdot 10^4$ | 1146,80 | $6,602 \cdot 10^{-13}$ |
| 46 | 216,724 | 36,814 | 21,136 | 1,576 | 0,178 | $7,743 \cdot 10^4$ | 1341,80 | $9,075 \cdot 10^{-13}$ |
| 56 | 216,167 | 58,568 | 39,139 | 2,836 | 0,098 | $1,201 \cdot 10^5$ | 1675,74 | $1,061 \cdot 10^{-12}$ |
| 59 | 221,974 | 89,451 | 72,718 | 7,527 | 0,044 | $2,111 \cdot 10^5$ | 1775,80 | $1,350 \cdot 10^{-12}$ |

En las Figs. 6.41a y 6.41b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 20,36% y 20,50% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños presentan la misma topología. Sin embargo, aunque la fracción de volumen obtenida con el método MFAG-i es solamente un 0,7% inferior a la conseguida con el método MFAG-ig, las geometrías de los diseños son ligeramente diferentes.

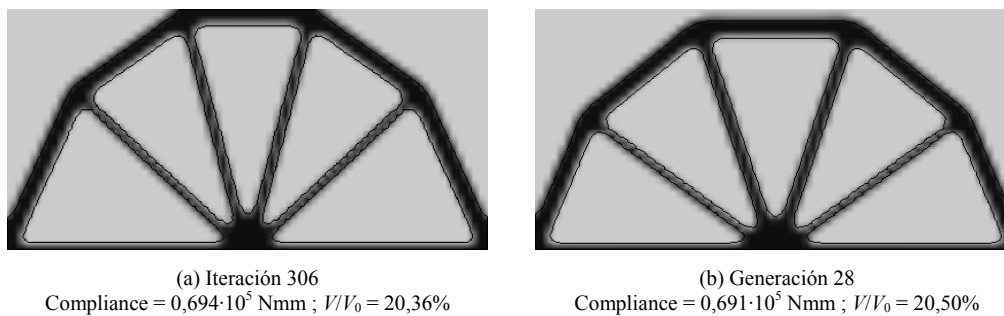


Figura 6.41 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Malla de 70×35 elementos (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig

En la tabla 6.17 se muestran los resultados finales de la optimización de topología obtenidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i. Como se puede apreciar, los valores obtenidos en todos los estimadores (excepto el tiempo de optimización) con el método MFAG-i son mayores que los conseguidos con el método MFAG-ig.

Tabla 6.17 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior. Malla de 70×35 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|--|-----------------|-----------|--------------------|---------------|
| MFAG-i | 6,129 | 4,045 | 3,087 | $7,427 \cdot 10^4$ | 0,191 | 0 | 311 | 161,21 |
| MFAG-ig | 3,184 | 6,574 | 7,131 | $1,717 \cdot 10^5$ | 0,093 | 2 | 1110 | 276,88 |

Sin embargo, el método MFAG-ig presenta un coste computacional solo 1,72 veces mayor que el método MFAG-i, debido principalmente al reducido número de elementos finitos y a un número mínimo de generaciones.

En las Figs. 6.42a y 6.42b se muestran los óptimos conseguidos con los métodos PBO (Liang y Steven, 2002) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 21,97% y 21,62% respectivamente.

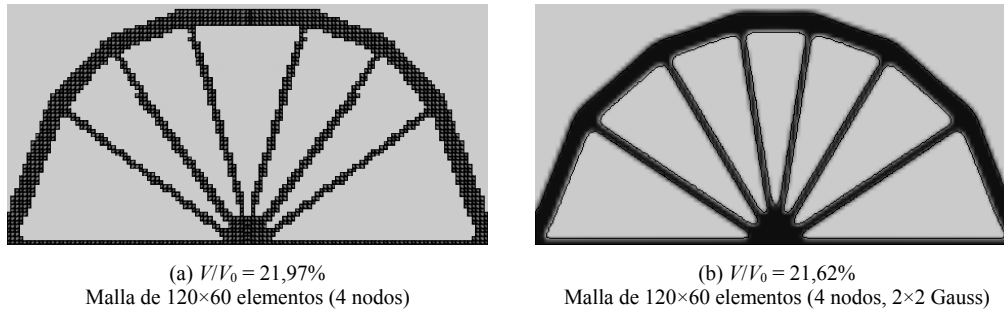


Figura 6.42 Viga con apoyo deslizante y fuerza vertical centrada en la fibra inferior.
(a) Método PBO. (b) Método MFAG-ig

En las Figs. 6.42a y 6.42b se puede observar, que las topologías óptimas obtenidas son similares, presentando el mismo número de cavidades, aunque sus formas y distribución resultan diferentes. Además, en la Fig. 6.42a se aprecia uno de los problemas asociados a los métodos basados en ESO, la necesidad de interpretar la topología para proponer un diseño final construible.

6.7.4 Viga MBB

El octavo ejemplo es una viga con una fuerza vertical de 1 kN en el centro de la fibra superior, y está soportada por dos apoyos situados en sus bordes inferiores, uno de los cuales es de tipo deslizante. La longitud del dominio de diseño es 900 mm, la altura 150 mm, y el espesor 1 mm. Para estudiar el efecto del tamaño de los elementos en la solución final, se han utilizado mallas de 90×15 (1350) elementos, 120×20 (2400) elementos, y 180×30 (5400) elementos (Fig. 6.43).

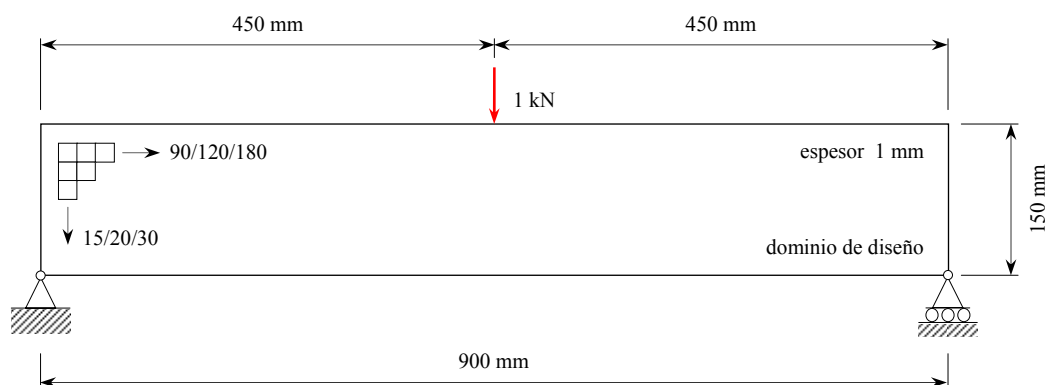


Figura 6.43 Viga MBB. Dominio de diseño

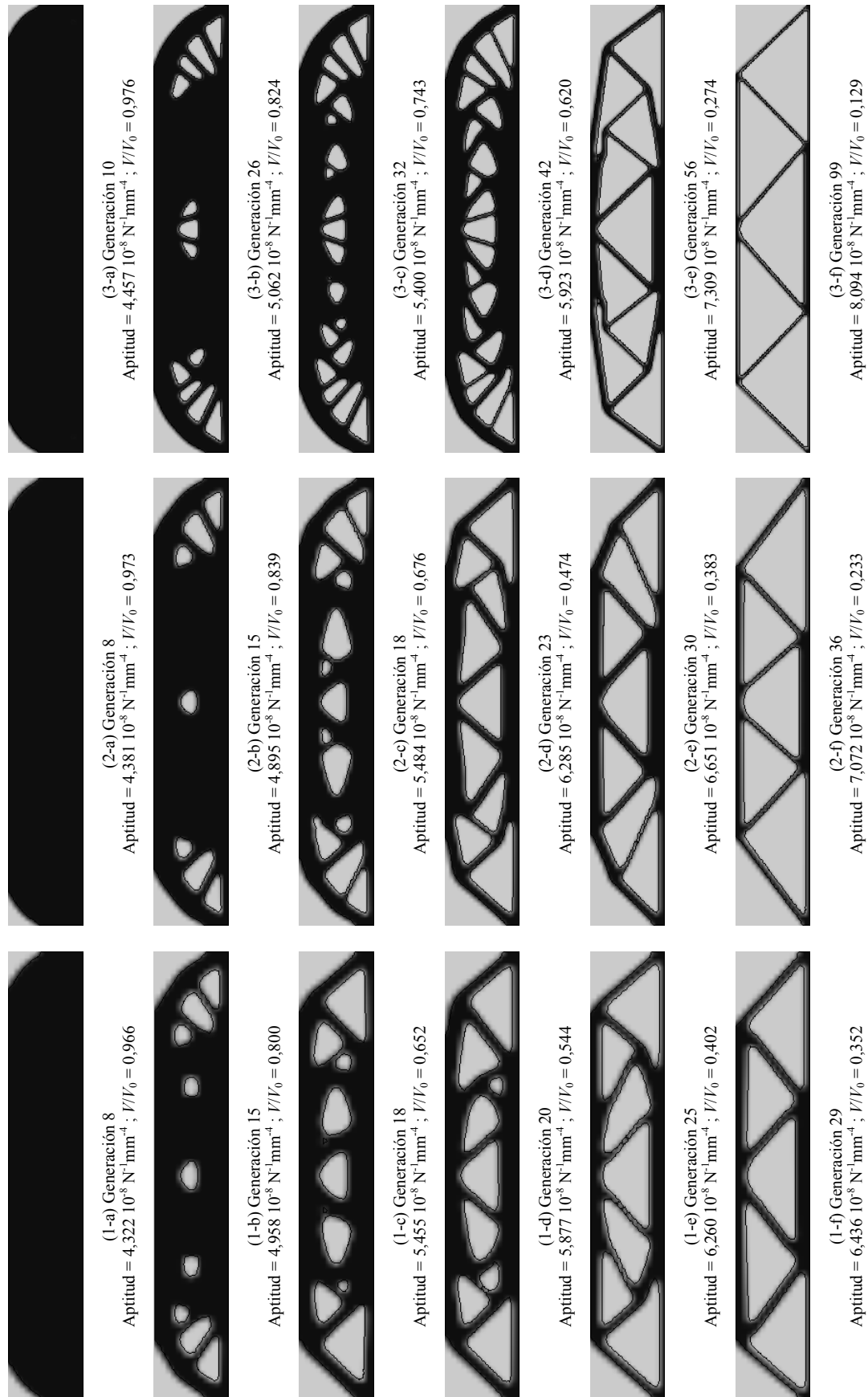


Figura 6.44 Viga MBB. De izquierda a derecha, mallas de 90×15 , 120×60 y 180×30 elementos. Topologías óptimas para diferentes generaciones

En las Figs. 6.44 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización, para cada una de las mallas estudiadas. El número máximo de generaciones es 125, obteniendo el diseño óptimo en la generación 29 en el caso de la malla de 90×15 elementos, en la generación 36 para la malla de 120×20 , y en la generación 99 para la malla de 180×30 elementos.

En la tabla 6.18 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones y para cada una de las mallas.

Tabla 6.18 Viga MBB. Resultados para diferentes mallas y generaciones

| Malla | g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | $\frac{V}{V_0}$ | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^n C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|--------|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------|---|---------------|--------------------------------|
| 90×15 | 8 | 84,199 | 19,368 | 4,933 | $2,976 \cdot 10^{-1}$ | 0,966 | $1,774 \cdot 10^2$ | 24,18 | $4,322 \cdot 10^{-8}$ |
| | 15 | 86,156 | 22,639 | 7,488 | $3,189 \cdot 10^{-1}$ | 0,800 | $1,868 \cdot 10^2$ | 47,94 | $4,958 \cdot 10^{-8}$ |
| | 18 | 91,652 | 26,822 | 11,063 | $3,624 \cdot 10^{-1}$ | 0,652 | $2,083 \cdot 10^2$ | 59,02 | $5,455 \cdot 10^{-8}$ |
| | 20 | 100,178 | 30,583 | 14,293 | $4,114 \cdot 10^{-1}$ | 0,544 | $2,316 \cdot 10^2$ | 66,77 | $5,877 \cdot 10^{-8}$ |
| | 25 | 125,341 | 37,287 | 19,444 | $5,365 \cdot 10^{-1}$ | 0,402 | $2,945 \cdot 10^2$ | 86,36 | $6,260 \cdot 10^{-8}$ |
| | 29 | 121,455 | 43,203 | 22,834 | $5,872 \cdot 10^{-1}$ | 0,352 | $3,271 \cdot 10^2$ | 101,58 | $6,436 \cdot 10^{-8}$ |
| 120×20 | 8 | 103,520 | 19,121 | 3,598 | $3,000 \cdot 10^{-1}$ | 0,973 | $1,738 \cdot 10^2$ | 48,49 | $4,381 \cdot 10^{-8}$ |
| | 15 | 104,782 | 21,729 | 6,692 | $3,144 \cdot 10^{-1}$ | 0,839 | $1,803 \cdot 10^2$ | 94,48 | $4,895 \cdot 10^{-8}$ |
| | 18 | 108,085 | 26,023 | 8,695 | $3,563 \cdot 10^{-1}$ | 0,676 | $1,998 \cdot 10^2$ | 115,31 | $5,484 \cdot 10^{-8}$ |
| | 23 | 117,547 | 34,878 | 15,644 | $4,561 \cdot 10^{-1}$ | 0,474 | $2,489 \cdot 10^2$ | 151,99 | $6,285 \cdot 10^{-8}$ |
| | 30 | 128,823 | 41,590 | 20,755 | $5,467 \cdot 10^{-1}$ | 0,383 | $2,910 \cdot 10^2$ | 204,65 | $6,651 \cdot 10^{-8}$ |
| | 36 | 175,853 | 61,185 | 35,567 | $8,555 \cdot 10^{-1}$ | 0,233 | $4,502 \cdot 10^2$ | 249,89 | $7,072 \cdot 10^{-8}$ |
| 180×30 | 10 | 144,928 | 18,919 | 3,133 | $3,034 \cdot 10^{-1}$ | 0,976 | $1,703 \cdot 10^2$ | 164,68 | $4,457 \cdot 10^{-8}$ |
| | 26 | 145,505 | 22,003 | 6,949 | $3,196 \cdot 10^{-1}$ | 0,824 | $1,777 \cdot 10^2$ | 446,59 | $5,062 \cdot 10^{-8}$ |
| | 32 | 146,687 | 23,999 | 7,462 | $3,351 \cdot 10^{-1}$ | 0,743 | $1,846 \cdot 10^2$ | 554,44 | $5,400 \cdot 10^{-8}$ |
| | 42 | 150,697 | 27,674 | 10,934 | $3,724 \cdot 10^{-1}$ | 0,620 | $2,016 \cdot 10^2$ | 747,40 | $5,923 \cdot 10^{-8}$ |
| | 56 | 199,004 | 54,116 | 27,392 | $7,293 \cdot 10^{-1}$ | 0,274 | $3,695 \cdot 10^2$ | 1044,88 | $7,309 \cdot 10^{-8}$ |
| | 99 | 290,963 | 99,721 | 60,171 | $1,494 \cdot 10^0$ | 0,129 | $7,070 \cdot 10^2$ | 1893,64 | $8,094 \cdot 10^{-8}$ |

En las Figs. 6.45 se muestran la evolución del desplazamiento máximo y la tensión de Von Mises media con las generaciones.

En la Fig. 6.45a se observa que los diseños óptimos finales obtenidos con las mallas de 120×20 y 90×15 elementos presentan desplazamientos máximos inferiores (74,63% y 154,43% respectivamente), que el obtenido con la malla de 180×30 elementos. De la misma forma, los diseños óptimos finales conseguidos con las mallas de 120×20 y 90×15 elementos presentan tensiones de Von Mises medias inferiores (62,98% y 130,82% respectivamente), a la obtenida con la malla de 192×120 elementos (Fig. 6.45b).

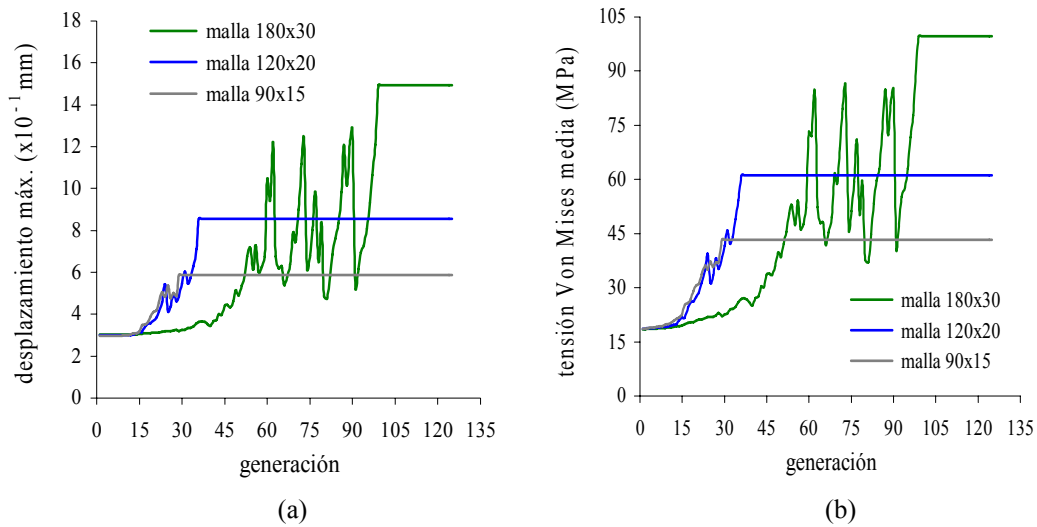


Figura 6.45 Viga MBB. (a) Evolución desplazamiento máximo/generación. (b) Tensión de Von Mises media/generación

En las gráficas de la Fig. 6.46 se comparan la evolución de la aptitud, la compliance, el volumen, y el desplazamiento máximo con el número de elementos.

En la Figs. 6.46b se observa que los valores finales de la aptitud y la compliance aumentan su valor con el número de elementos. En la Fig. 6.46a se aprecia que el volumen final del diseño decrece rápidamente hasta 2500 elementos, volviendo a decrecer aunque de forma más gradual hasta 5500 elementos. Por el contrario, los valores del desplazamiento máximo (al igual que la compliance, Fig. 6.46b) aumentan de forma progresiva conforme el número de elementos es mayor.

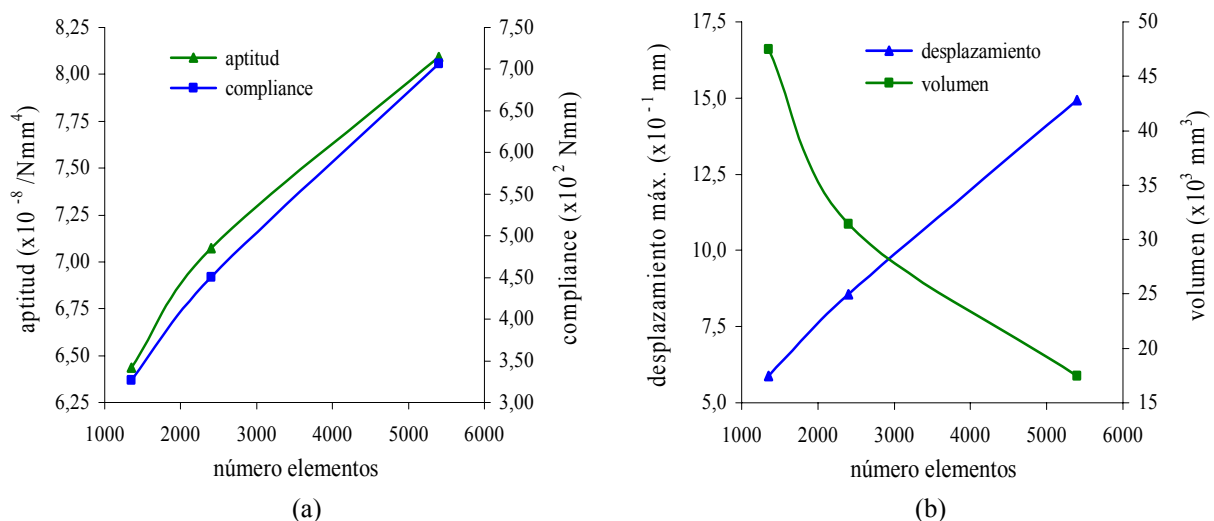


Figura 6.46 Viga MBB. (a) Evolución aptitud/compliance con el número de elementos. (b) Desplazamiento máximo/volumen con el número de elementos

En las gráficas de la Fig. 6.47 se comparan la evolución de la función de aptitud, la compliance, y la fracción de volumen con el tiempo y las generaciones.

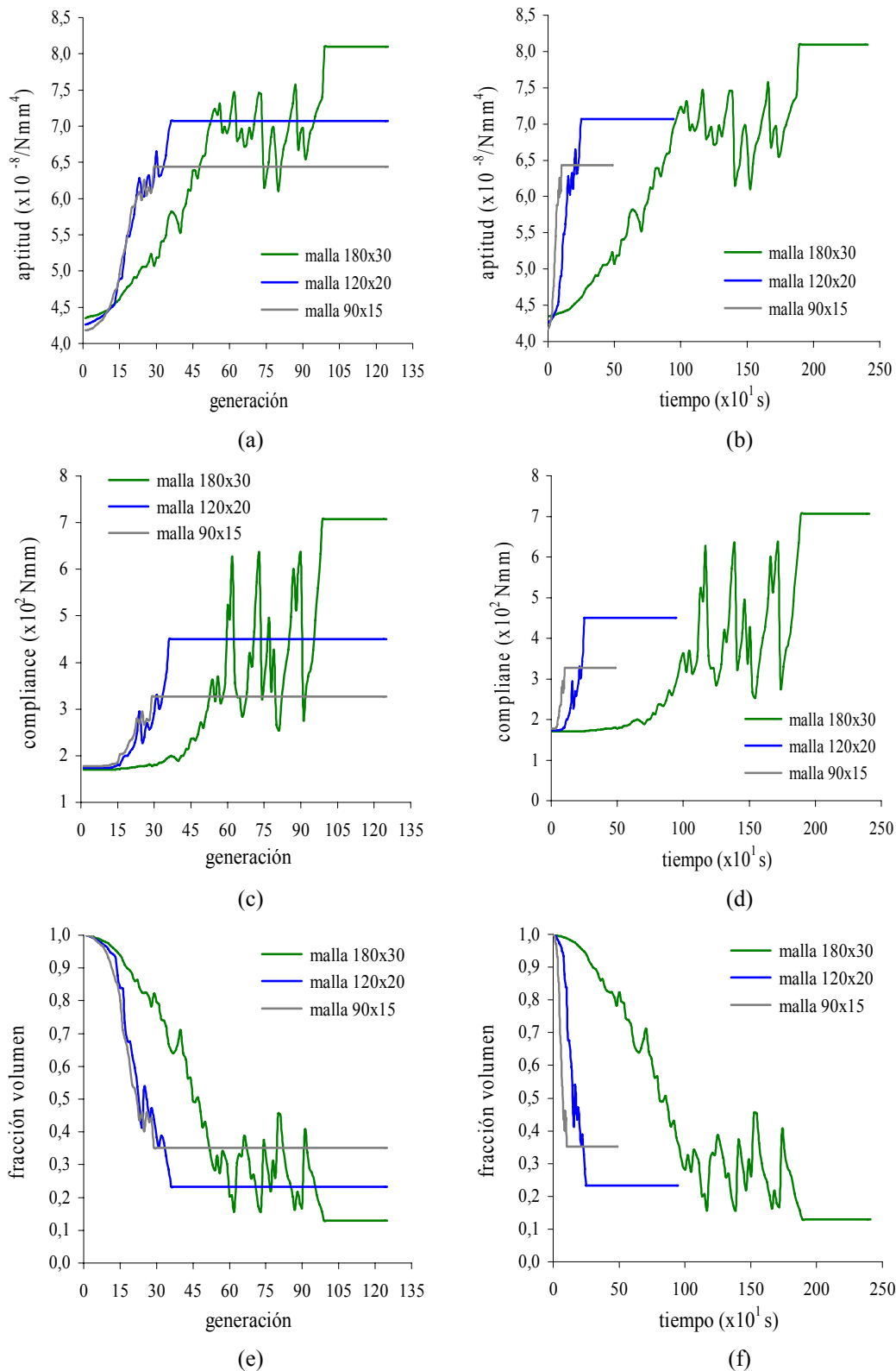


Figura 6.47 Viga MBB. (a) Evolución aptitud/generación. (b) Evolución aptitud/tiempo. (c) Evolución compliance/generación. (d) Evolución compliance/tiempo. (e) Evolución fracción de volumen/generación. (f) Evolución fracción de volumen/tiempo

En la Fig. 6.47a se puede apreciar que los diseños óptimos finales obtenidos con las mallas de 180×30 y 120×20 elementos son mejores (aptitudes un 25,76% y un 9,88% mayores

respectivamente) que el conseguido con la malla de 90×15 elementos, aunque los tiempos totales de optimización en los dos primeros casos son mayores (18,64 y 2,46 veces respectivamente) que el invertido con la malla de 90×15 elementos (ver tabla 6.18), coste computacional que se refleja en las Figs. 6.47b, 6.47d y 6.47f.

En la Fig. 6.47c se muestra que los diseños óptimos finales conseguidos con las mallas de 180×30 y 120×20 elementos son menos rígidos (116,14% y 37,63% respectivamente) que el obtenido con la malla de 90×15 elementos, aunque las fracciones de volumen en los dos primeros casos son menores (172,87% y 51,07% respectivamente) que la conseguida con la malla de 90×15 elementos (Fig. 6.47e).

En las Figs. 6.48a y 6.48b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 12,08% y 12,94% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños presentan la misma topología y una forma similar. Y en las Figs. 6.48c y 6.48d se comparan, los diseños conseguidos con la solución óptima de 7 nudos obtenida con el programa TTO, observando solo pequeñas diferencias en las geometrías, debido a las diferentes rigideces que se presentan en los nudos.

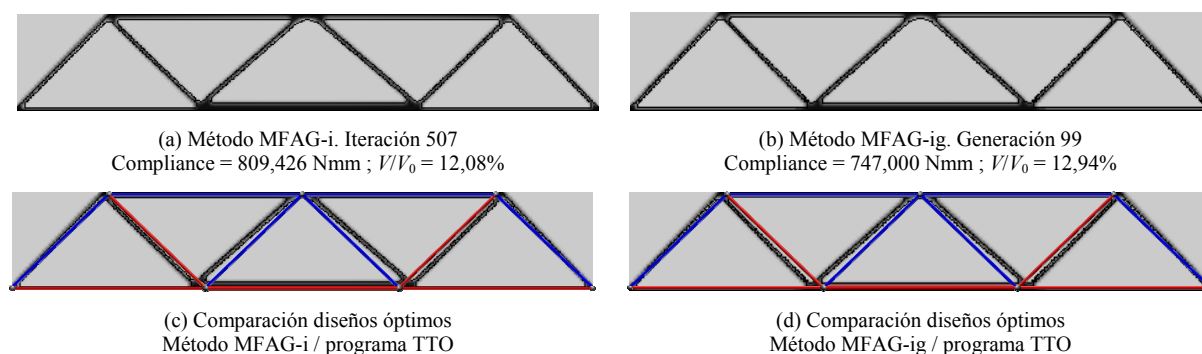


Figura 6.48 Viga MBB. Malla de 180×30 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig. (c) Método MFAG-i/programa TTO. (d) Método MFAG-ig/programa TTO

En la tabla 6.19 se muestran los resultados finales de la optimización conseguidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i para una malla de 180×30 elementos. Como se aprecia, la compliance, las relaciones entre las tensiones de Von Mises medias, y los desplazamientos máximos iniciales y finales obtenidos con el método MFAG-i son mayores (8,36%, 4,47%, y 8,44% respectivamente) que con el método MFAG-ig. Por el contrario, la relación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima finales y la fracción de volumen son menores (4,86% y 6,61% respectivamente) que las obtenidas con el método MFAG-ig.

Tabla 6.19 Viga MBB. Malla de 180×30 elementos. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|---|-----------------|-----------|-----------------|------------|
| MFAG-i | 4,611 | 5,653 | 5,343 | 809,426 | 0,121 | 0 | 507 | 671,01 |
| MFAG-ig | 4,835 | 5,411 | 4,927 | 747,000 | 0,129 | 2 | 2970 | 1893,64 |

Las conclusiones que se extraen de la tabla 6.19, y de las Figs. 6.48c y 6.48d son, que con el método propuesto MFAG-ig se obtienen diseños más rígidos. Sin embargo, el tiempo total de la optimización es superior (2,82 veces) al invertido por el método MFAG-i.

En las gráficas de la Fig. 6.49 se comparan la evolución de la compliance (en forma normalizada) y de la fracción de volumen, con las generaciones y las iteraciones obtenidas con los métodos MFAG-ig y MFAG-i respectivamente.

En la Fig. 6.49a se observa que el método MFAG-i reduce la fracción de volumen de forma más gradual que el método MFAG-ig. En la Fig. 6.49b se aprecia que el valor de la compliance con el método MFAG-i y MFAG-ig aumenta rápidamente. Sin embargo, la evolución con el método MFAG-ig se desarrolla de forma más errática.

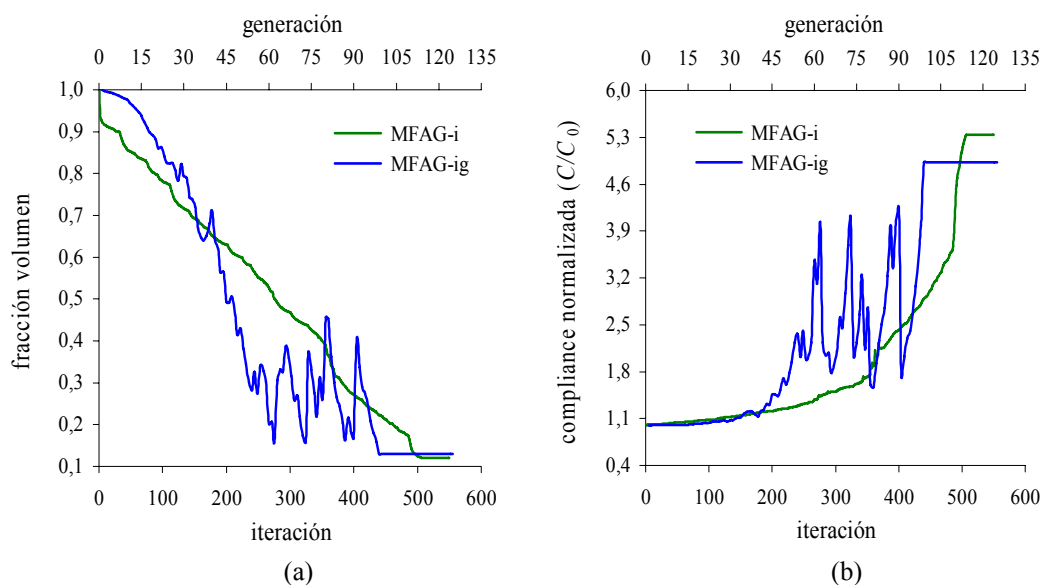


Figura 6.49 Viga MBB. Malla de 180×30 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración

En las Figs. 6.50 se muestran los óptimos conseguidos con los métodos multi-GA (Woon, 2002) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 58,10% y 58,74% respectivamente.

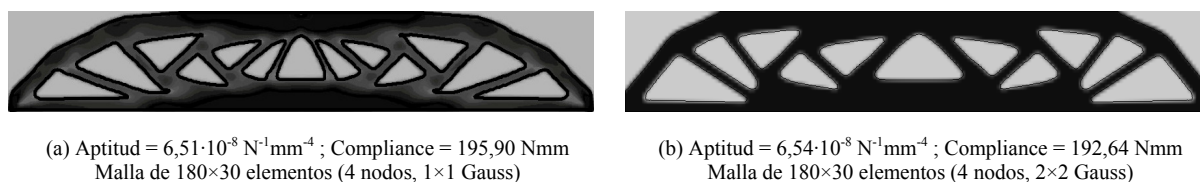


Figura 6.50 Viga MBB. (a) Método multi-GA. (b) Método MFAG-ig

Como se observa en las Figs. 6.50, aunque la fracción de volumen obtenida con el método MFAG-ig es un 1,02% mayor que la alcanzada en el óptimo final con el método multi-GA, el diseño obtenido con el método MFAG-ig es mejor (aptitud un 0,46% mayor) que el conseguido con el método multi-GA. No obstante, los diseños conseguidos con ambos métodos son similares, aunque no presentan el mismo número (15 y 13 respectivamente), forma y distribución de cavidades.

6.7.5 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida

En este ejemplo, el método MFAG-ig es utilizado para encontrar el diseño óptimo para la estructura de un puente sometido a una fuerza vertical uniformemente repartida. La longitud del dominio de diseño es 180000 mm, la altura 60000 mm, y el espesor 300 mm (Fig. 6.51). El dominio de diseño se ha dividido en 24300 elementos, 270 en dirección longitudinal y 90 en dirección transversal. Las 6 seis filas de elementos (4000 mm) por debajo de la línea de carga son tratadas como elementos fijos (reales indefinidamente), y representan el tablero del puente (no sujeto al proceso de optimización).

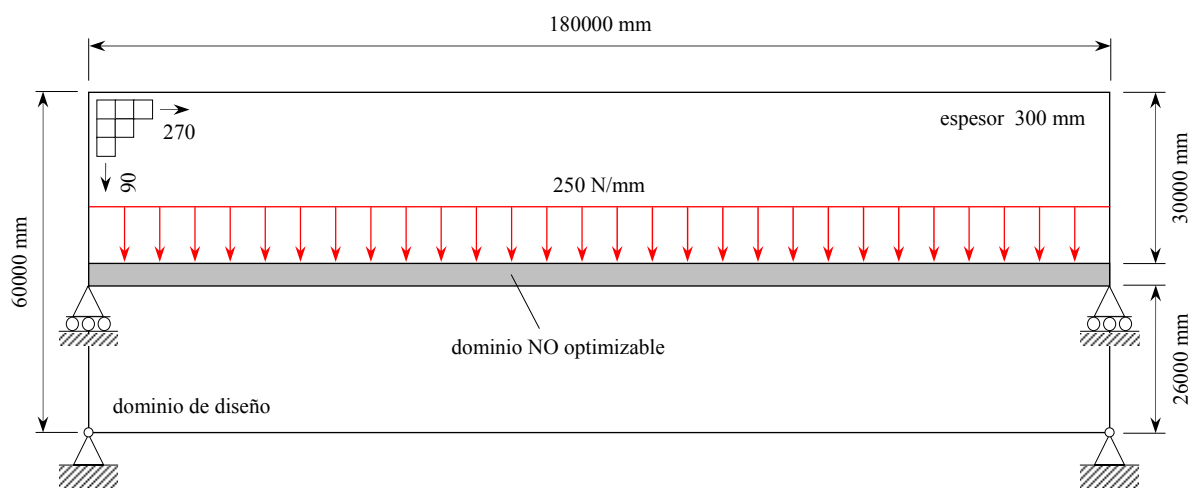


Figura 6.51 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida de 250 N/mm. Dominio de diseño

En las Figs. 6.52 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 125, obteniendo el diseño óptimo en la generación 100.

En la tabla 6.20 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

En las Figs. 6.53 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la aptitud, la compliance, y la fracción de volumen con las generaciones. En la Fig. 6.53a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en los diseños iniciales (generación 15) se reduce significativamente al final de la optimización (80,93 y 12,67 veces respectivamente), aumentado un 249,95% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

Si se comparan los diseños inicial y final (ver tabla 6.20) se aprecia que el valor de la aptitud aumenta desde $8,584 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$ hasta $1,315 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$, lo que supone un incremento del 53,20% (Fig. 6.53b).

En las Figs. 6.54a y 6.54b se muestran los óptimos obtenidos con los métodos MFAG-i y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 26,36% y 26,61% respectivamente. Como se puede apreciar, los diseños muestran la misma topología y una forma similar.

En la tabla 6.21 se muestran los resultados finales de la optimización de topología obtenidos con los métodos MFAG-ig y MFAG-i.

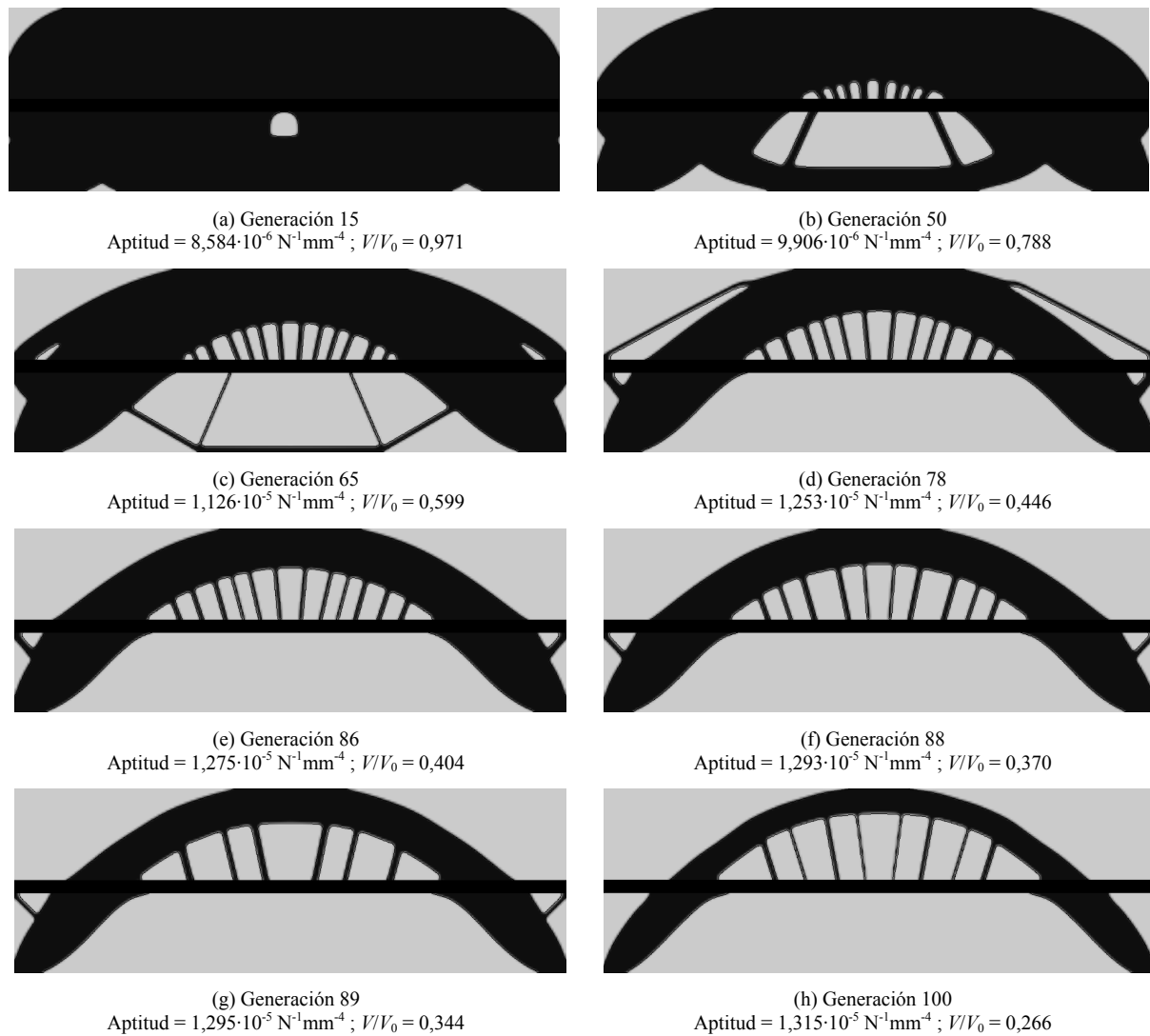


Figura 6.52 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Topologías óptimas para diferentes generaciones

Tabla 6.20 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | V/V_0 | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_n} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($\text{N}^{-1} \text{ mm}^{-4}$) |
|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------|---------|---|---------------|--|
| 15 | 23,552 | 1,966 | 0,291 | 2,558 | 0,971 | $3,701 \cdot 10^7$ | 1249,61 | $8,584 \cdot 10^{-6}$ |
| 50 | 25,241 | 2,334 | 0,753 | 2,866 | 0,788 | $3,952 \cdot 10^7$ | 4292,85 | $9,906 \cdot 10^{-6}$ |
| 65 | 28,299 | 2,925 | 0,983 | 3,469 | 0,599 | $4,574 \cdot 10^7$ | 5580,55 | $1,126 \cdot 10^{-5}$ |
| 78 | 31,376 | 3,889 | 1,615 | 4,207 | 0,446 | $5,525 \cdot 10^7$ | 6675,10 | $1,253 \cdot 10^{-5}$ |
| 86 | 32,015 | 4,333 | 1,956 | 4,553 | 0,404 | $5,989 \cdot 10^7$ | 7330,97 | $1,275 \cdot 10^{-5}$ |
| 88 | 32,700 | 4,779 | 2,102 | 4,955 | 0,370 | $6,457 \cdot 10^7$ | 7496,50 | $1,293 \cdot 10^{-5}$ |
| 89 | 33,633 | 5,204 | 2,289 | 5,436 | 0,344 | $6,927 \cdot 10^7$ | 7580,87 | $1,295 \cdot 10^{-5}$ |
| 100 | 36,824 | 6,880 | 2,907 | 7,269 | 0,266 | $8,817 \cdot 10^7$ | 8508,20 | $1,315 \cdot 10^{-5}$ |

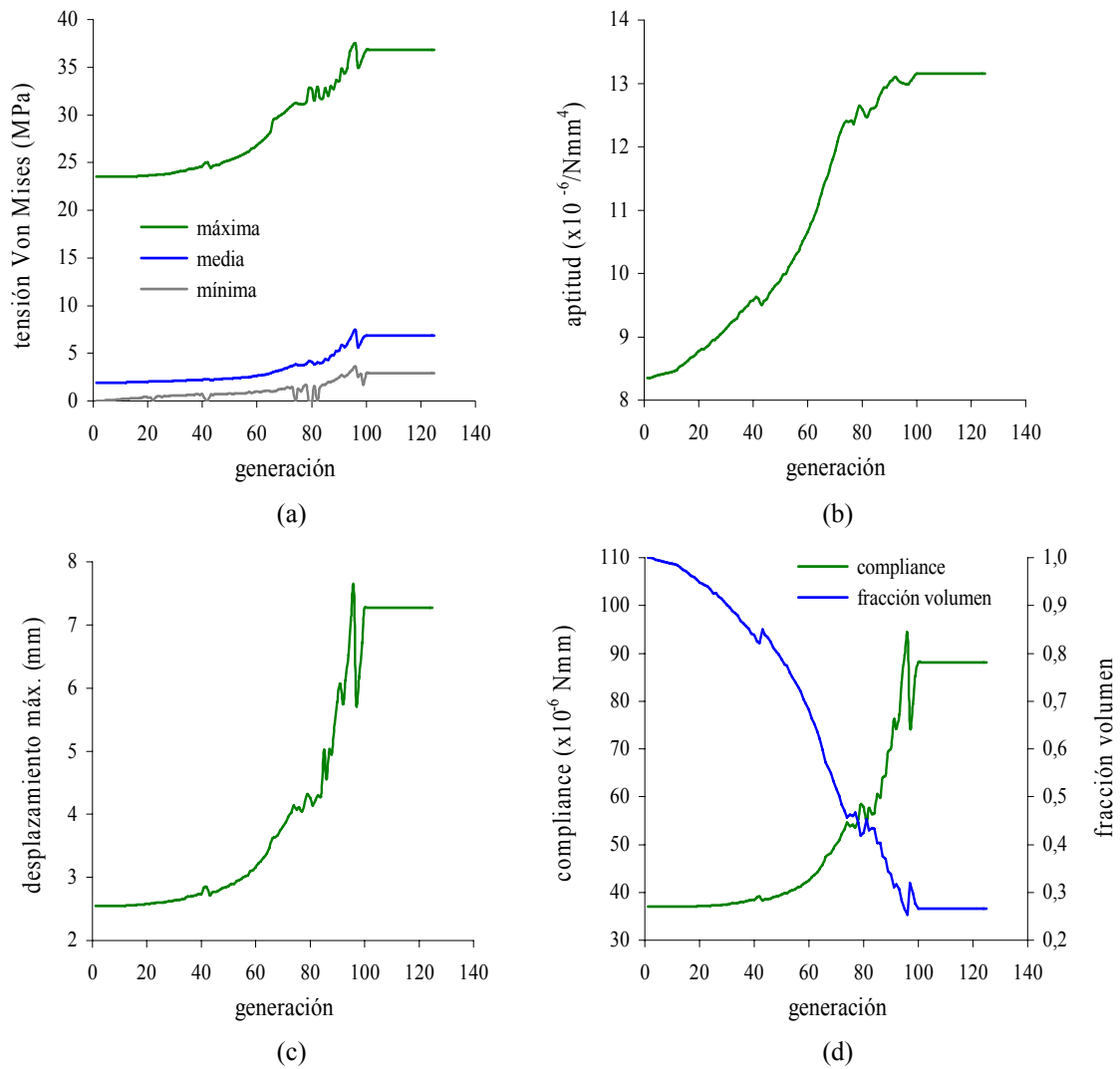


Figura 6.53 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/generación. (b) Evolución aptitud/generación. (c) Evolución desplazamiento máximo/generación. (d) Evolución compliance/fracción de volumen/generación

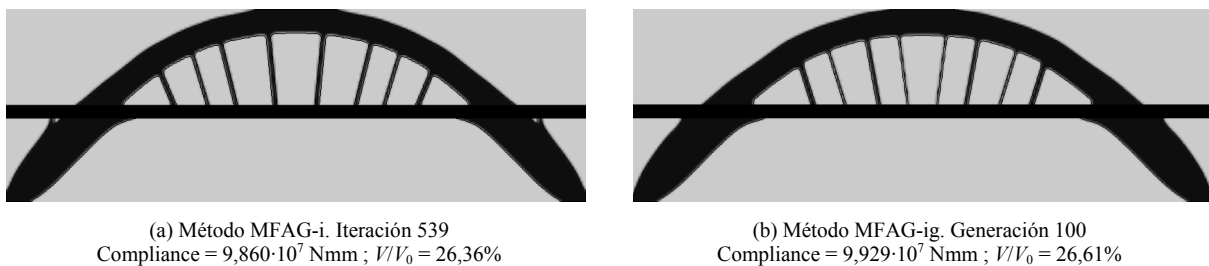


Figura 6.54 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Malla de 270×90 elementos. (a) Método MFAG-i. (b) Método MFAG-ig

En las gráficas de la Fig. 6.55 se comparan la evolución de la fracción de volumen y de la compliance (en forma normalizada), con las generaciones y las iteraciones obtenidas con los métodos MFAG-ig y MFAG-i.

Tabla 6.21 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Comparación de resultados entre los diseños óptimos finales con MFAG-i y MFAG-ig

| Método | $\frac{\sigma_{vm}^{max}}{\sigma_{vm}^{min}}$ | $\frac{\sigma_{vm}^{med}}{\sigma_{vm,0}^{med}}$ | $\frac{D_{max}}{D_{max}^0}$ | Compliance (Nmm) $C = 1/2 \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ | $\frac{V}{V_0}$ | R_{cav} | Número análisis | Tiempo (s) |
|---------|---|---|-----------------------------|---|-----------------|-----------|-----------------|------------|
| MFAG-i | 7,523 | 5,786 | 4,480 | $1,571 \cdot 10^8$ | 0,186 | 0 | 596 | 2077,43 |
| MFAG-ig | 12,667 | 3,621 | 2,851 | $9,929 \cdot 10^7$ | 0,266 | 2 | 3000 | 8508,20 |

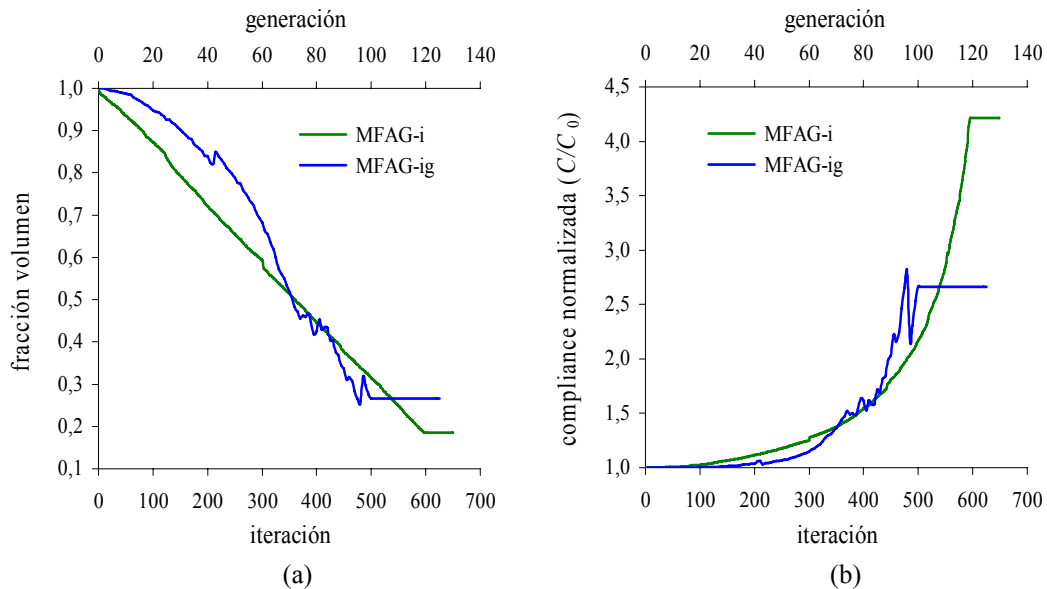
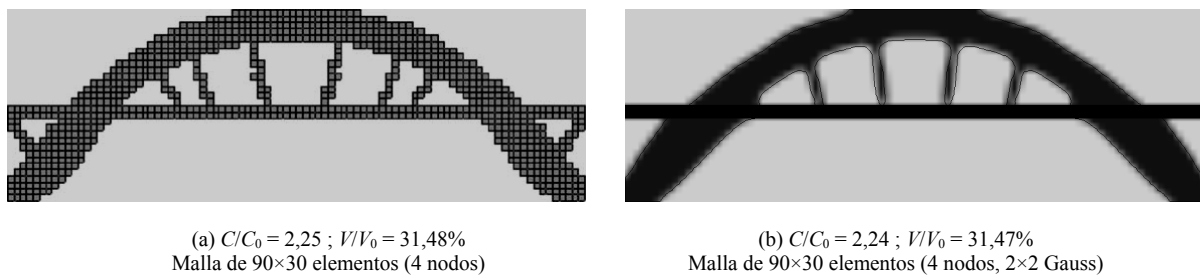


Figura 6.55 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. Malla de 270×90 elementos. (a) Evolución fracción de volumen/generación/iteración. (b) Evolución compliance normalizada/generación/iteración

En la Fig. 6.55a se observa que el método MFAG-i reduce la fracción de volumen de forma más gradual que el método MFAG-ig. En la Fig. 6.55b se aprecia que el valor de la compliance con el método MFAG-i y MFAG-ig aumenta rápidamente. Sin embargo, la evolución con el método MFAG-i se desarrolla de forma más progresiva.

En las Figs. 6.56 se muestran los óptimos conseguidos con los métodos PBO (Liang y Steven, 2002), y MFAG-ig para fracciones de volumen de 31,48% y 31,47% respectivamente.



(a) $C/C_0 = 2,25$; $V/V_0 = 31,48\%$
Malla de 90×30 elementos (4 nodos)

(b) $C/C_0 = 2,24$; $V/V_0 = 31,47\%$
Malla de 90×30 elementos (4 nodos, 2×2 Gauss)

Figura 6.56 Puente con tablero fijo y fuerza vertical uniformemente repartida. (a) Método PBO. (b) Método MFAG-ig

En las Figs. 6.56 se observa que la región del dominio de diseño por debajo del tablero es sistemáticamente retirada de la estructura. Las topologías óptimas obtenidas con ambos métodos reproducen el conocido sistema estructural para puentes de arco y tirantes (*tie-arch*). Sin embargo, aunque la fracción de volumen obtenida con el método MFAG-ig es solo un 0,032% menor que la alcanzada con el método PBO, las topologías óptimas conseguidas con ambos métodos presentan diferentes números de cavidades (10 y 14 respectivamente). No obstante, los diseños conseguidos son similares, aunque la forma y topología final en el caso del método PBO deben de ser interpretadas para proponer un diseño final.

6.7.6 Viga con disco circular rígido

El último ejemplo es la viga con disco circular rígido con una carga vertical de 100 N en el centro del extremo más alejado del disco. La longitud del dominio de diseño es 550 mm, la altura 400 mm, el radio del disco 100 mm, y el espesor 5 mm. El dominio de diseño se ha dividido en 35200 elementos, 220 en dirección longitudinal y 160 en dirección transversal. Los elementos incluidos en el interior del disco son tratados como elementos fijos (virtuales indefinidamente) y representan el soporte (no sujeto al proceso de optimización) sobre el cual se apoya la estructura (Fig. 6.57).

En las Figs. 6.57 se muestran las topologías óptimas más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. El número máximo de generaciones es 75, obteniendo el diseño óptimo en la generación 44.

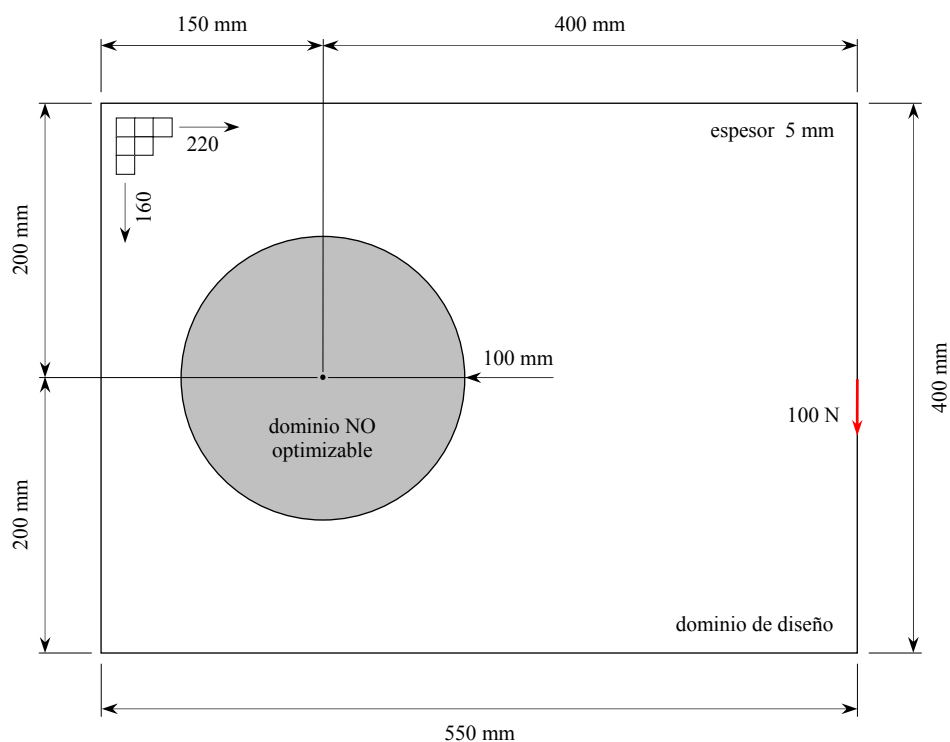


Figura 6.57 Viga con disco circular rígido con fuerza vertical centrada de 100 N.
Dominio de diseño

En la tabla 6.22 se muestran los valores correspondientes a las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la fracción de volumen, la compliance, el tiempo acumulado de optimización, y la aptitud para diferentes generaciones.

En las Figs. 6.59 se muestran la evolución de las tensiones de Von Mises máxima, media y mínima, el desplazamiento máximo, la aptitud, la compliance, y la fracción de volumen con las generaciones. En la Fig. 6.59a se observa que la separación entre las tensiones de Von Mises máxima y mínima en los diseños iniciales (generación 23) se reduce al final de la optimización (125,16 y 30,50 veces respectivamente), aumentado un 153,35% el valor alcanzado por la tensión de Von Mises media.

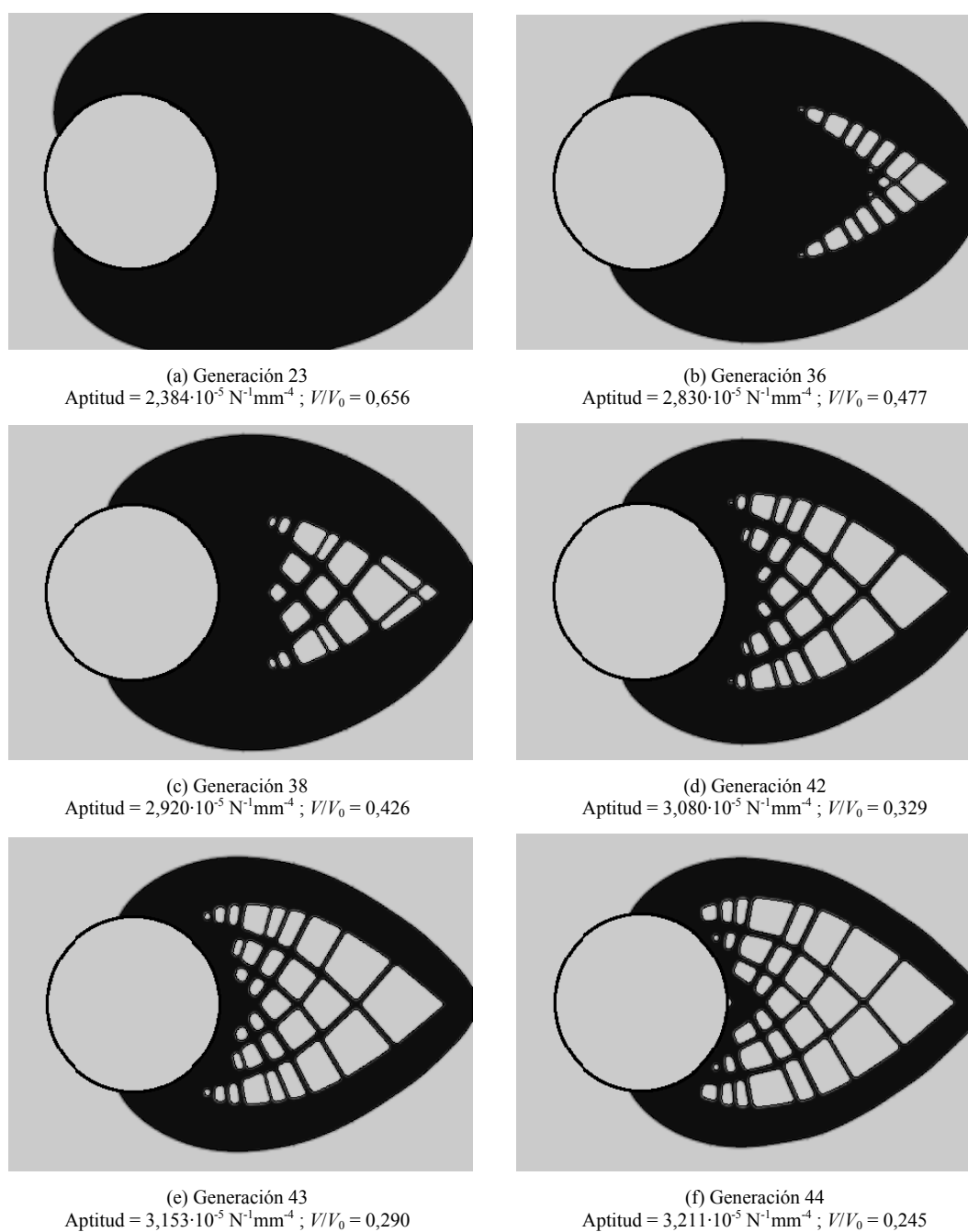


Figura 6.58 Viga con disco circular rígido. Topologías óptimas para diferentes generaciones

Tabla 6.22 Viga con disco circular rígido. Resultados para diferentes generaciones

| g | σ_{vm}^{max} (MPa) | σ_{vm}^{med} (MPa) | σ_{vm}^{min} (MPa) | D_{max} (mm) | V/V_0 | Compliance (Nmm) $C = \sum_{i=1}^{n_i} C_i$ | Tiempo (s) | Aptitud ($N^{-1}mm^{-4}$) |
|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|---------|---|---------------|--------------------------------|
| 23 | 5,327 | $1,494 \cdot 10^{-1}$ | $4,256 \cdot 10^{-2}$ | $1,006 \cdot 10^{-3}$ | 0,656 | $5,812 \cdot 10^{-2}$ | 4135,52 | $2,384 \cdot 10^{-5}$ |
| 36 | 5,330 | $1,976 \cdot 10^{-1}$ | $7,841 \cdot 10^{-2}$ | $1,207 \cdot 10^{-3}$ | 0,477 | $6,739 \cdot 10^{-2}$ | 6375,81 | $2,830 \cdot 10^{-5}$ |
| 38 | 5,332 | $2,216 \cdot 10^{-1}$ | $8,450 \cdot 10^{-2}$ | $1,331 \cdot 10^{-3}$ | 0,426 | $7,314 \cdot 10^{-2}$ | 6728,83 | $2,920 \cdot 10^{-5}$ |
| 42 | 5,336 | $2,857 \cdot 10^{-1}$ | $1,192 \cdot 10^{-1}$ | $1,690 \cdot 10^{-3}$ | 0,329 | $8,966 \cdot 10^{-2}$ | 7444,36 | $3,080 \cdot 10^{-5}$ |
| 43 | 5,339 | $3,215 \cdot 10^{-1}$ | $1,452 \cdot 10^{-1}$ | $1,909 \cdot 10^{-3}$ | 0,290 | $9,929 \cdot 10^{-2}$ | 7622,63 | $3,153 \cdot 10^{-5}$ |
| 44 | 5,343 | $3,785 \cdot 10^{-1}$ | $1,752 \cdot 10^{-1}$ | $2,275 \cdot 10^{-3}$ | 0,245 | $1,155 \cdot 10^{-1}$ | 7804,49 | $3,211 \cdot 10^{-5}$ |

Si se comparan los diseños inicial y final (ver tabla 6.22) se aprecia que el valor de la aptitud aumenta desde $2,384 \cdot 10^{-5} N^{-1}mm^4$ hasta $3,211 \cdot 10^{-5} N^{-1}mm^4$, lo que supone un incremento del 34,69% (Fig. 6.59b).

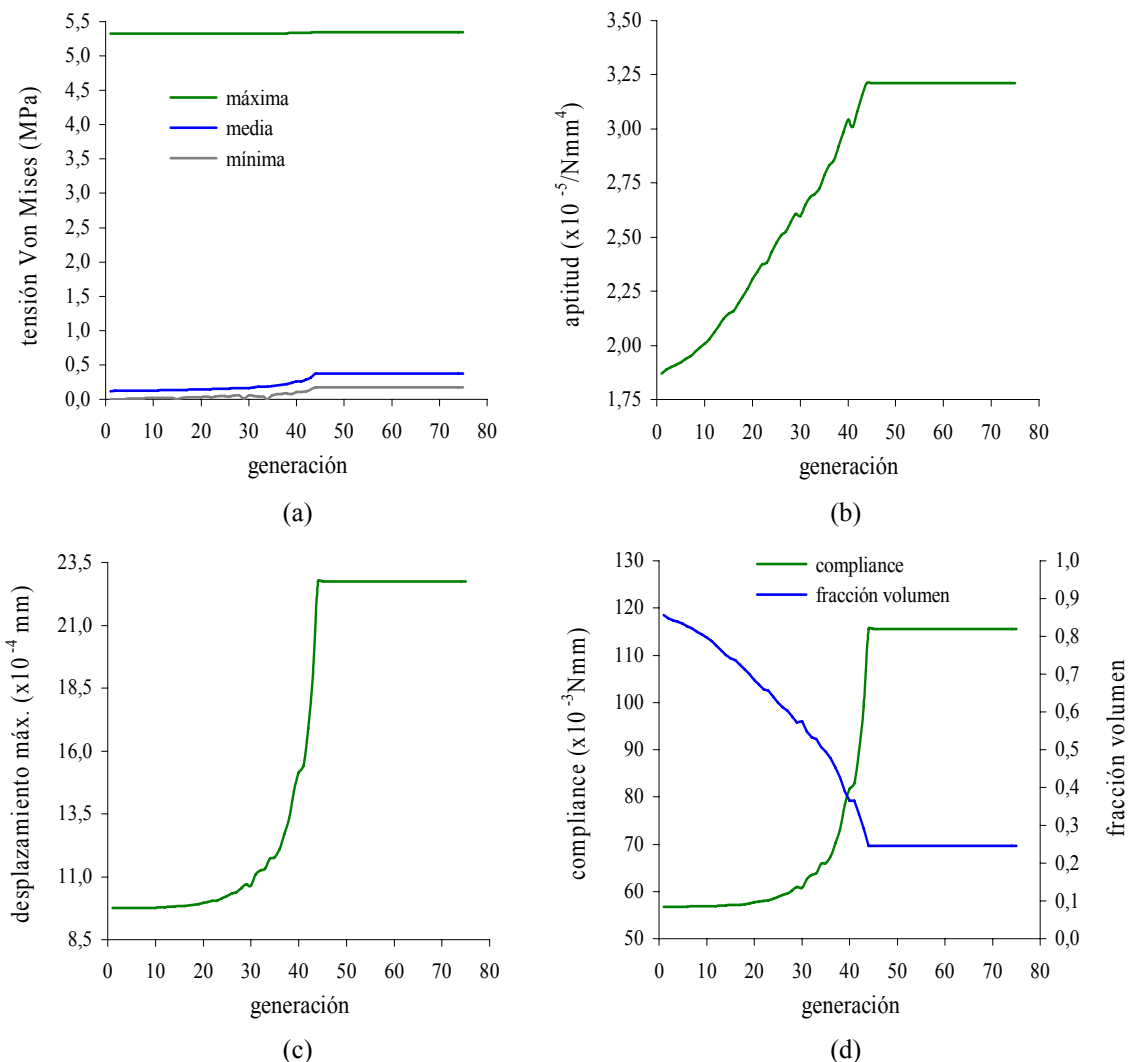


Figura 6.59 Viga con disco circular rígido. (a) Evolución tensiones Von Mises máxima/media/mínima/generación. (b) Evolución aptitud/generación. (c) Evolución desplazamiento máximo/generación. (d) Evolución compliance/fracción de volumen/generación

En la Fig. 6.59c se observa que el desplazamiento máximo es prácticamente constante hasta la generación 20 ($9,955 \cdot 10^{-4}$ mm), aumentando hasta 2,24 veces en la generación 44 ($22,275 \cdot 10^{-4}$ mm).

En las Figs. 6.60a y 6.60b se muestran los óptimos conseguidos con los métodos PBO (Liang y Steven, 2002) y MFAG-ig, para fracciones de volumen de 40,0% y 36,2% respectivamente.

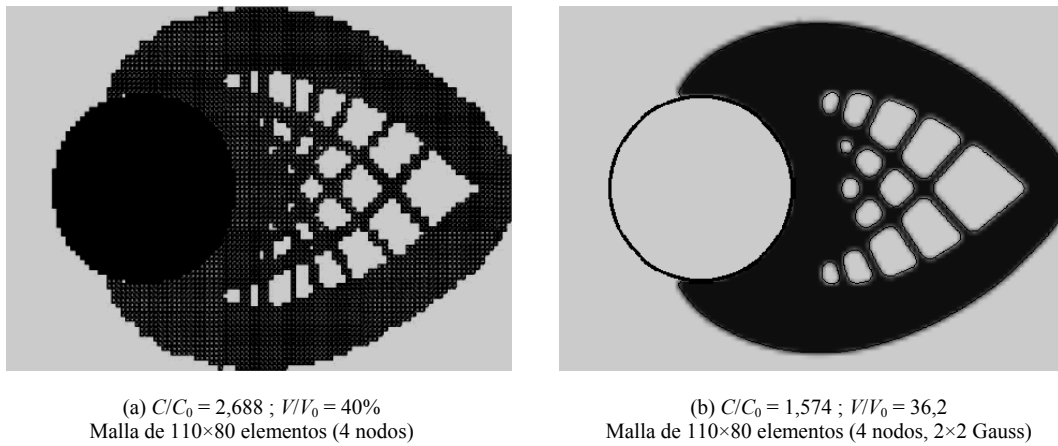


Figura 6.60 Viga con disco circular rígido. (a) Método PBO. (b) Método MFAG-ig

En las Figs. 6.60 se observa que, la topología obtenida con el método MFAG-ig es un 70,78% más rígida que la conseguida con el método PBO. No obstante, los diseños obtenidos resultan similares, aunque no presentan la misma distribución de cavidades.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se hace un resumen del trabajo de investigación realizado y descrito en esta tesis, se exponen las conclusiones del mismo y se proponen trabajos futuros como continuación de la línea de investigación seguida.

7.2 TRABAJOS REALIZADOS

Durante el desarrollo de esta tesis se han realizado los siguientes trabajos:

- Revisión bibliográfica de artículos de revistas, libros, y congresos relacionados con el diseño óptimo de forma y topología de estructuras continuas, centrandó la búsqueda, fundamentalmente, en los últimos 10 años.
- Revisión de los conceptos mínimos sobre la teoría de la elasticidad para el análisis con una malla fija de elementos finitos, formulación del problema elástico plano con una malla fija de elementos finitos rectangulares, matrices de rigidez utilizadas para cada uno de los casos geométricos en los que se puede encontrar el elemento, así como las aplicaciones, ventajas e inconvenientes del uso de la malla fija en el diseño óptimo de estructuras continuas.
- Descripción de los fundamentos biológicos, matemáticos, elementos, organización y ajuste de un algoritmo genético.
- Revisión bibliográfica sobre las aplicaciones de los algoritmos genéticos a la optimización de forma y topología de estructuras continuas, centrandó la atención en los diferentes tipos de codificaciones y funciones de aptitud.

- Se ha implementado un algoritmo para el análisis de estructuras continuas bidimensionales mediante el método de la malla fija.
- Se han implementado dos algoritmos genéticos (simple y avanzado).
- Se ha implementado un método (basado en el método FG-GA) para la optimización de forma de estructuras continuas, denominado MFAG-f, empleando algoritmos genéticos y una malla fija de elementos finitos.
- Se han resuelto varios ejemplos para validar el método MFAG-f, así como para compararlo con los resultados obtenidos en la bibliografía más reciente.
- Se han analizado, e implementado diferentes criterios para la extracción de las isolíneas del problema.
- Se ha propuesto, e implementado, un método para la optimización de topología de estructuras continuas, denominado MFAG-i, basado en las isolíneas del problema (tensión de Von Mises, densidad/energía de deformación), y una malla fija de elementos finitos para el análisis de la estructura.
- Se han resuelto varios ejemplos para validar el método MFAG-i, así como para compararlo con los resultados obtenidos en la bibliografía más reciente.
- Se han analizado, e implementado, diferentes codificaciones para la extracción de las isolíneas del problema mediante algoritmos genéticos.
- Se ha propuesto, e implementado, un nuevo método para la optimización de topología de estructuras continuas, denominado MFAG-ig, empleando algoritmos genéticos, las isolíneas del problema, y una malla fija de elementos finitos para el análisis de la estructura.
- Se han resuelto varios ejemplos para validar el método MFAG-ig, así como para compararlo con el método MFAG-i y con los resultados obtenidos en la bibliografía más reciente.
- Todas las implementaciones se han agrupado en una aplicación informática propia MFAG, desarrollada en el lenguaje de programación FORTRAN 95.
- Las investigaciones y resultados detallados en esta tesis han dado como resultado tres comunicaciones divulgadas en congresos internacionales, las cuales han sido referenciadas a lo largo del texto (Victoria y Martí, 2004, 2005, 2006).

7.3 CONCLUSIONES

Del trabajo realizado en esta tesis se extraen las siguientes conclusiones:

- En la actualidad, la computación evolutiva se muestra como un enfoque alternativo, a los métodos de optimización tradicionales, aportando como ventajas: simplicidad conceptual, robustez, amplia aplicabilidad, facilidad de hibridación, y aplicación en arquitecturas en paralelo.

- Aunque las diferencias entre los distintos tipos de algoritmos evolucionarios (ESs, EP, GP, GAs) son cada vez más difícil de distinguir, los algoritmos genéticos disponen de una base teórica más robusta, y están biológicamente mejor adaptados.
- Los ejemplos presentados en esta tesis demuestran que el método de la malla fija proporciona estimaciones fiables de las deformaciones y las tensiones, cuando se utiliza para la resolución de problemas elásticos.
- El error cometido por el método de la malla fija en el valor de los desplazamientos es mínimo. Sin embargo, el uso de los valores de las tensiones debe realizarse con cuidado, debido a la posibilidad de errores sustanciales en aquellas regiones donde se producen rápidas transiciones en los valores de las tensiones.
- La representación de la topología a través del contorno (o isolíneas), junto a la aproximación del dominio mediante una malla fija de elementos finitos, se confirman como una herramienta eficiente para la optimización de estructuras continuas, evitando regenerar la malla, con un coste computacional mínimo.
- La principal ventaja del método de la malla fija es la velocidad de resolución. Aspecto que resulta clave para su extensión y aplicación al diseño óptimo de estructuras continuas, permitiendo combinar el análisis de la respuesta y el diseño conceptual en una sola etapa.
- En estos últimos años, los algoritmos genéticos se han confirmado como un potente y robusto método para el diseño óptimo de estructuras, utilizado no solo por investigadores, sino también por profesionales. Actualmente, los esfuerzos en investigación están centrados en la resolución de problemas de optimización más complejos, y en el estudio y desarrollo de modelos evolutivos más avanzados, como: paralelización de algoritmos, optimización multiobjetivo, codificaciones de longitud variable, y modelos coevolucionarios.
- Los resultados obtenidos con el método MFAG-f mejoran o igualan, en todos los casos estudiados, a los mejores resultados obtenidos utilizando los métodos FG-GA y Nibbling-ESO, consiguiendo soluciones con contornos bien definidos, y con un coste computacional inferior.
- El empleo de las isolíneas del problema permite optimizar simultáneamente la forma y la topología, evitando la problemática asociada a los métodos basados en la división de etapas (orden de las etapas, número de iteraciones por etapa, etc.).
- Los resultados obtenidos con el método MFAG-i confirman la robustez del método, proporcionando diseños con contornos plenamente definidos, y evitando con ello la presencia de bordes aserrados (método ESO), o valores intermedios (método SIMP, y homogenización) que obligan a interpretar la topología para proponer un diseño final construible.
- Los resultados obtenidos con el método MFAG-ig mejoran o igualan, en todos los casos estudiados, los mejores resultados obtenidos con los métodos, PLATO-am, ESO, multi-GA, MMA, SIMP, y PBO, obteniendo, al igual que el método MFAG-i,

soluciones con contornos bien definidos, no siendo necesaria la interpretación de la topología para proponer el diseño final.

- Los resultados obtenidos con el método MFAG-ig, en la mayoría de los casos, se ajustan de forma más precisa a la solución óptima de barras articuladas, que los conseguidos con el método MFAG-i.
- El coste computacional del método MFAG-i es inferior, en todos los ejemplos realizados, al coste del método MFAG-ig. Sin embargo, en el caso de mallas con un número pequeño de elementos, el coste en ambos métodos se equipara.
- Los resultados obtenidos con el método MFAG-ig confirman que el control adaptativo de las isolíneas de referencia, proporciona mejores resultados que el control estático realizado con el método MFAG-i.
- La optimización de topología con el método MFAG-ig presenta en cualquier momento características reversibles, de modo que, la evolución de la estructura no condiciona de forma crítica, la posición, ni la forma, ni el número de cavidades que definen la topología estructural.
- A pesar de la complejidad del diseño óptimo de topología de estructuras continuas, se han obtenido dos metodologías MFAG-i y MFAG-ig suficientemente robustas para las aplicaciones consideradas.
- La implementación de los diferentes algoritmos de optimización (incluidos en el programa MFAG) en un lenguaje de programación no compilado FORTRAN 95 proporciona versatilidad, flexibilidad, y potencia para resolver la optimización de forma y topología con algoritmos genéticos.

7.4 TRABAJOS FUTUROS

Como continuación del trabajo desarrollado en esta tesis, se proponen las siguientes líneas de trabajos futuros:

- Ampliar las metodologías desarrolladas al diseño óptimo de estructuras continuas tridimensionales.
- Analizar en profundidad la estructura matemática del problema de diseño óptimo abordado, para encontrar bases matemáticas que justifiquen y aumenten la robustez de los métodos de optimización propuestos.
- Considerar varios estados de cargas.
- Estudiar la posibilidad de adaptar los algoritmos para su ejecución en máquinas paralelas o en cluster de ordenadores.
- Considerar otro tipo de restricciones (tensión, estabilidad global, etc.).

Apéndice A

Organización general del programa

MFAG

A.1 INTRODUCCIÓN

Los distintos métodos desarrollados en los capítulos 4, 5, y 6 se han implementado en una aplicación informática propia, a la que se ha llamado MFAG, acrónimo de Malla Fija y Algoritmos Genéticos. Esta aplicación se ha desarrollado con el objetivo principal de servir como herramienta para la realización de esta tesis.

MFAG es una aplicación informática para el diseño óptimo de forma y topología de estructuras continuas bidimensionales, ejecutable desde un PC con Windows 95/NT4 o superior (aunque se recomienda el sistema operativo Windows XP).

Esta aplicación se ha escrito en el lenguaje de programación FORTRAN 95 (Metcalf y Reid, 2002; Chapman, 2004), y en el entorno de programación Compaq Visual Fortran 6.6.0 (Compaq, 1999) para Windows (Fig. A.1), sumando más de 30000 líneas de código. Para suplir las carencias gráficas de este lenguaje se han utilizado las utilidades gráficas ofrecidas por la aplicación Winteracter versión 6.10 (Winteracter, 2005).

A.2 MÓDULOS BÁSICOS

La aplicación MFAG se organiza en tres módulos principales:

- Módulo para la generación del modelo geométrico.
- Módulo para el análisis con malla fija de elementos finitos.
- Módulo para la optimización de forma y topología.

El módulo para la generación del modelo lee datos tanto, de la interfase gráfica como, desde un fichero de datos (ver apéndice B). A través de la lectura de esta información, la aplicación obtiene:

- Longitud, altura, y espesor del modelo geométrico.
- Límites geométricos que acotan las variables de diseño.
- Número y situación de los puntos de control.
- Parámetros para el funcionamiento del algoritmo genético simple.
- Parámetros para la definición del análisis con malla fija de elementos finitos (número de elementos, módulos de elasticidad real y virtual, grados de libertad restringidos, cargas aplicadas, etc.).
- Parámetros que controlan el algoritmo genético avanzado.

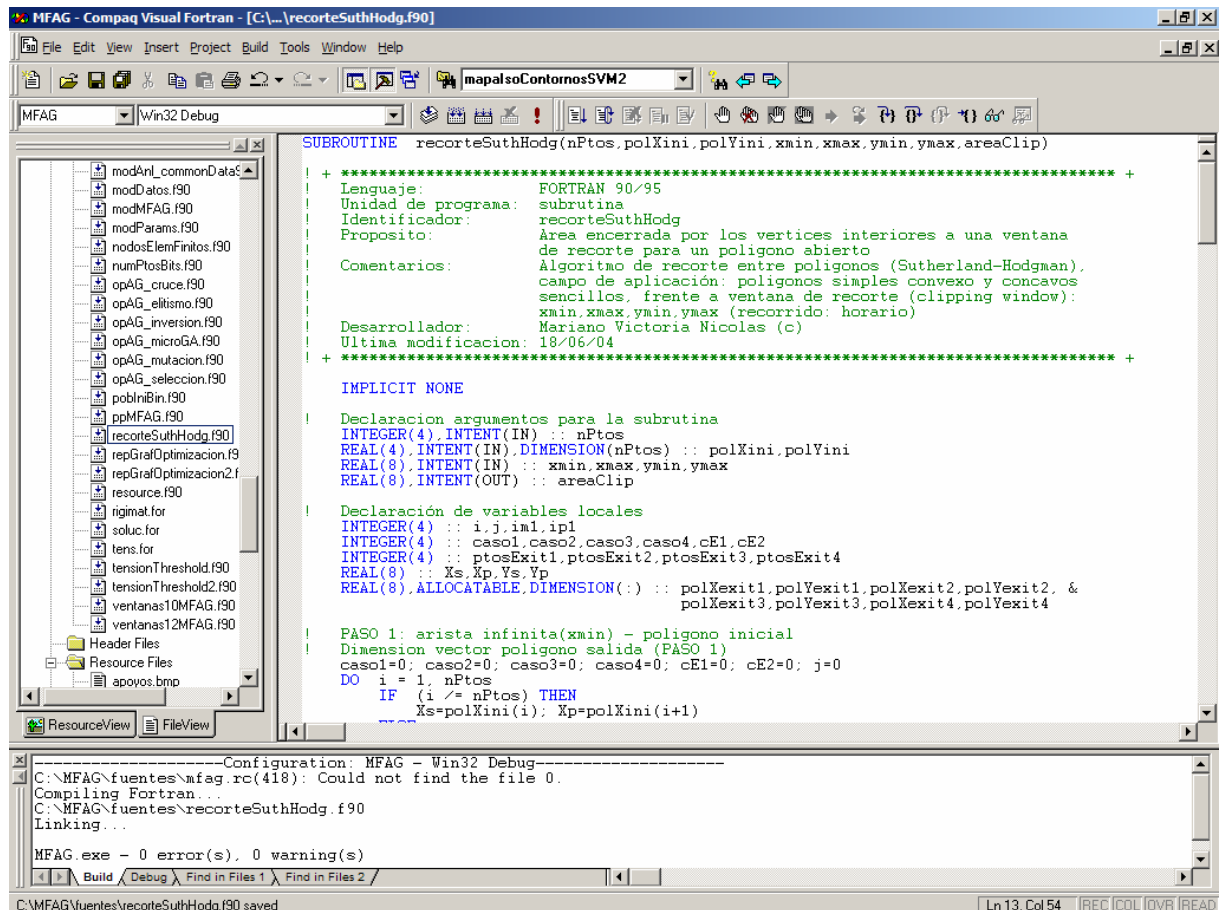


Figura A.1 Entorno de programación. Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0

Aunque el módulo de optimización está acotado al estudio de estructuras planas, el módulo de análisis (Fig. A.2) presenta las siguientes características:

1. Tipologías de las estructuras abordables:
 - Estructuras en tensión plana.
 - Estructuras en deformación plana.
 - Sólidos de revolución.
 - Sólidos tridimensionales.
 - Láminas de revolución. Teoría de Reissner-Mindlin.

2. Características del material:
 - Material elástico lineal isótropo.
3. Elementos finitos utilizables:
 - Tensión y deformación plana: elemento triangular de tres nodos, elemento triangular de 6 nodos, elementos cuadriláteros lagrangianos de 4 y 9 nodos, elemento serendípito de 8 nodos.
 - Sólidos de revolución: los mismos que para tensión y deformación plana.
 - Sólidos tridimensionales: elemento hexagonal serendípito de 20 nodos.
 - Placas: elemento cuadrilátero de 4 nodos (deformaciones por cortante lineales).
 - Láminas de revolución: elemento troncocónico de 2 nodos.
4. Cargas estáticas:
 - Tensión, deformación plana, y sólidos de revolución: cargas puntuales nodales, peso propio, carga uniformemente repartida sobre los lados de los elementos.
 - Sólidos tridimensionales: cargas puntuales nodales, peso propio.
 - Placas y láminas de revolución: cargas puntuales nodales, peso propio, carga uniformemente repartida sobre el elemento.

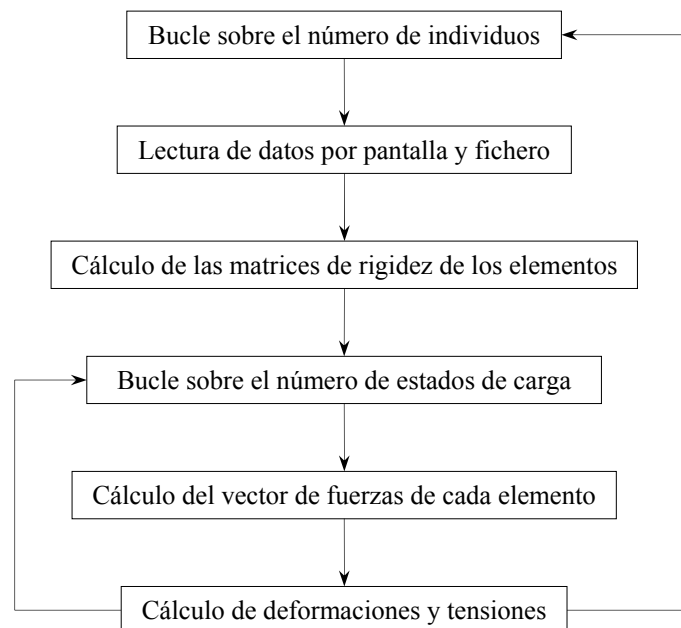


Figura A.2 Diagrama de flujo principal del módulo de análisis del programa MFAG

El módulo para la optimización de forma y topología de estructuras continuas dispone de cinco algoritmos:

- Optimización de forma mediante algoritmos genéticos (MFAG-f).
- Optimización de forma y topología mediante algoritmos genéticos (MFAG-c).
- Optimización de topología con isóneas de rechazo (MFAG-i).

- Optimización de topología con isolíneas de adición (MFAG-a).
- Optimización de topología con isolíneas y algoritmos genéticos (MFAG-ig).

A.3 SUBRUTINAS

A continuación se va a hacer una breve descripción de alguna de las subrutinas principales que se han realizado para la implementación de MFAG.

Tabla A.1 Principales subrutinas incluidas en el programa MFAG

| Subrutina | Descripción |
|-----------------------------|---|
| ppMFAG | Programa principal |
| algMFAG_forma | Algoritmo para la optimización de forma |
| algMFAG_formaTopologia | Algoritmo para la optimización de forma y topología con control del contorno |
| algMFAG_formaTopologia_Auto | Algoritmo para la optimización de forma y topología con control del contorno para la definición de isolíneas de corte automático |
| algMFAG_TopIsoAG | Algoritmo para la optimización de topología a través de isolíneas y algoritmos genéticos |
| algMFAG_Topologia | Algoritmo de optimización de topología sin control por contorno, eliminación de material |
| algMFAG_TopologiaIA | Algoritmo de optimización de topología sin control por contorno, adición de material |
| auxGA | Subrutinas auxiliares para el algoritmo genético avanzado |
| auxMFAG | Subrutinas auxiliares del programa principal |
| auxWint | Subrutinas auxiliares para Winteracter |
| bcorte | Calcula la matriz de deformación de cortante |
| bitActPas | Define dentro de un cromosoma o cadena de codificación, cuales de los puntos clave que integran los contornos de control participan de forma activa en el proceso de procreación, y cuales lo hacen de forma pasiva permaneciendo su ordenada constante |
| blockMFAG | Subrutinas MFAG interfase del algoritmo genético avanzado |
| bmat | Calcula de la matriz de deformación |
| blockANL | Análisis con malla fija de elementos finitos |
| checkAgujeros | Testea los contornos obtenidos por la subrutina <code>contouringAlgorithm</code> |
| CheckCoorYGeo | Evalúa si algún punto de control se va a salir de la región de diseño. En caso afirmativo, se invierte el bits a causa de dicha anomalía y se reintroduce la coordenada ordenada al punto del cual se procede |
| conRec2 | Subrutina de contorneado |
| contenidoDialogos | Escribe por pantalla y en el fichero la evolución de la optimización |
| contornoGeo | Organiza los puntos de control en ambas fibras de control para constituir una matriz de vectores que exprese de modo continuo las coordenadas de todos estos puntos |
| contouringAlgorithm | Algoritmo para la extracción de isocontornos |
| coorXGeoInf | Determina las coordenadas sobre el eje de abscisas para los puntos clave situados en el cordón inferior |
| coorXGeoSup | Determina las coordenadas sobre el eje de abscisas para los puntos clave situados en el cordón superior |
| coorYGeo | Recalcula las coordenadas sobre el eje de ordenadas para el conjunto de puntos de control situados en la fibra superior como inferior |
| coorYGeoIni | Determina las coordenadas iniciales sobre el eje de ordenadas para el conjunto de puntos de control situados tanto en la fibra superior como inferior |
| cromAdaptado | Configura una población binaria de individuos codificados en la cual se |

| | |
|------------------------|---|
| | etiqueta con la clave '-1' aquellos puntos clave pasivos |
| datos | Lee toda la información relacionada con la geometría de la malla, propiedades de los materiales y condiciones de contorno |
| diálogos | Gestión de diálogos |
| dimsFijasVentanas | Dimensiones fijas de las ventanas |
| dmat | Calculo de la matriz constitutiva |
| fgElemContExt | Determina si un elemento finito se encuentra dentro, fuera, o intersectados por el contorno exterior |
| fgElemContInt | Determina si un elemento finito se encuentra dentro, fuera, o intersectados por alguno de los contornos interiores ó el contorno exterior |
| fgEyoungContExt | Asigna un módulo de elasticidad longitudinal a cada uno de los elementos finitos, en función del área que queda cubierta por el contorno exterior de la estructura |
| fgEyoungContInt | Asigna un módulo de elasticidad longitudinal a cada uno de los elementos finitos en función del área que queda cubierta por los contornos interiores tras haber sido cubierta por la forma exterior de la estructura |
| fgNodosContExt | Sitúa los nodos respecto del contorno exterior mediante un test de cruces modificado |
| fgNodosContInt | Sitúa los nodos del modelo de elementos finitos respecto del contorno exterior, así como referenciarlos frente a los posibles contornos interiores |
| filtroDensEnergAlfaDEF | Obtiene un mapa de densidades de energías nodales, a partir de la información obtenida en los elementos, y si se requiere ponderado por el ratio de participación alfa |
| filtroEnergAlfaDEF | Obtiene un mapa de densidad de energías de deformación nodales, a partir de la información obtenida en los elementos, y si se requiere ponderado por el ratio de participación alfa |
| filtroTensAlfaSVM | Obtiene un mapa de tensiones de Von Mises, a partir de las tensiones de en los elementos y el ratio de participación alfa característico de cada elemento |
| filtroTensAlfaSX | Obtiene un mapa de tensiones, a partir de las tensiones normales x en los elementos, y el ratio de participación alfa característico de cada elemento |
| filtroTensAlfaXY | Obtiene un mapa de tensiones, a partir de las tensiones tangenciales xy en los elementos, y el ratio de participación alfa característico de cada elemento |
| filtroTensAlfaSY | Obtiene un mapa de tensiones, a partir de las tensiones normales y en los elementos, y el ratio de participación alfa característico de cada elemento |
| fforma | Calcula las funciones de forma de los elementos y sus derivadas naturales |
| fuerzas | Calcula las fuerzas nodales equivalentes para los diferentes elementos |
| funcionAptitud | Determina el valor de la aptitud para cada uno de los individuos que constituyen la población |
| gaussQ | Define las coordenadas y los pesos de Gauss |
| grafHistDsp | Representa la evolución de los desplazamientos nodales máximos en el eje x e y desarrolladas en la actual generación. En el eje de abscisas se dispone las generaciones recorridas, y en el eje de ordenadas el valor de los desplazamientos máximos. |
| graficosXY | Subrutina patrón para gráficos planos de evolución |
| histGruposSVM | Establece la distribución de elementos situados entre las franjas de los isocontornos correspondientes a las tensiones de Von Mises |
| infoBestDesign | Registra toda la información relacionada con el mejor diseño |
| interpolation2D | Subrutina para la interpolación cuadrática bidimensional |
| jacobm | Calcula el jacobiano, su determinante e inversa, así como las derivadas cartesianas de las funciones de forma |
| leerDatos | Lee datos del fichero de entrada |
| leerDatosPantalla | Lee datos, parámetros, etc. por pantalla |

| | |
|---------------------|---|
| libMemoria | Libera la memoria dinámica capturada durante la ejecución |
| mapaDspUX | Mapa de isocontornos correspondiente al campo de desplazamientos en la dirección x |
| mapaDspUY | Mapa de isocontornos correspondiente al campo de desplazamientos en la dirección y |
| mapaDspUXY | Mapa de isocontornos correspondiente al campo de desplazamientos total |
| mapaEstructura | Mapa de isocontornos correspondiente a la distribución de pseudo-densidad del material |
| mapaIsoContornosSED | Mapa de isocontornos correspondiente a la densidad de energía de deformación |
| mapaIsoContornosSVM | Mapa de isocontornos correspondiente a la tensión equivalente de Von Mises |
| mapaIsoContornosSX | Mapa de isocontornos correspondiente a la tensión normal en dirección x |
| mapaIsoContornosSY | Mapa de isocontornos correspondiente a la tensión normal en dirección y |
| mapaIsoContornosSXY | Mapa de isocontornos correspondiente a las tensiones tangenciales |
| modDatos | Unidad módulo que contiene la declaración de variables y parámetros comunes |
| modMFAG | Unidad módulo que contiene las variables comunes para la gestión del programa principal |
| nodosElemFinitos | Determina las coordenadas cartesianas de los nodos de los elementos finitos, tabula y organiza las conexiones dentro de cada elemento |
| numPtosBits | Determina el número de bits de un cromosoma a partir de los puntos duros y clave situados en el cordón superior e inferior |
| opAG_cruce | Operador algoritmo genético, cruce por un punto |
| opAG_elitismo | Operador algoritmo genético, elitismo |
| opAG_inversion | Operador algoritmo genético, inversión |
| opAG_microGA | Operador algoritmo genético, microgenético |
| opAG_mutacion | Operador algoritmo genético, mutación multi-bit |
| opAG_seleccion | Operador algoritmo genético, selección (torneo, ruleta, etc.) |
| pobIniBin | Inicializar una población pseudo-aleatoria binaria de posibles diseños |
| recorteSuthHodg | Algoritmo de recorte entre polígonos (Sutherland-Hodgman). Campo de aplicación: polígonos simples convexos y cóncavos sencillos, frente a ventana de recorte (clipping Windows) |
| repGrafOptimizacion | Representa gráficamente la estructura (malla de elementos finitos, cargas aplicadas, condiciones de apoyo, etc.) |
| solucion | Ensambla y resuelve el sistema de ecuaciones |
| tensiones | Calcula tensiones y esfuerzos en los puntos de integración |
| tensionThreshold | Determina el valor de la tensión de Von Mises por debajo del cual el espacio de diseño encerrado por la isolínea de tensión para dicho valor es eliminado |
| ventanas12MFAG | Define 12 ventanas, junto con sus características y situación en el entorno |

Apéndice B

Interfase MFAG con el usuario

B.1 DESCRIPCIÓN GENERAL

MFAG es una aplicación informática para el diseño óptimo de forma y topología de estructuras continuas bidimensionales, ejecutable desde un PC con Windows 95/NT4 o superior (aunque se recomienda el sistema operativo Windows XP).

En la Fig. B.1 se muestra la pantalla principal (sin datos cargados en memoria) de la aplicación MFAG. Ésta se autoconfigura (menús, barra de botones, y subventanas) en función de los datos que hay cargados en memoria.

El programa MFAG cuenta con una ventana principal y un total de once (o nueve) subventanas, dependiendo del algoritmo de optimización que se vaya a ejecutar:

1. Ventanas de evolución: situadas en la zona izquierda (siete o nueve ventanas) representan la evolución de las variables de diseño, resultados del análisis, y valores intermedios de la optimización (zona D, Fig. B.4).

| | |
|-----------------|---|
| VM-Mx/Me/Mn | Tensión de Von Mises máxima, media, y mínima. |
| SED-Mx/Me/Mn | Densidad de energía de deformación máxima, media, y mínima. |
| SE-Mx/Me/Mn | Energía de deformación máxima, media, y mínima. |
| Elem-I/O/IO | número de elementos interiores, exteriores, o intersectados por los contornos del diseño. |
| Isolíneas Corte | Valor de la/s isolínea/s de referencia. |
| Apt-Mx/Me/Mn | Valor máximo, medio, y mínimo de la función aptitud en la población. |

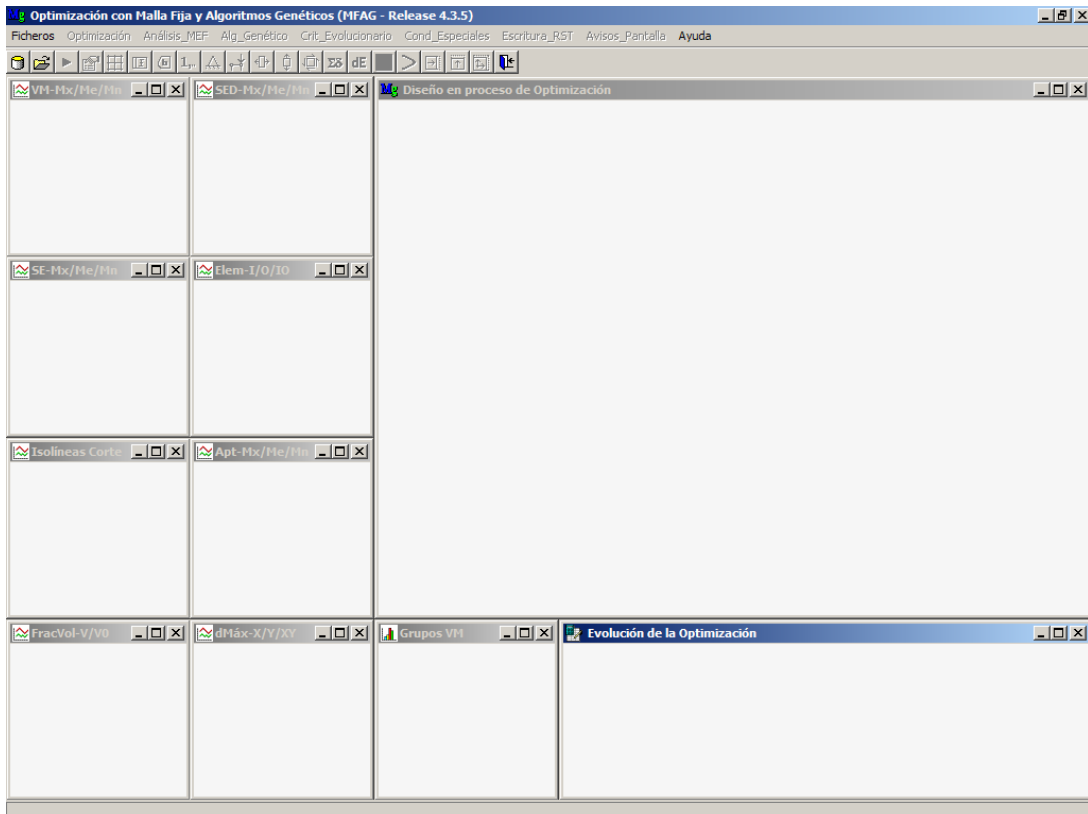


Figura B.1 Ventana principal y subventanas de MFAG. Sin datos

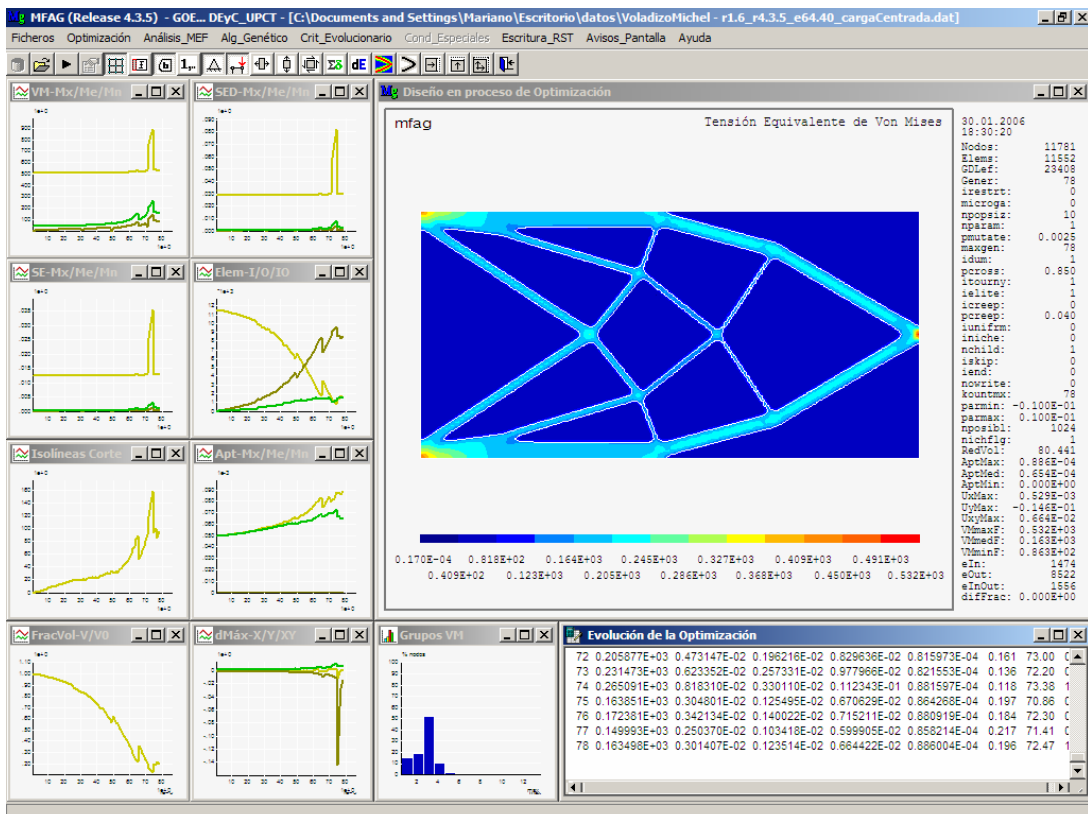


Figura B.2 Ventana principal y subventanas de MFAG-ig. Diseño óptimo de topología. Voladizo con fuerza vertical centrada en el extremo libre ($L/h = 2,0$)

| | |
|--------------|--|
| FracVol-V/V0 | Fracción de volumen (relación entre el volumen del diseño y el volumen inicial de partida). |
| dMáx-X/Y/XY | Desplazamientos máximos en las direcciones coordenadas x , y , e xy . |
| Grupos VM | Porcentaje de nodos respecto del total, comprendidos en cada uno de los isocontornos obtenidos para la tensión de Von Mises. |

2. Ventana de gráficos: subventana superior derecha (zona E, Fig. B.4), muestra el modelo de diseño, malla de elementos finitos, condiciones de contorno, cargas aplicadas, mapas de resultados (tensiones x , y , xy , Von Mises, desplazamientos en las direcciones x , y , xy , energía y densidad de energía de deformación), elementos optimizables y no optimizables (Figs. B.2, B5, y B6).
3. Ventana de resultados: situada en la zona inferior derecha (zona F, Fig. B.4), dedicada a listar los resultados del análisis y del proceso de optimización.

B.2 INTERFASE GRÁFICA

MFAG es una aplicación desarrollada para sistemas operativos bajo Windows. Se recomienda disponer al menos de 256 MB de memoria RAM instaladas en el ordenador, y un espacio libre en el disco duro no inferior a 100 MB.

Para instalar el programa MFAG, debe de seguir los siguientes pasos:

1. Inicie su ordenador, bajo cualquiera de los sistemas operativos Windows.
2. Usando el explorador de Windows, o simplemente pulsando el botón derecho, cree una carpeta con el nombre “datos” y otra con el nombre “resultados”. Carpetas que deberán situarse en la misma dirección que el fichero ejecutable “MFAG.exe”.
3. Para ejecutar el programa MFAG, versión Release 4.3.5, haga doble click sobre el icono mostrado en la Fig. B.3.



MFAG.exe

Figura B.3 Icono del programa MFAG

Cuando MFAG es iniciado, aparece la interfase de la Fig. B.1. Interfase bastante similar a las dispuestas en la mayoría de las aplicaciones bajo Windows.

B.2.1 Barra de títulos

La barra de títulos (zona A, Fig. B.4) proporciona la versión del programa “MFAG (Release 4.3.5)” junto con la ruta del fichero que está cargado en memoria. En el extremo derecho, se disponen los botones estándar de Windows para minimizar, maximizar, y cerrar el programa.

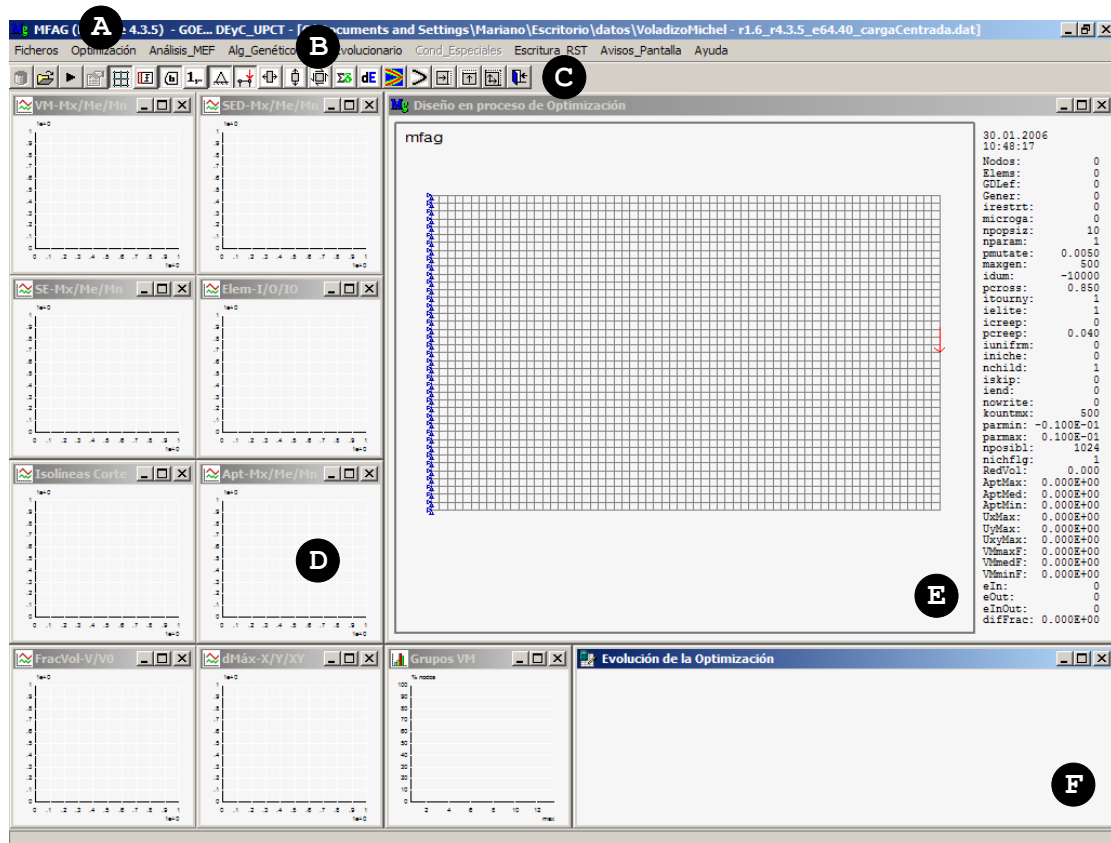


Figura B.4 Ventana principal y subventanas de MFAG. Datos cargados en memoria

B.2.2 Barra de menús

La barra de menús (zona B, ver Fig. B.4) cuenta con nueve menús principales: Ficheros, Optimización, Análisis_MEF, Alg_Genético, Crit_Evolucionario, Cond_Especiales, Escritura_RST, Avisos_Pantalla, y Ayuda.

Si el menú Ficheros es seleccionado aparece una lista desplegable (Fig. B.5):

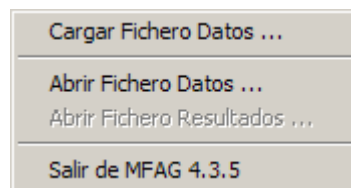


Figura B.5 Barra de menús. Ficheros

Cargar Fichero Datos...

Carga en memoria los datos del problema.

Abrir Fichero de datos...

Abre un fichero de datos, para su consulta o edición (Fig. B.6).

Abrir Fichero de Resultados...

Abre el fichero de resultados.

Salir de MFAG 4.3.5

Sale del programa MFAG.

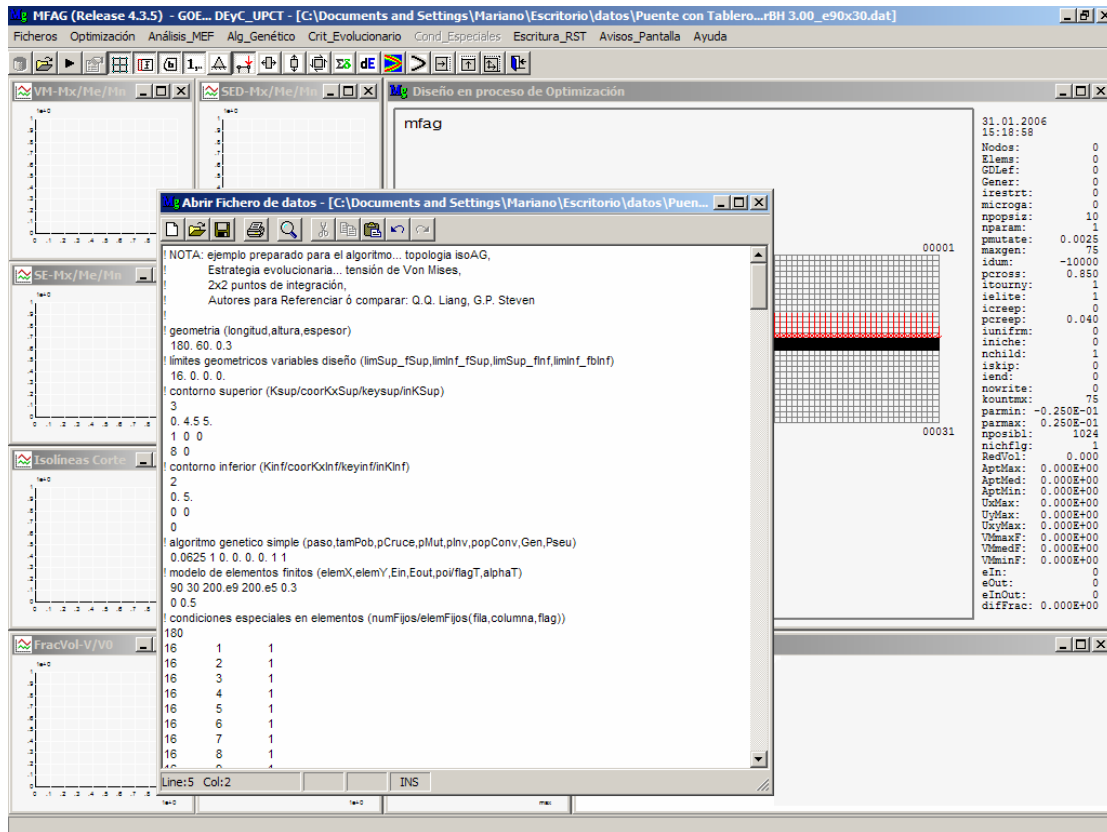


Figura B.6 Ventana principal y subventanas de MFAG. Datos cargados en memoria. Editor de textos para la apertura y edición de ficheros

Si el menú Optimización es seleccionado aparece una lista desplegable (Fig. B.7):

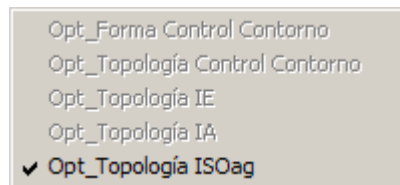


Figura B.7 Barra de menús. Optimización

Opt_Forma Control Contorno

Optimización de forma mediante el control del contorno y algoritmos genéticos. Método MFAG-f.

Opt_Topología Control Contorno

Optimización de forma y topología mediante el control del contorno y algoritmos genéticos. Método MFAG-c.

Opt_Topología IE

Optimización de topología mediante isolíneas. Método MFAG-i.

Opt_Topología IA

Optimización de topología mediante isolíneas de adición. Método MFAG-a.

Opt_Topología ISOag

Optimización de topología mediante isolíneas y algoritmos genéticos. Método MFAG-ig.

Si el menú *Análisis* es seleccionado aparece una lista desplegable (Fig. B.8):

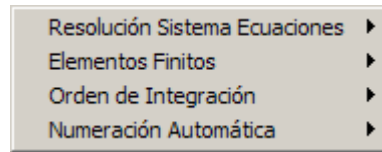


Figura B.8 Barra de menús. *Análisis*

| | |
|-------------------------------|---|
| Resolución Sistema Ecuaciones | Análisis estático lineal del modelo de elementos finitos. Resolución del sistema de ecuaciones lineales algebraicas mediante el método de Cholesky. |
| Elementos Finitos | Elemento rectangular de cuatro nodos. |
| Orden de Integración | (1×1) y (2×2) puntos de Gauss. |
| Numeración Automática | Por filas o por columnas. |

Si seleccionamos el menú *Alg_Genético* podemos elegir entre dos alternativas. Un algoritmo genético simple *AGmfag* desarrollado exclusivamente para el programa MFAG, y un algoritmo genético avanzado *AGcarroll* (Carroll, 1997) acoplado al programa MFAG.

Si el menú *AGmfag* es seleccionado aparece una lista desplegable (Fig. B.9):

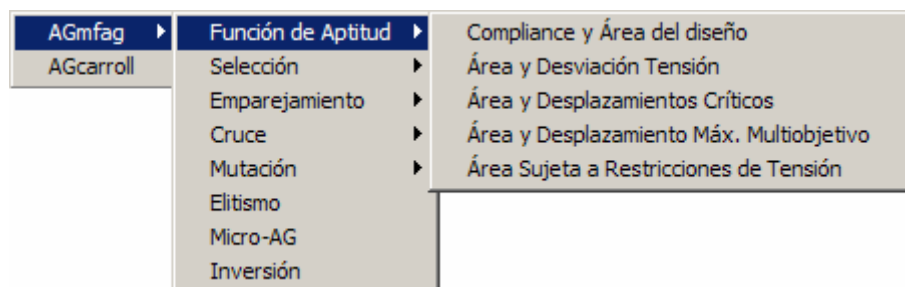


Figura B.9 Barra de menús. *Alg_Genético*>*Función de Aptitud*

En la Fig. B.9 se recogen algunas de las funciones de aptitud disponibles:

| | |
|---------------------------------|--|
| Compliance y Área del diseño | Maximiza la inversa del producto de la compliance por el área del diseño. |
| Área y Desviación Tensión | Maximiza la inversa del producto del área del diseño por la desviación estándar de las tensiones. |
| Área y Desplazamientos Críticos | Maximiza la inversa del producto del área del diseño por el valor del promedio de los desplazamientos seleccionados. |
| Área y Desplazamiento Máx... | Maximiza la inversa del producto del área por el valor del promedio de los desplazamientos ponderados. |

Área Sujeta a Restric... Tensión Maximiza la inversa del área del diseño sujeta a una restricción de tensión.

En la Fig. B.10 se recogen las alternativas disponibles para la selección de individuos

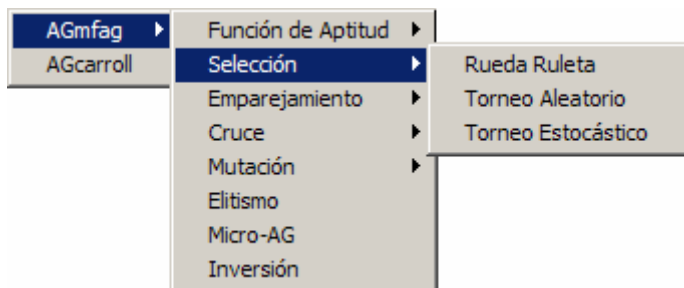


Figura B.10 Barra de menús. Alg_Genético>Selección

| | |
|--------------------|---|
| Rueda Ruleta | Selección por rueda ruleta. |
| Torneo Aleatorio | Selección por torneo con reintroducción. |
| Torneo Estocástico | Selección por torneo con reintroducción y rueda ruleta. |

El emparejamiento de los individuos antes del cruzamiento (Fig. B11) se puede realizar aleatoriamente (Aleatorio Puro) o mediante una permutación aleatoria (Aleatorio Permutado).

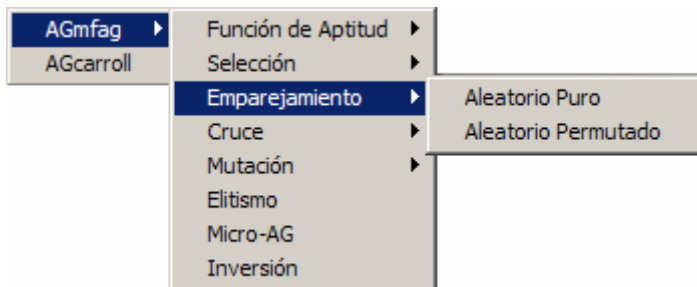


Figura B.11 Barra de menús. Alg_Genético>Emparejamiento

En la Fig. B.12 se muestran las opciones disponibles para realizar la operación de cruce, y los operadores mutación (Mutación), elitismo (Elitismo), micro-genético (Micro-AG), e inversión (Inversión).

| | |
|--------------|----------------------------|
| Por 1 punto | Cruce por un punto simple. |
| Por 2 puntos | Cruce por dos puntos. |
| Uniforme | Cruce uniforme. |

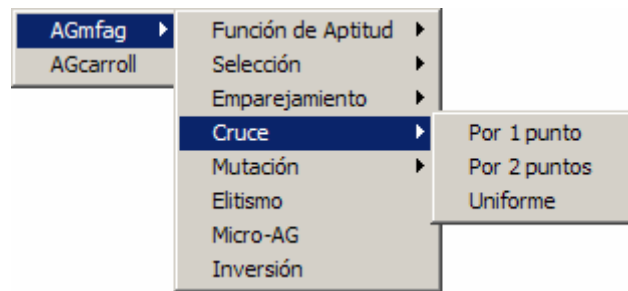


Figura B.12 Barra de menús. Alg_Genético>Cruce

Si seleccionamos el menú `Crit_Evolucionario` podemos elegir entre dos submenús. Uno de los cuales `Evolución_Ratio` se encuentra desactivado para la versión Release 4.3.5, quedando solamente activa la opción `Estrategia Evolucionaria`, en la cual debemos de especificar cual es el concepto (tensión de Von Mises, densidad de energía de deformación, o energía de deformación) que se utilizará para la extracción de las isolíneas de referencia (Fig. B.13).

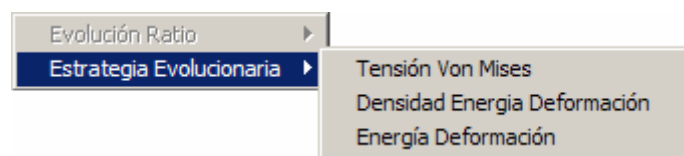


Figura B.13 Barra de menús. Criterio_Evolucionario>Estrategia Evolucionaria

Si seleccionamos el menú `Escritura_RST` se muestran las posibilidades que dispone el programa MFAG, para guardar los resultados obtenidos con el análisis o durante el proceso de optimización.

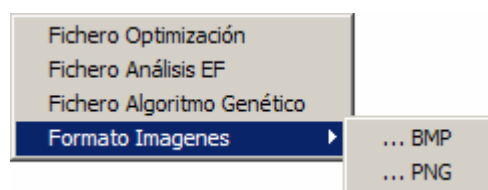


Figura B.14 Barra de menús. Escritura_RST>Formato Imágenes

| | |
|----------------------------|---|
| Fichero Optimización | Guarda en un fichero de texto los resultados obtenidos durante la optimización. |
| Fichero Análisis EF | Guarda en un fichero de texto los resultados obtenidos con el análisis por elementos finitos. |
| Fichero Algoritmo Genético | Guarda en un fichero de texto el valor de algunos parámetros, variables dependientes del algoritmo genético avanzado. |
| Formato Imágenes | Captura la ventana principal del programa en formato gráfico (BMP ó PNG). |

Si seleccionamos el menú `Avisos_Pantalla` podemos permitir la aparición de carteles informativos, relativos a: parámetros, variables de los algoritmos, y mensajes sobre el estado de la optimización (Figs. B.15 y B.16).

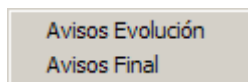


Figura B.15 Barra de menús. `Avisos_Pantalla`

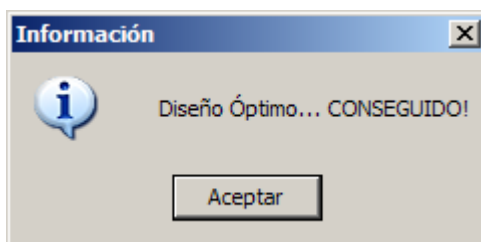


Figura B.16 Barra de menús. `Avisos_Pantalla>Avisos Final`

En el menú de `Ayuda` podemos encontrar información relativa a la versión del programa MFAG (Fig. B.17).

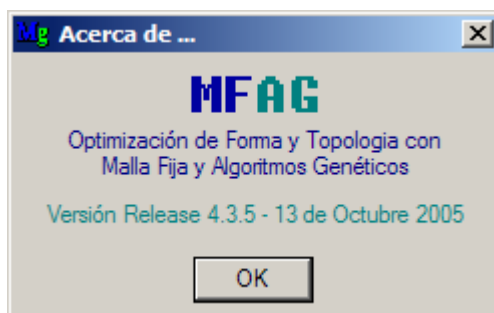























Figura B.17 Barra de menús. `Acerca de...`

B.2.3 Barra de botones

La barra de botones (zona C, Fig. B.4) contiene un total de 21 botones:

-  Carga un fichero de datos.
-  Abre un fichero de datos.
-  Inicia el proceso de optimización.
-  Abre un fichero de resultados.
-  Muestra la malla de elementos finitos.
-  Representa los elementos finitos no optimizables.

-  Representa los contornos de la estructura.
-  Numera nodos.
-  Condiciones de apoyos.
-  Cargas aplicadas.
-  Mapa de isocontornos para la tensión normal en nodos.
-  Mapa de isocontornos para la tensión normal no axial en nodos.
-  Mapa de isocontornos para las tensiones tangenciales en nodos.
-  Mapa de isocontornos para la energía de deformación en nodos.
-  Mapa de isocontornos para la densidad de energía de deformación en nodos.
-  Mapa de isocontornos para la tensión de Von Mises en nodos.
-  Mapa de isocontornos de la distribución de material.
-  Mapa de isocontornos para los desplazamientos en dirección horizontal.
-  Mapa de isocontornos para los desplazamientos en dirección vertical.
-  Mapa de isocontornos para los desplazamientos totales.
-  Sale del programa MFAG.

B.3 ENTRADA DE DATOS

La entrada de datos del programa MFAG se realiza mediante pulsación en pantalla, y archivos de datos. Al escribir los archivos de datos se deben tener en cuenta:

1. La extensión para los archivos de datos será preferiblemente “.dat”.
2. Los archivos de datos están formados por datos y comentarios, organizados según una secuencia estricta.
3. Se pueden introducir comentarios en cualquier punto del archivo de datos utilizando el carácter “!”.

Ejemplo: vigaTablero.dat

```
! NOTAS:      algoritmo de optimización de topología isoAG,
!             estrategia evolucionaria... tensión de Von Mises,
!             puntos de integración: 2x2,
!             autores para Referenciar: Q.Q. Liang, G.P. Steven.
!
! geometría (longitud, altura, espesor)
180.d0  60.d0  0.3
! límites geométricos variables diseño (limSup_fSup, limInf_fSup, limSup_fInf, limInf_fbInf)
16.d0  0.d0  0.d0  0.d0
! contorno superior (Ksup/coordKxSup/keysup/inKSup)
3
0.d0   4.5d0  5.d0
1  0  0
8  0
! contorno inferior (Kinf/coordKxInf/keyinf/inKInf)
2
```

```

0.d0 5.d0
0 0
0
! algoritmo genético simple (paso,tamPob,pCruce,pMut,pInv,popConv,Gen,Pseu)
0.0625d0 1 0.d0 0.d0 0.d0 0.d0 1 1
! modelo de elementos finitos (elemX,elemY,Ein,Eout,poi/flagT,alphaT)
90 30 200.d9 200.d5 0.3d0
0 0.5d0
! condiciones especiales en elementos (numFijos/elemFijos(fila,columna,flag))
2
16 1 1
16 2 1
! funcion aptitud (fibPtosCrt/SmaxAdm,ampPnlz/nDspCrit,keyDsp,dimRef/nodDspCrit,pesos)
0
0.6625d0 10.d0
2 1 225.d0
1221 1188
0.8d0 0.2d0
! topologia (maxHol,RRi,dRRi,difVolMin,Sback,Sforw,numRefCav/redVolFin,redVolIni,dVol)
50 0.6d0 0.01d0 0.05d0 0.95d0 1.05d0 1
0.625d0 0.15d0 0.00005d0
! algoritmo genético avanzado
$ ga
irestrt = 0,
microga = 0,
npopsiz = 10,
nparam = 1,
pmutate = 0.0025d0,
maxgen = 75,
idum = -10000,
pcross = 0.85d0,
itourny = 0,
ielite = 1,
icreep = 0,
pcreep = 0.04d0,
iunifrm = 0,
iniche = 0,
nchild = 1,
iskip = 0,
iend = 0,
nowrite = 0,
kountmx = 5,
parmin = 1*-0.025d0,
parmax = 1*+0.025d0,
nposibl = 1*1024,
nichflg = 1*1,
tipFunc = 0,
subStep = 1,
cPnlz = 0.00001d0,
restTens = 260.d0
$ end
! desplazamientos restringidos (nodDspRest,NODPRmod,INPREmod,PRESCmod)
4
16 0 1 0.d0 0.d0
17 0 1 0.d0 0.d0
18 0 1 0.d0 0.d0
30 1 1 0.d0 0.d0
! nodos en carga (numNodCargados/LODPTmod,PNODTmod(fX,fY))
5
16 0.d0 -250000.d0
47 0.d0 -500000.d0
78 0.d0 -500000.d0
109 0.d0 -500000.d0
140 0.d0 -500000.d0

```

B.4 FICHEROS DE RESULTADOS

A continuación, se muestra el contenido de los ficheros de resultados `rstOptimizacion.txt` y `rstAnálisis.txt`, cuya gestión se puede realizar mediante cualquier editor compatible con el código ASCII, o con el editor disponible en el programa MFAG.

B.4.1 Resultados del análisis

***** ESTADÍSTICA *****

NÚMERO DE PUNTOS NODALES (NPNOD): 11781
 NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS (NELEM): 11552
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS (NPRES): 77
 NÚMERO DE CASOS DE CARGA (NCARG): 1
 IDENTIFICACIÓN TIPO ELEMENTO (NTIPO): 1
 NÚMERO DE NODOS POR ELEMENTO (NNODE): 4
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NODO (NGDLN): 2
 NÚMERO DE MATERIALES DIFERENTES (NMATS): 11552
 PROPIEDADES ASIGNADAS POR MATERIAL (NPROP): 3
 ORDEN CUADRATURA INTEGRACIÓN NUMÉRICA (NGAUS): 2
 NÚMERO DIMENSIONES DEL PROBLEMA (NDIME): 2
 NÚMERO DE TENSIONES (NTENS): 5
 NÚMERO DE VARIABLES POR ELEMENTO (NEVAB): 8
 NÚMERO DE PROBLEMAS (NPROB): 10

***** ELEMENTOS *****

| ELEM | PROP | NODOS | | | |
|------|------|-------|----|---|-------|
| 1 | 1 | 78 | 79 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 79 | 80 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 80 | 81 | 4 | 3 |
| 4 | 4 | 81 | 82 | 5 | 4 ... |

***** NODOS *****

| NODO | X | Y |
|------|---------|------------|
| 1 | 200.000 | 100.000 |
| 2 | 200.000 | 98.684 |
| 3 | 200.000 | 97.368 |
| 4 | 200.000 | 96.053 ... |

***** GRADOS DE LIBERTAD RESTRINGIDOS *****

| NODO | UX | UY | VALOR | |
|-------|----|----|-------|-----------|
| 11781 | 1 | 1 | 0.000 | 0.000 |
| 11780 | 1 | 1 | 0.000 | 0.000 |
| 11779 | 1 | 1 | 0.000 | 0.000 |
| 11778 | 1 | 1 | 0.000 | 0.000 ... |

***** CONSTANTES REALES PROBLEMA: 1 *****

| REAL | YOUNG | POIS | ESP |
|------|-----------|------|------------------|
| 1 | 0.210E+08 | 0.30 | 0.100000E+01 |
| 2 | 0.210E+08 | 0.30 | 0.100000E+01 |
| 3 | 0.210E+08 | 0.30 | 0.100000E+01 |
| 4 | 0.210E+08 | 0.30 | 0.100000E+01 ... |

***** FUERZAS TOTALES NODALES EQUIVALENTES/ELEMENTALES *****

| | | | | | |
|---|------------|------------|------------|------------|----------------|
| 1 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 |
| 2 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 |
| 3 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 |
| 4 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 ... |

***** DESPLAZAMIENTOS *****

| NODO | UX | UY |
|------|--------------|-------------------|
| 1 | 0.566462E-03 | -0.178175E-02 |
| 2 | 0.551123E-03 | -0.178175E-02 |
| 3 | 0.535781E-03 | -0.178174E-02 |
| 4 | 0.520446E-03 | -0.178172E-02 ... |

***** TENSIONES PUNTOS INTEGRACION *****

| ELEM: 1 | XGAUSS | YGAUSS | SX | SY | SXY | SZ | SVM |
|---------|---------|--------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 198.962 | 99.722 | -0.29590E-01 | -0.20935E-01 | 0.30077E-01 | 0.00000E+00 | 0.58380E-01 |
| 2 | 199.722 | 99.722 | -0.33298E-01 | -0.33296E-01 | 0.25772E-01 | 0.00000E+00 | 0.55689E-01 |
| 3 | 198.962 | 98.962 | -0.17289E-01 | -0.17244E-01 | 0.34403E-01 | 0.00000E+00 | 0.62040E-01 |
| 4 | 199.722 | 98.962 | -0.20997E-01 | -0.29606E-01 | 0.30098E-01 | 0.00000E+00 | 0.58424E-01 |

```

ELEM: 2
1 198.962 98.406 -0.26026E-01 -0.10315E+00 0.77938E-01 0.00000E+00 0.16388E+00
2 199.722 98.406 -0.40294E-01 -0.15071E+00 0.64344E-01 0.00000E+00 0.17517E+00
3 198.962 97.646 -0.12813E-01 -0.91498E-01 0.94584E-01 0.00000E+00 0.19117E+00
4 199.722 97.646 -0.14549E-02 -0.13906E+00 0.80990E-01 0.00000E+00 0.19702E+00
...

```

B.4.2 Resultados de la optimización

```

nGen, VMmax, VMmed, VMmin, SEDmax, SEDmed, SEDmin, SEmax, SEmed, SEmin, ElemI, ElemO, ElemIO, Aptitud, FraVo
l, UXmax, UYmax, UXYmax, TimeSec, flag1
>>>
1 0.506223E+03 0.391640E+02 0.586331E-01 0.284892E-01 0.198923E-03 0.318276E-09
123308E-01 0.860990E-04 0.137758E-09 11552 0 0
0.492935E-04 1.000 -0.566681E-03 -0.191274E-02 0.191274E-02 30.75 1

```

B.5 ORDENADOR UTILIZADO

Todos los resultados que se muestran en esta tesis han sido obtenidos utilizando un ordenador portátil (Compaq Presario 2500) con procesador Pentium IV a 2,66 GHz y 768 MB de memoria RAM. El sistema operativo utilizado es Windows XP Home (32-bit).

Referencias bibliográficas

- Akin JE, Arjona-Baez J. Enhancing structural topology optimization. *Engineering Computations* 2001; **18**(3-4): 663-675.
- Alexandrov O, Santosa F. A topology preserving level set method for shape optimization. *J. Comp. Phys.* 2004; **204**: 121-130.
- Al-Tabtabai H, Alex AP. Using Genetic algorithms to solve optimization problems in construction. *Engineering Construction and Architectural Management* 1996; **6**(2): 121-122.
- Anido JC, Herskovits J, Feijó R, Taroco E. Otimização de Forma de Corpos Elásticos Planos para Redução de Concentração de Tensões. *XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia* 1991; **1**: 1061-1071.
- Annicchiarico W, Cerrolaza M. An evolutionary Approach for the Shape Optimization of General Boundary Elements Models. *Electronic Journal of Boundary Elements* 2002; **BETEQ** 2001; **2**: 251-256.
- Annicchiarico W, Cerrolaza M. Finite Elements, Genetic Algorithms and β -Splines: A Combined Technique for Shape Optimization. *Journal of Finite Elements in Analysis and Design* 1999; **33**: 125-141.
- Annicchiarico W, Cerrolaza M. Structural shape optimization 3D finite-element models based on genetic algorithms and geometric modelling. *Finite Elem. Anal. Des.* 2001; **37**(5): 403-415.
- Ansola R. *Procedimiento integrado para el diseño óptimo de forma y topología de estructuras laminares*. Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao, 2000.

- ANSYS®. Release 10.0 UP20050718. ANSYS, Inc. is a UL registered ISO 9001:2000 Company. Copyright SAS IP, Inc. All rights reserved, 2005.
- Argyris JH, Kelsey S. *Energy theorems and structural analysis*. Butterworth, 1960.
- Arora JS. Structural Design Sensitivity Analysis: Continuum and Discrete Approaches *Advances in Structural Optimization* 1995; 47-70.
- Aymler R. *The Genetical Theory of Natural Selection*. Oxford University Press, 1930.
- Bäck T. *Evolutionary Algorithms in theory and practice: evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms*. Oxford University Press Oxford: New York, 1996.
- Bäck T, Fogel DB, Michalewicz Z. *Handbook of evolutionary computation*. Oxford University Press: New York, 1997.
- Bäch T, Schütz M. Intelligent mutation rate control in canonical genetic algorithms. *Foundations of Intelligent Systems* 1996; **1079**: 158-167.
- Baker JE. Adaptive selection methods for genetic algorithms. *Proc. of the 1st Int. Conf. on Genetic Algorithms* 1985.
- Ball NR, Sargent PM, Ige DO. Genetic algorithm representations for laminate layups. *Artificial Intelligence in Engineering* 1993; **8**: 99-108.
- Belytschko T, Xiao SP, Parimi C. Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2003; **57**: 1177-1196.
- Bendsøe MP. *Optimisation of structural topology, shape and material*. Springer: Berlin, 1995.
- Bendsøe MP. *Variable-topology optimization: status and challenges*. Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics ECCM'99. W. Wunderlich (Ed.): Munich, 1999.
- Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1988; **71**: 197-224.
- Bendsøe MP, Kikuchi N. Topology and generalized layout optimization of elastic structures. *Topology Design of Structures* 1993.
- Bendsøe MP, Sigmund O. *Topology optimization. Theory, methods and applications*. Springer: Berlin, 2003.
- Bennett JA, Botkin ME. Structural Shape Optimization with Geometric Description and Adaptive Mesh Refinement. *AIAA Journal* 1985; **23**(3): 458-464.
- Bentley PJ. *Evolutionary design by computers*. Morgan Kaufmann Publishers: San Francisco, CA, 2002.
- Bledsoe WW. *The use of biological concepts in the analytical study of systems*. ORSA-TIMS National Meeting: San Francisco, 1961.

- Boissonnat JD, Yvinec M. *Géométric algorithmique*. Ediscience International, 1995.
- Borrvall T, Petterson J. Large-scale topology optimization in 3D using parallel computing, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 2001; **190**: 6201-6229.
- Bourke P. CONREC a Contouring Subroutine. *BYTE the small system journal*, 1987.
- Box GEP. Evolutionary operation: A method for increasing industrial productivity. *Journal of the Royal Statistical Society* 1957; **6**(2): 81-101.
- Braibant V, Sander G. Efficient Strategies for Shape Optimization of Structures. *Aerospace Laboratory of the University of Liege* 1986; Report SA-120.
- Bremermann HJ. *Optimization through evolution and recombination*. Self-Organizing Systems. Yovits MC, Jacobi GT, Goldstein GD, eds. Spartan Books, 1962.
- Bremermann HJ, Rogson M, Salaff S. Global properties of evolution processes. *Natural Automata and useful simulations* 1966; 3-41.
- Bruns TE, Tortorelli DA. An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2003; **57**: 1413-1430.
- Bulman S, Sienz J, Hinton E. Comparisons between algorithms for structural topology optimization using a series of benchmark studies. *Computers and Structures* 2001; **79**: 1203-1218.
- Burczyński T, Kokot G. The evolutionary optimisation using genetic algorithms and boundary elements. *Proceedings of the 3rd WCSMO* 1999.
- Carroll DL. Chemical laser modelling with genetic algorithms. *AIAA Journal* 1996; **34**(2): 338-346.
- Carroll DL. FORTRAN GA driver. University of Illinois at Urbana-Champaign. Internet source: <http://www.staff.uicc/carroll/ga.html>, 1997.
- Carroll DL. Genetic algorithms and optimizing chemical oxygen-iodine lasers. *Developments in Theoretical and Applied Mechanics* 1996; **17**.
- Casillas J, Cordon O, Herrera F, Villar P. Aprendizaje híbrido de la base de conocimiento de un sistema basado en reglas difusas mediante algoritmos genéticos y colonias de hormigas. *XII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy* 2004.
- Castejón PM. *Diseño óptimo simultáneo de topología y geometría de estructuras articuladas mediante técnicas de crecimiento*. Tesis Doctoral. Departamento de Estructuras y Construcción, Universidad Politécnica de Cartagena: Cartagena, 2003.
- Cerny V. Thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm, *J. Optim. Theory Appl.* 1985; **45**: 41-51.
- Cerroloza M, Annicchiarico W, Martínez M. Optimization of 2D boundary element models

- using b-splines and genetic algorithms. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2000; 24: 427-440.
- Compaq®. *Compaq Fortran. Language Reference Manual*. Compaq Computer Corporation: Houston, Texas, 1999.
- Cotta C, Troya JM. On Decision-Making in Strong Hybrid Evolutionary Algorithms. *Tasks and Methods in Applied Artificial Intelligence* 1998; 418-427.
- Croce FD, Tadei R, Volta G. A genetic algorithm for the job shop problem. *Computer and Operations Research* 1995; 22(1): 15-24.
- Cui C, Ohmori H, Sasaki M. Computational Morphogenesis of 3D Structures by Extended ESO Method. *Journal of International Association for Shell and Spatial Structural* 2003; 44 (141): 51-61.
- Chang KH, Choi KK. A geometry-based parameterization method for shape design of elastic solids. *Mech. Struct. and Mach.* 1992; 20: 251-252.
- Chapman CD, Jakiela MJ. Genetic algorithm-based structural topology design with compliance and topology simplification considerations. *Journal of Mechanical Design* 1995.
- Chapman CD, Saitou K, Jakiela MJ. Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design. *Journal of Mechanical Design* 1994; 116: 1005-1012.
- Chapman CD, Saitou K, Jakiela MJ. Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design. *Proceedings of the ASME 19th Design Automation Conference: Advances in Design Automation* 1993; 485-98.
- Chapman SJ. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. Mc Graw-Hill, 2004.
- Chen BC, Kikuchi N. Topology optimization with design-dependent loads. *Finite Elements in Analysis and Design* 2001; 37: 57-70.
- Chen SY, Rajan SD. Using Genetic Algorithm as an automatic structural design tool. *Proceeding of the 3rd WCSMO* 1999.
- Chu DN, Xie YM, Hira A, Steven GP. Evolutionary structural optimization for problem with stiffness constraints. *Finite elements in Analysis and Design* 1996; 21: 239-251.
- Darwin C. *On the Origin of Species*. Jhon Murray, Albemarle Street: London, 1859.
- Dasgupta D, MacGregor D. A structured genetic algorithm. *Computational Models of Creative Design IV* 1991; IKBS 2-91.
- Davis L. *Handbook of Genetic Algorithms*. Van Nostrand Reinhold Computer Library: New York, 1991.
- De Jon KA, Spears WM, Gordon DF. Using Markov chains to Analyze GAFOs. *Proceedings of the 3rd Foundations of Genetic Algorithms Workshop* 1994.

- De Jon KA, Spears WM. A Formal Analysis of the Role of Multi-point Crossover in Genetic Algorithms. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence Journal* 1992; **5**(1): 1-26.
- De Jong K. *Analysis of behaviour of a class of genetic adaptive systems*. Ph. D. Thesis. University of Michigan: Ann Arbor, 1975.
- De Jong KA. *Evolutionary computation: a unified approach*. Bradford Book, 2006.
- Deb K, Goel T. A hybrid multi-objective evolutionary approach to engineering shape design. *Proceedings of the First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO_2001)* 2001; 385-99.
- Deb K, Goldberg DE. An Investigation of Niche and Species Formation in Genetic Function Optimization. *Proceedings of the 3rd (ICGA_1989)* 1989; 42-50.
- Dejonghe J. Allégement de platines métalliques par algorithmes génétiques. *Rapport de stage d'option B2 de l'Ecole Polytechnique* 1993.
- Dems K, Mróz Z. On Shape Sensitivity Approaches in the Numerical Analysis of Structures. *Structural Optimization* 1993; **6**(1): 86-93.
- Dems K, Mróz Z. Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis. *International Journal of Solids and Structures* 1984; **20**(4): 527-552.
- Ding Y. Shape Optimization of Structures. A Literature Survey. *Computer and Structures* 1986; **24**(6): 985-1004.
- Dorn WC, Gomory RE, Greenberg HJ. Automatic Design of optimal structures. *J. Mec.* 1964; **3**: 25-52.
- Dorndoft U, Pesch E. Evolution based learning in a job scheduling environment. *Computer and Operations Research* 1995; **22**(1): 25-40.
- Eschenahuer HA. Structural optimization-a need in design process?. *Engineering optimization in design process, proceedings of the international conference* 1990; 1-3.
- Eschenauer HA, Schumacher A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization* 1994; **8**: 42-51.
- Eshelman LJ. The CHC adaptive search algorithm: how to have safe search when engaging in nontraditional genetic recombination. *Proceedings of the Second Workshop on Foundations of Genetic Algorithms* 1991; 265-83.
- Flemming W. *Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung*. FCW Vogel: Leipzig, 1882.
- Fogel DB. *Evolutionary Computation: Toward a new philosophy of machine intelligence*. IEEE press: New Jersey, 1995.
- Fogel DB. *Evolving artificial intelligence*. Ph. D. Thesis. University of California: San Diego, 1992.

- Fogel LJ, Owens AJ, Walsh MJ. *Artificial intelligence through simulated evolution*. Wiley: New York, 1966.
- Foley JD, Van Damm A, Feiner SK, Hughes JF, Phillips RL. *Introducción a la graficación por computador*. Addison Wesley, 1996.
- Forrest S. Genetic algorithms: principles of natural selection applied to computation. *Science* 1993; **261**: 872-878.
- Fourie PC, Groenwold AA. Particle swarms in size and shape optimization. *Proc. Workshop on Multidisciplinary Design Optimization* 2000; 97-106.
- Fourie PC, Groenwold AA. The particle swarm algorithm in topology optimization. *Proc. Fourth World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* 2001; 154.
- Francavilla A, Ramakrishnan CV, Zienkiewicz OC. Optimization of shape to minimize stress minimize stress concentration. *Journal of Strain Analysis* 1975; **10**: 63-70.
- Friedman GJ. Digital simulation of an evolutionary process. *General Systems Yearbook* 1959; **4**: 171-184.
- Furuta H, He J, Watanabe E. A fuzzy expert system for damage assessment using genetic algorithms and neural networks. *Microcomputers in Civil Engineering* 1996; **11**: 37-45.
- Galilei G. *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno, a due nuove scienze attenenti alla meccanica et i movimenti locali*. Leida, 1638.
- García MJ, Gonzalez CJ. Shape Optimization of continuum structures via evolution strategies and fixed grid finite element analysis. *Struct. Multidisc. Optim.* 2004; **26**(1-2): 92-98.
- García MJ, Ruíz OE, Steven GP. Engineering Design Using Evolutionary Structural Optimization Based On Iso-Stress-Driven Smooth Geometry Removal. *NAFEMS (Intl. Assoc. Eng. Analysis Community) World Congress* 2001.
- García MJ. *Fixed Grid Finite Element Analysis in Structural Design and Optimisation*. Ph. D. Thesis. Departament of Aeronautical Engineering: University of Sidney, 1999.
- García Ruiz MJ, Steven GP. Fixed Grid finite elements in elasticity problems. *Engineering Computations* 1999; **16**(2): 145-164.
- García Ruiz MJ, Steven GP. Interactive aerospace design using fixed grid finite element analysis. *International Aerospace Congress* 1997.
- García Ruiz MJ, Steven GP. Optimisation of structures by using fixed grid representation of the finite element domain. *Australasian Conference on Structural Optimisation* 1998.
- Gätzi R, Uebersax M, König O. Structural Optimization Tool Using Genetic Algorithms and Ansys. *CAD-FEM User's Meeting Schweiz* 2000.
- Gellatly RM, Berke L. *Optimum structural design: theory and applications*. Gallager and Zienkiewicz Eds.: New York, 1973.

- Gere JM. *Resistencia de Materiales*. Thomson Editores Spain. Paraninfo, 2002.
- Goldberg DE, Deb K, Clark JH. Accounting for noise in the sizing of populations. *Foundations of Genetic Algorithms* 1992; **2**: 127-140.
- Goldberg DE, Deb K, Clark JH. Genetic algorithms, noise, and the sizing of populations. *Complex systems* 1992; **6**: 333-362.
- Goldberg DE, Deb K, Korb B. Don't Worry, Be Messy. *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms* 1991; 24-30.
- Goldberg DE, Korb B, Deb K. Messy genetic algorithms: motivation, analysis, and first results. *Complex Syst.* 1989; **3**(5): 493-530.
- Goldberg DE. *Genetic Algorithm in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1989.
- Goldberg DE. Sizing populations for serial and parallel genetic algorithms. *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Genetic Algorithms* 1989; 70-79.
- Grefenstette JJ. Optimization of control parameters for genetic algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 1986; **16**(1): 122-128.
- Haber RB, Jog CS, Bendsøe MP. A New Approach to Variable-Topology Shape Design Using a Constraint on Perimeter. *Structural Optimisation* 1996; **11**: 1-12.
- Hadj-Alouane AB, Bean JC. A genetic algorithm for the multiple-choice integer program. *Operations Research* 1997; **45**: 92-101.
- Haftka RT, Adelman HM. Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis. *Structural Optimization* 1989; **1**(2): 137-151.
- Haftka RT, Grandhi RV. Structural shape optimisation—a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1986; **57**(1): 91-106.
- Hamda H, Jouve F, Lutton E, Schoenauer M, Sebag M. Compact unstructured representations for evolutionary topological optimum design. *Appl. Intell.* 2002; **16**: 139-155.
- Hamda H, Roudenko O, Schoenauer M. Multi-objective evolutionary topological optimum design. *Proceedings of the Fifth International Conference on Adaptive Computing Design and Manufacture* 2002; 121-132.
- Hamda H, Schoenauer M. Adaptive techniques for Evolutionary Topological Optimum Design. *ACDM 2000* 2000.
- Hancock PJB. An empirical comparison of selection methods in evolutionary algorithms. *Evolutionary Computing* 1994.
- Hasançebi O, Erbatur F. Layout optimisation of trusses using simulated annealing. *Advances in Engineering Software* 2002; **33**: 681-696.
- Hassani B, Hinton E. *Homogenization and structural topology optimization*. Springer-Verlag:

- Berlin, 1999.
- Haug EJ, Choi KK, Komkov V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press: New York, 1986.
- Hemp WS. *Optimum structures*. Clarendon Press: Oxford, 1973.
- Herskovits J. *Advances in Structural Optimization*. Kluwer Academic Publications: Netherlands, 1995.
- Hesser J, Männer R. Towards an optimal mutation probability for genetic algorithms. *Proceedings of 1st Conference on Parallel Problem Solving from Nature* 1991; 23-32.
- Hinton E, Sieng J. Aspects of Adaptive Finite Element Analysis and Structural Optimization. *Advances in Structural Optimization* 1994; 1-25.
- Hinton E, Sieng J. Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure. *Engrg. Comput.* 1995; **12**: 229-244.
- Hoffmeister F, Sprave J. Problem-independent handling of constraints by use of metric penalty functions. *Proceedings of the Fifth Annual Conference on Evolutionary Programming (EP'96)* 1996; 289-294.
- Holland JH. *Adaptations in natural and artificial systems*. University of Michigan Press: Ann Arbor, 1975.
- Holland JH. Outline for a logical theory of adaptive systems. *J. ACM.* 1962; **9**: 297-314.
- Homaifar A, Lai SHY, Qi X. Constrained optimization via genetic algorithms. *Simulation* 1994; **62**(4): 242-254.
- Horby GS. *Generative representations for evolutionary design automation*. Ph. D. Dissertation. Department of Computer Science. Brandeis University: Waltham, 2003.
- Horn J, Goldberg DE, Kalyanmoy D. Implicit Niching in a Learning Classifier System: Nature's Way. *Evolutionary Computation* 1994; **2**(1): 37-66.
- Hsu YL, Hsu MS, Chen CT. Interpreting results from topology optimization using density contours. *Computers and Structures* 2001; **79**: 1049-1058.
- Hsu MH, Hsu YL. Interpreting three-dimensional structural topology optimization results. *Computers and Structures* 2005; **83**: 327-337.
- Jakiela M, Chapman C, Duda J, Adewuya A, Saitou K. Continuum structural topology design with genetic algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 2000; **186**: 339-356.
- Janson DJ, Frenzel JF. Training product unit neural networks with genetic algorithm. *IEEE Expert* 1993; 26-32.
- Jenkins WM. Towards Structural Optimization Via the Genetic Algorithm. *Computers and Structures* 1991; **40**(5): 1321-1327.
- Jensen J. *Topological Structural Design using Genetic Algorithms*. Ph. D. Thesis. Purdue

- University, 1992.
- Joines J, Houck C. On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with Gas. *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation* 1994; 579-584.
- Julstrom BA. What have you done for me lately?. Adapting operator probabilities in a steady-state genetic algorithm. *Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms* 1995; 81-87.
- Kamiya N, Kita E. Shape optimization by coupling finite and boundary element method. *Proceedings 9th BEM conference* 1987; **2**: 473-484.
- Kane C, Schoenauer M. Topological Optimum Design using Genetic Algorithms. *Control and Cybernetics* 1996; **25**(5).
- Kazarlis S, Petridis V. Varying fitness functions in genetic algorithms: Studying the rate of increase of the dynamic penalty terms. *Parallel Problem Solving from Nature V* 1998.
- Keane AJ. Genetic Algorithm optimization of multipeak problems: studies in convergence and robustness. *Artificial Intelligence in Engineering* 1995; **9**: 75-83.
- Kennedy J, Eberhart R. C. Particle swarms optimization. *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks* 1995; 1942-1948.
- Kim H, Querin OM, Steven GP, Xie YM. A method for varying the number of cavities in an optimised topology using evolutionary structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2000; **19**: 140-147.
- Kim H, Querin OM, Steven GP, Xie YM. Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities, in *CD-ROM proceedings of the 8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization* 2000.
- Kim H, Querin OM, Steven GP, Xie YM. Improving efficiency of evolutionary structural optimization by implementing fixed grid mesh *Struct. Multidisc.* 2003; **24**: 441-448.
- Kim H. *Development of evolutionary structural optimization: improvement practicality and applicability as a design tool*. Ph. D. Thesis. Department of Aeronautical Engineering, University of Sidney: Australia, 2000.
- Kim H, García MJ, Querin OM, Steven GP, Xie YM. Fixed Grid Finite Element Analysis in Evolutionary Structural Optimization. *WCSMO 3* 1999.
- Kim H, García MJ, Querin OM, Steven GP. Introduction of fixed grid in evolutionary structural optimisation. *Engineering Computations* 2000; **17**: 427-439.
- Kim JH, Myung H. Evolutionary programming techniques for constrained optimization problems. *IEEE Trans. Evol. Comput.* 1997; **1**: 129-140.
- Kim LY, de Weck OL. Variable chromosome length genetic algorithm for progressive

- refinement in topology optimization, *Structural. Multidisciplinary Optimization* 2005; DOI 10.1007/s00158-004-0498-5.
- Kim NH, Chang Y. Eulerian shape design optimization with fixed grid. *44th AIAA/ASME/ASCE/ASC Structure, Structural Dynamics, and Materials Conference* 2003.
- Kim NH, Chang Y. Eulerian shape design sensitivity analysis and optimization with a fixed grid. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering* 2005; **194**: 3291-3314.
- Kirkpatrick S, Gellat CD, Vecchi MP. Optimization by simulated annealing. *Science* 1983; **220**(4598): 671-680.
- Kita E, Tanie H. GA-based topology optimization of continuum structures. *Proceedings of the Australasian Conference on Structural Optimization* 1998; 87-94.
- Kita E, Tanie H. Topology and shape optimization of continuum structures using GA and BEM. *Structural Optimization* 1999; **17**: 130-139.
- Kohn RV, Strang G. Optimal design relaxation of variational problems I-II-III. *Comm. Pure Appl. Math.* 1986; **39**: 113-117, 139-182, 353-377.
- Koumoussis VK, Georgiou PG. Genetic algorithms in discrete optimization of steel truss roofs. *Journal of Computing in Civil Engineering* 1994; **8**(3): 309-325.
- Koza J. *Genetic Programming*. MIT Press: Cambridge, MA, 1992.
- Koza J. *Genetic Programming II: Automatic Discovery of Reusable Programs*. MIT press, 1994.
- Krishnakumar K. Micro genetic algorithms for stationary and non stationary function optimization. *SPIE Proc. Intelligent control and adaptive systems* 1989; **1196**: 289-296.
- Kristensen ES y Madsen NF. On the Optimum Shape of Fillets in Plates Subjected o Multiple In-Plane Loading Cases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1976; **10**(7): 1007-1019.
- Lemonge ACC, Barbosa HJC. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2004; **59**: 703-736.
- Lencus A, Querin OM, Steven GP, Xie YM. Aircraft wing design automation with ESO and GESO. *Int. J. Vehicle Design* 2002; **28**(4): 356-369.
- Lencus A, Querin OM, Steven GP, Xie YM. Group ESO with Morphing. *1st ASMO UK/ISSMO Conference on Engineering Design Optimization* 1999.
- Liang QQ, Steven GP. A performance-based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints. *Computer methods in applied mechanics and Engineering* 2002; **191**: 1471-1489.
- Lin CY, Chao LS. Automated image interpretation for integrated topology and shape

- optimization. *Struct. Multidisc. Optim.* 2000; **20**: 125-137.
- Lin C-Y, Chao L-S. Constant-weight fully stressed methods for topological design of continuum structures. *Computer methods in applied mechanics and Engineering* 2001; **190**: 6867-6879.
- Liu C, Hammad A, Itoh Y. Maintenance strategy optimization of bridge decks using genetic algorithm. *Journal of Transportation Engineering* 1997; **123**(2), 91-100.
- Lurie K, Cherkaev A. Effective characteristics of composite materials and the optimal design of structural elements. *Uspekhi. Mekh.* 1986; **9**: 3-81.
- Matteck C, Burkhardt S. A new method of structural shape optimization based on biological growth. *Int. Journal of Fatigue* 1990; **12**(3): 185-190.
- Matteck C. Engineering Components Grow Like Trees. *Mat. wiss. U. Werkstoffech* 1990; **21**: 143-168.
- Maute K, Ramm E. Topology optimization of plate and shell structures. *Proceedings of the IASS-ASCE International Symposium* 1994.
- Mendel G. Versuche uber Pflanzen-Hybriden. *Verh. Naturforsch. Ver. Brunn* 1865; **4**: 3-47.
- Metcalf M, Reid J. *Fortran 90/95 Explained*. Oxford University Press, 2002.
- Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN, Teller AH, Teller E. Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Physics* 1953; **21**(6): 1087-1092.
- Michalewicz Z. *Genetic Algorithms+Data Structures=evolution Programs*. Springer-Verlag, 1992.
- Michell AGM. The limits of economy of materials in frame-structures. *Philos. Mag.* 1904; **8**: 587-597.
- Ming Chen, Qiang Lu. A coevolutionary model based on dynamic combination of genetic algorithm and ant colony algorithm. *Sixth International Conference on Parallel and Distributed Computing Applications and Technologies (PDCAT'05)* 2005; 941-944.
- Missoum S, Gurdal Z, Hernandez P, Guillot J. A Genetic Algorithm based topology tool for continuum structures. *Proceedings of the 8th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimisation* 2000.
- Morales A, Quezada CV. A universal eclectic genetic algorithm for constrained optimization. *Proceedings of the 6th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing EUFIT'98* 1998; 518-522.
- Morris AJ. *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach*. John Wiley and Sons: Chichester, 1982.
- Mota Soares CA, Choi KK. Boundary elements in shape optimal design of structures. *The optimum shape: Automated structural design* 1986; 199-236.

- Mühlenbein H, Schlierkamp-Voosen D. Predictive models for the breeder genetic algorithms. Continuous parameter optimization. *Evolution Computat.* 1993; **1**(1): 25-49.
- Mühlenbein H. How genetic algorithms really work: I. mutation and hillclimbing. *Proceedings of the 2nd Conference on Parallel Problem Solving from Nature* 1992; 15-25.
- Muiños I. *Optimización Topológica de Estructuras: Una Formulación de Elementos Finitos para la Minimización del Peso con Restricciones en Tensión*. Proyecto Técnico, ETSICCP: Universidad de A Coruña, 2001.
- Murat F, Tartar L. Calcul des variations e homogénéisation. *Les Méthodes de l'Homogénéisation Théorie et Applications en Physique* 1985. Coll. Dir. Etudes et Recherches EDF; **57**: 319-369.
- Nanakorn P, Meesomklin K. An adaptive penalty function in genetic algorithms for structural design optimization. *Computer and Structures* 2001; **79**: 2527-2539.
- Navarrina F, Muiños I, Colominas I, Casteleiro M. Optimización topológica de estructura: una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. *Métodos numéricos en ingeniería V* 2002.
- Oberndorfer JM, Achtziger W, Hörnlein HREM. Two approaches for truss topology optimization: a comparison for practical use. *Structural Optimization* 1996; **11**: 137-144.
- Oda J. On a technique to obtain an optimum strength shape by the finite element method. *Bulletin of the JSME* 1977; **20**:160-167.
- Olhoff N, Eschenauer HA. On optimum topology design in mechanics. *European Conference on Computational Mechanics* 1999; 161-231.
- Olhoff N, Lund E. Finite Element Based Engineering Design Sensitivity Analysis and Optimization. *Advances in Structural Optimization* 1995; **1**: 1-45.
- Oñate E. *Cálculo de estructuras por el Método de los Elementos Finitos, análisis estático lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería: Barcelona, 1995.
- Papadrakakis M, Tsompanakis Y, Hinton E, Sienz J. Advanced solution methods in topology optimization and shape sensitivity análisis. *Engineering Computation* 1996; **13**(5): 57-90.
- Papadrakakis M, Tsompanakis Y, Lagaros ND. Structural Shape optimization using evolution strategies. *Eng. Optim.* 1991; **31**: 515-540.
- Popovici E. The bleeding edge of inventive design. *Computer Science Technical Report* 2003.
- Prendes MB, Bello A, Del Coz JJ. A modified elitist genetic algorithm applied to the design optimization of complex steel structures. *Journal of Constructional Steel Research* 2005; **2**: 265-280.
- Prendes MB, Bello A, Del Coz JJ. Entorno gráfico para la optimización de estructuras metálicas en base a algoritmos genéticos. *XIV Congreso Internacional de Ingeniería*

Gráfica 2002.

- Querin OM, Lencus A. Optimisation of Structures Subject to Multiple Load Cases Using Biological Growth Laws. *SORGA Structural Optimisation Notes* 1998.
- Querin OM, Steven GP, Xie YM. Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. *Finite elements in Analysis and Design* 2000; **34**: 291-308.
- Querin OM, Steven GP, Xie YM. Morphing Evolutionary Structural Optimisation (MESO). *1st ASMO UK/ISSMO conference on Engineering Design Optimization* 1999.
- Ramakrishnan CV, Francavilla A. Structural shape optimization using penalty functions. *J. Struct. Mech.* 1975; **3**(4): 403-422.
- Rasmussen J. Shape Optimization and CAD. *International Journal of Systems Automation: Research and Applications (SARA)* 1991; **1**: 33-35.
- Rechenberg I. *Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem*. Ministry of Aviation. Royal Aircraft Establishment: UK, 1965.
- Reeves CR. *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. Blackwell Scientific Publications: Oxford, 1993.
- Reynolds D, Christie WC, Bettess P, McConnachie J, Bull JW. Evolutionary material translation: A tool for the automatic design of low weight, low stress structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 2001; **50**: 147-167.
- Reynolds D, McConnachie J, Bettess P, Christie WC, Bull JW. Reverse Adaptivity-A new evolutionary tool for structural optimization. *International Journal for numerical method in engineering* 1999; **45**: 529-552.
- Richards R, Sheppard SD. Learning classifier systems in design optimization. *Proceedings of the 1992 Design Theory and Methodology Conference* 1992; 179-86.
- Rodriguez J, Seireg A. Optimizing the shapes of structures via a rule-based computer program. *ASME-Computers in Mechanical Engineering* 1985; **4**: 20-29.
- Rossow MP, Taylor JE. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. *AIAA J.* 1973; **11**: 1566-1569.
- Roston GP, Sturges RH. Genetic algorithm synthesis of four-bar mechanisms. *Analysis and Manufacturing* 1996; **10**: 371-390.
- Rothlauf F. *Representations for genetic and evolutionary algorithms*. Physica-Verlag: New York, 2002.
- Rozvany GIN, Bendsoe MP, Kirsch U. Layout optimization of structures. *Appl. Mech. Review* 1995; **48**(2): 41-119.
- Rozvany GIN, Querin OM. Present limitations and possible improvements of SERA (Sequential Element Rejections and Admissions) methods in topology optimization. *4th*

World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization 2001.

Rozvany GIN. *Structural design via optimality criteria*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1989.

Sandgren E, Jensen ED, Welton J. Topological design of structural components using genetic optimization methods. *Proceedings of the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, Sensitivity analysis and optimization with numerical methods 1990*; **115**: 31-43.

Sandgren E, Jensen ED. Automotive structural design employing a genetic optimization algorithm. *Proceedings of the III European 1992*.

Sia Y, Querin O. Structural shape optimization by using multi-direction boundary points movement method. *Proceedings of the III European Conference on Computational Mechanics 2006*; ID-1141.

Schaffer J, Caruana R, Eshelman L, Das R. A study of control parameters affecting online performance of genetic algorithms for function optimization. *Proceedings of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms 1989*; 51-60.

Schlierkamp-Voosen D, Mühlenbein H. Strategy adaption by competing subpopulations. *Proceedings of the 3rd Conference on Parallel Problem Solving from Nature 1994*; 199-208.

Schmit LA, Farshi B. Some Approximation Concepts for Structural Synthesis. *AIAA Journal 1974*; **12**: 692-699.

Schmit LA. Concluding Remarks. *The Optimum Shape Automated Structural Design, Plenum Press 1986*; 385-397.

Schoenauer M, Kallel L, Jouve F. Mechanical Inclusions Identification by Evolutionary Computation. *Revue européenne des éléments finis 1996*; **5**: 619-648.

Sethian JA, Wiegmann A. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. *J. Comp. Phys. 1999*; **163**: 489-528.

Shi Y, Eberhart RC. Parameter selection in particle swarms optimization. *The Seventh Annual Conference on Evolutionary Programming 1998*.

Srinivas M, Patnail LM. Genetic algorithms: a survey. *Computer 1994*; 17-26.

Stolpe M, Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Struct. Multidisc. Optim. 2001*; **22**: 116-124.

Suresh G, Vinod VV, Sahu S. A genetic algorithm for assembly line balancing. *Production Planning and Control 1996*; **7**(1): 38-46.

Suzuki K, Kikuchi N. A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1991*; **93**(3): 291-318.

- Svanberg K. Optimization of Geometry in Truss Design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1981; **28**: 63-80.
- Syswerda G. Uniform crossover in genetic algorithms. *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms* 1989; 2-8.
- Tate D, Smith A. A genetic approach to the quadratic assignment problem. *Computer and Operations Research* 1995; **22**(1): 73-83.
- Turner MJ, Clough RW, Martin H, Topp LJ. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeron. Sci.* 1956; **23**: 805-823.
- Van Le T. A fuzzy evolutionary approach to constrained optimization problem. *Proceedings of the Second IEEE Conference on Evolutionary Computation* 1995; 274-278.
- Vargas MC, Torres J, Ruiz JC. Analysis of x-ray diffraction data using a hybrid stochastic optimization method. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 2002; **35**: 3865-3876.
- Victoria M, Martí P. Optimización conjunta de forma y topología de estructuras continuas bidimensionales mediante algoritmos evolucionarios en multi-nivel. *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería* 2005.
- Victoria M, Martí P. Optimización de forma y topología con malla fija y algoritmos genéticos, *Métodos Computacionais Em Engenharia* 2004.
- Victoria M, Martí P. Topology optimization of bidimensional continuum structures by genetic algorithms and stress iso-lines. *Proceedings of the III European Conference on Computational Mechanics* 2006; ID-2452.
- Waagen D, Diercks P, McDonell J. The stochastic direction set algorithm: a hybrid technique for finding function extrema. *Proceedings of the 1st Annual Conference on Evolutionary Programming* 1992; 35-42.
- Wallace AR. On the law which has regulated the introduction of new species. *Annals and Magazine of Natural History* 1855; **16**: 184-196.
- Wang QJ. The genetic algorithm and its application to calibrating conceptual rainfall-runoff models. *Water Resources Research* 1991; **27**(9): 2467-2471.
- Wang SY, Tai K. Graph representation for structural topology optimization using genetic algorithms. *Computers and Structures* 2004; **82**: 1609-1622.
- Wang SY, Tai K. Structural topology design optimization using Genetic Algorithms with a bit-array representation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2005; **194**: 3749-3770.
- Watabe H, Okino N. A study of genetic shape design. *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms (ICGA_93)* 1993; 445-51.
- Watson JD, Crick, FHC. Molecular Structure of Nucleic Acids. *Nature* 1953; **171**: 737-738.

- White T, Oppacher F. Adaptive cross over using automata. *Proceedings of the 3rd Conference on Parallel Problem Solving from Nature* 1994; 229-238.
- Whitley D. *Foundations of genetic algorithms II*. Morgan Kaufmann: San Mateo, CA, 1993.
- Wibowo FXN, Besari MS. Genetic algorithms in shape optimization of oval axially symmetrical shells. *Proceedings of the Australasian Conference on Structural Optimization* 1998; 103-111.
- Winteracter®. *Programming Guide v6.10*. ISS Interactive Software Services Ltd., 2005.
- Woo HW, Kwon HH, Tahk MJ. A Hybrid Method of Evolutionary Algorithms and Gradient Search. *2nd International Conference on Autonomous Robots and Agents* 2004.
- Woon SY, Querin OM, Steven GP. Application of the Fixed-Grid FEA method to step-wise GA shape optimisation. *Proceedings of the 2nd ASMO UK / ISSMO Conference* 2000; 265-272.
- Woon SY, Querin OM, Steven GP. On improving the GA step-wise shape optimization method through the application of the fixed-Grid FEA paradigm. *Structural Multidisciplinary Optimization* 2003; **25**(4): 270-278.
- Woon SY, Querin OM, Steven GP. Structural Application of a shape Optimization method based on a genetic algorithm. *Structural Multidisciplinary Optimization* 2001; **22**: 57-64.
- Woon SY, Tong L, Querin OM, Steven GP. Knowledge based algorithms in a GA based shape optimisation method. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 2001.
- Woon SY, Tong L, Querin OM, Steven GP. Knowledge-based algorithms in fixed-grid GA shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2003; **58**: 643-660.
- Woon SY, Tong L, Querin OM, Steven GP. Optimising Topologies through a Multi-GA System. *WCSMO 5* 2003.
- Woon SY. *Effective GA-Based Optimisation of Continuum Structures*. Ph. D. Thesis. School of Aerospace, Mechanical and Mechatronic Engineering, University of Sydney: Australia, 2002.
- Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Comp. and Struct.* 1993; **49**(5): 885-896.
- Xie YM, Steven GP. *Evolutionary structural optimisation*. Springer: London, 1997.
- Xie YM, Steven GP. Shape and layout optimization via an evolutionary procedure. *Proceedings of the International Conference on Computational Engineering Science* 1992.
- Yang RJ, Chuang CH. Optimal design using linear programming. *Comp. and Struct.* 1994; **52**(2): 265-275.

- Yoon Young K, Gang-Won J. Shape sensitivity analysis for fixed-grid analysis. *International Union of Theoretical and Applied Mechanics Conference* 2004.
- Young V, Querin OM, Steven GP, Xie YM. 3D and Multiple Load Case B-Directional Evolutionary Structural Optimization (BESO). *Structural Optimization* 1999; **18**: 183-192.
- Young V, Querin OM, Steven GP, Xie YM. 3D Bi-directional Evolutionary Structural Optimisation (BESO). *Proceedings of the Australasian Conference on Structural Optimisation* 1998; 275-282.
- Yulin M, Xiaoming W. A level set method for structural topology optimization and its applications. *Advances in Engineering Software* 2004; **35**: 415-441.
- Zhang ZQ, Zhou JX, Zhou N, Wang XM, Zhang L. Shape optimization using reproducing kernel particle method and an enriched genetic algorithm. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2005; **194**: 4048-4070.
- Zhao ZY, Adey RA. Shape optimization using the Boundary Element Method. *Computer aided design of structures: Recent advances* 1989; 145-163.
- Zheng QZ, Querin OM, Barton DC, Brodie RN. Topology Optimisation using Genetic Programming Method. *WCSMO 5* 2003.
- Zhou M, Rozvany GIN. The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1991; **89**: 309-336.
- Zienkiewicz OC, Campbell JS. Shape Optimization and Sequential Linear Programming. *Optimum Structural Design* 1973; 109-126.
- Zochowski A, Mizukami JS. A comparison of BEM and FEM in minimum weight design. *Proceedings 5th BEM conference* 1983; 901-911.