

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIEROS INDUSTRIALES  
VALENCIA**



**ANÁLISIS SISMICO DE ESTRUCTURAS  
MEDIANTE ESPECTROS DE DISEÑO**



PASCUAL MARTI MONTRULL

Dr. Ingeniero Industrial

Profesor de Teoría de Estructuras  
de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
de la Universidad Politécnica de Valencia

ANALISIS SISMICO DE ESTRUCTURAS  
MEDIANTE ESPECTROS DE DISEÑO

SERVICIO DE PUBLICACIONES DE LA U.P.V.

Valencia, abril de 1984

## INDICE

Prólogo . . . . .	VII
Agradecimientos . . . . .	IX
Lista de símbolos . . . . .	XI
Capítulo 1. SISTEMAS DINAMICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD	
1.1. Ecuaciones de desplazamiento . . . . .	1
1.2. Vibración libre . . . . .	4
1.2.1. Sin amortiguamiento . . . . .	5
1.2.2. Con amortiguamiento . . . . .	8
1.3. Respuesta a un impulso . . . . .	9
1.3.1. Sin amortiguamiento . . . . .	10
1.3.2. Con amortiguamiento . . . . .	11
1.4. Respuesta a una carga arbitraria: Integral de Duhamel. . . . .	12
1.4.1. Sin amortiguamiento . . . . .	12
1.4.2. Con amortiguamiento . . . . .	13
1.5. Respuesta a los sismos . . . . .	13
Capítulo 2. ESPECTROS DE RESPUESTA	
2.1. Introducción . . . . .	19
2.2. Espectros de respuesta elásticos . . . . .	19
2.2.1. Obtención de los espectros de respuesta elásticos . . . . .	19
2.2.2. Característica de los espectros de respuesta elásticos . . . . .	22
2.3. Espectros de respuesta inelásticos . . . . .	25
2.3.1. Obtención a partir del espectro elástico: Procedimiento de Newmark-Hall . . . . .	25
2.3.2. Otros procedimientos . . . . .	29
Referencias . . . . .	32

### Capítulo 3. SISTEMAS DINAMICOS DE MULTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

3.1. Introducción . . . . .	35
3.2. Ecuaciones de desplazamiento . . . . .	36
3.3. Modos de vibración y frecuencias . . . . .	40
3.4. Ecuaciones modales de desplazamiento: Superposición modal.	42
3.5. Respuesta a los sismos . . . . .	45
3.6. Análisis sísmico con espectros: Combinación de las respuestas modales máximas . . . . .	48
Referencias . . . . .	53

### Capítulo 4. FORMULACION DE LAS CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS ELEMENTOS

4.1. Introducción . . . . .	55
4.2. Matrices de rigidez elástica y geométrica. . . . .	55
4.3. Matrices de masas. . . . .	62
4.3.1. Matriz de masas consistente . . . . .	62
4.3.2. Matriz de masas condensada. . . . .	63
4.3.3. Comparación de las matrices de masas consistente y condensada: Otras formulaciones . . . . .	65
4.4. Matrices de amortiguamiento . . . . .	67
Referencias . . . . .	69

### Capítulo 5. REDUCCION DE GRADOS DE LIBERTAD EN EL ANALISIS DINAMICO

5.1. Introducción . . . . .	71
5.2. Condensación de grados de libertad para la obtención de valores y vectores propios . . . . .	71
5.3. Ejemplos, tablas y gráficos comparativos . . . . .	77
Referencias . . . . .	93

Capítulo 6. ANALISIS SISMICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES ORTO-  
GONALES PLANAS CON ESPECTROS DE RESPUESTA

6.1. Introducción . . . . .	95
6.2. Definición del espectro de diseño. . . . .	95
6.3. Formación y condensación de las matrices de rigidez y de masas de la estructura . . . . .	104
6.3.1. Matrices de rigidez elástica y geométrica . . . . .	106
6.3.2. Matriz de masas . . . . .	110
6.3.3. Condensación de las matrices de rigidez y de masas.	111
6.4. Obtención de valores y vectores propios . . . . .	111
6.5. Análisis modal con espectros de respuesta. . . . .	113
6.5.1. Ortogonalidad de los modos. . . . .	113
6.5.2. Valores generalizados . . . . .	114
6.5.3. Factores de participación y valores modales máximos	114
6.5.3.1. Factor de participación de desplazamientos	115
6.5.3.2. Masa modal efectiva . . . . .	115
6.5.3.3. Coeficiente sísmico . . . . .	116
6.5.4. Valores modales máximos . . . . .	116
6.5.4.1. Desplazamientos modales máximos . . . . .	116
6.5.4.2. Fuerzas modales máximas . . . . .	116
6.5.5. Valores máximos más probables . . . . .	117
6.5.5.1. Combinación de los valores modales máximos	117
6.5.5.2. Desplazamientos máximos más probables. . . . .	118
6.5.5.3. Combinación de fuerzas modales máximas . . . . .	118
6.5.5.4. Momentos de vuelco . . . . .	128
6.6. Cálculo de desplazamientos y esfuerzos . . . . .	128
6.6.1. Cálculo de desplazamientos. . . . .	128
6.6.2. Cálculo de esfuerzos . . . . .	130
6.6.2.1. Cálculo de momentos y cortantes . . . . .	130
6.6.2.2. Cálculo de axiles. . . . .	131
Referencias . . . . .	133

Capítulo 7. PROGRAMA DE ANALISIS SISMICO CON ESPECTROS DE RES-  
PUESTA

7.1. Descripción general del programa "ASER". . . . .	135
7.2. Instrucciones para la entrada de datos . . . . .	137
7.3. Listado del programa "ASER". . . . .	145
Referencias. . . . .	163

Capítulo 8. EJEMPLOS DE ANALISIS SISMICO CON ESPECTROS DE RES-  
PUESTA

8.1. Introducción. . . . .	165
8.2. Estructura de 10 plantas y 3 vanos iguales. . . . .	165
8.2.1. Geometría y acciones. . . . .	166
8.2.2. Espectro de respuesta . . . . .	167
8.2.3. Condiciones para el análisis . . . . .	168
8.2.4. Listados de entrada de datos y salida de resultados	168
8.3. Estructura de 10 plantas y 3 vanos desiguales. . . . .	184
8.3.1. Geometría y acciones. . . . .	184
8.3.2. Espectro de respuesta . . . . .	185
8.3.3. Condiciones para el análisis . . . . .	187
8.3.4. Listados de entrada de datos y salida de resultados	187
Referencias. . . . .	208

## PROLOGO

A Pascual Martí Montrull le dirigí su Tesis Doctoral, creo conocerlo bien, ésta versó sobre *Optimización de estructuras sismorresistentes teniendo en cuenta el comportamiento no lineal*. Decidimos el resumir de ella algunos capítulos, lo hizo y ahora presenta *Análisis sísmico de estructuras mediante espectros de diseño*, es esta publicación.

Es práctica usual en estos casos el firmar conjuntamente la publicación, los baremos actuales de la Universidad Española me lo consideran como "mérito", así se me propuso. Medité sobre ello y establecí un orden de valores:

- 1º El gran mérito que me atribuyo -aunque creo que sin mí hubiese sido igual- es el haber despertado la vocación universitaria en el Dr. Martí.
- 2º Me supone un gran honor el prologarle esta publicación.
- 3º Quedo muy satisfecho.

Cualquier estudioso del tema que proceda a la lectura atenta de este libro, comprenderá el porqué de mis razonamientos anteriores. A ellos me siento ahora obligado a darles mis opiniones.

En los primeros capítulos, que solo serían válidos como introducción al tema, encontramos una forma expositiva que por nueva no deja de sernos familiar; he empleado el término nueva por la claridad, y dentro de sus limitaciones novedad, con que han sido expuestos; no es solo una descripción justificativa, es abrir puertas a conceptos varias veces razonados, pero no ligados entre sí.

El tema en sí enfocado, permite el introducirnos en las actuales técnicas de análisis estructural bajo acciones sísmicas, y da a conocer el camino al empleo de microordenadores en estos trabajos.

No dudamos que despertará el interés de los lectores, y que no solo cubre una parcela necesaria a nivel docente, sino que servirá para introducirnos bajo este enfoque del análisis sísmico.

JUAN A. ROVIRA SOLER  
Catedrático de Estructuras  
de la E.T.S.I.I. de Valencia



## AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento a todas aquellas personas que han hecho posible la realización de este trabajo. En particular a D. Juan A. Rovira Soler, Catedrático de Estructuras de la Escuela Técnica de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia, que le dirigió la Tesis Doctoral en este mismo campo y que ha accedido amablemente a realizar el prologo de esta monografía; así como a todos sus compañeros de trabajo en la citada cátedra.

Igualmente desea dar las gracias a D. José T. Gomez García por su cuidadosa realización del original mecanografiado, y a D. Francisco Martinez Mateu por la excelente delineación de los dibujos y gráficos.



## LISTA DE SIMBOLOS

A	área de la sección transversal de un elemento; constante de integración
[A]	matriz dinámica
[a]	matriz que relaciona los desplazamientos en un punto interior del elemento con los desplazamientos y giros en los extremos
B	constante de integración
C	amortiguamiento en sistemas de un grado de libertad
$C_j^*$	amortiguamiento generalizado del modo "j"
[C]	matriz de amortiguamiento de la estructura
[c]	matriz de amortiguamiento del elemento
$c_j$	coeficiente sísmico del modo "j"
E	módulo de elasticidad longitudinal
F	fuerza axial del elemento
f	frecuencia en ciclos/segundo
$F_A(t)$	fuerza de amortiguamiento en sistemas de un grado de libertad
$\{F_A\}$	vector columna de fuerzas de amortiguamiento
$F_E(t)$	fuerza elástica en sistemas de un grado de libertad
$\{F_E\}$	vector columna de fuerzas elásticas
$F_I(t)$	fuerza de inercia en sistemas de un grado de libertad
$\{F_I\}$	vector columna de fuerzas de inercia
$\{f_j \text{ max}\}$	distribución de fuerzas máximas en el modo "j"
$\{f\}$	vector columna de fuerzas y momentos en los extremos del elemento; vector columna de fuerzas y momentos en los nudos
$\{f_{eq}\}$	vector columna de fuerzas equivalentes
$f_{j \text{ max}, i}$	fuerza máxima en la planta "i" para el modo "j"
$\{f_p\}$	vector columna de acciones de planta
$f_x(f_y)$	fuerza según el eje "x" ("y") local del elemento

$G$	módulo de elasticidad transversal
$g$	aceleración de la gravedad
$I_y(I_z)$	momento de inercia de la sección transversal respecto al eje "y" ("z") local del elemento
$[I]$	matriz identidad diagonal
$I_p$	momento de inercia polar
$J$	constante de torsión
$K$	rigidez en sistemas de un grado de libertad
$K_j^*$	rigidez generalizada del modo "j"
$[K]$	matriz de rigidez de la estructura
$[K]^*$	matriz de rigidez condensada de la estructura
$[K_E]_v$	matriz de rigidez elástica de una viga en el sistema global
$[K_E]_s$	matriz de rigidez elástica de un soporte en el sistema global
$[K_G]_s$	matriz de rigidez geométrica de un soporte en el sistema global
$[k_E]$	matriz de rigidez elástica del elemento en su sistema local
$[k_G]$	matriz de rigidez geométrica del elemento en su sistema local
$L$	longitud del elemento
$M$	masa en sistemas de un grado de libertad
$[M]$	matriz de masas de la estructura
$[M]^*$	matriz de masas condensada de la estructura
$[m]$	matriz de masas del elemento
$M_o(t)$	momento de vuelco en la base de la estructura
$M_i$	masa del piso "i"
$M_j^*$	masa generalizada del modo "j"
$M_{jef}$	masa modal efectiva del modo "j"
$M_{oj,i}$	momento de vuelco en el piso "i" para el modo "j"
$m_y(m_z)$	momento según el eje "y" ("z") local del elemento
$[N]$	matriz que relaciona los vectores {u} y {x}
$P_{ef}(t)$	fuerza efectiva
$P_j^*(t)$	fuerza efectiva generalizada
$Q(t)$	fuerza cortante efectiva en sistemas de un grado de libertad
$Q_o(t)$	cortante total en la base



$Q_j(t)$	cortante en la base para el modo "j"
$Q_j \max$	cortante máximo en la base para el modo "j"
$S_a$	aceleración espectral
$S_d$	desplazamiento espectral
$S_v$	velocidad espectral
$S_{aj}$	aceleración espectral del modo "j"
$S_{dj}$	desplazamiento espectral del modo "j"
$S_{vj}$	velocidad espectral del modo "j"
$s$	duración de un segmento de "ruido blanco"
$T$	momento torsor
$[T]$	matriz de transformación
$T_j$	periodo del modo "j"
$U_i$	energía de deformación interna
$\{u\}$	vector columna de desplazamientos de un punto, referido al sistema local del elemento
$V(t)$	seudo-velocidad
$V_j(t)$	seudo-velocidad para el modo "j"
$V_y(V_z)$	fuerza cortante según el eje "y" ("z") local del elemento
$w$	frecuencia natural libre (rad/s)
$w_D$	frecuencia natural amortiguada (rad/s)
$w_j$	frecuencia de vibración libre del modo "j" (rad/s)
$\{X\}$	vector de coordenadas generalizadas
$\{x\}$	vector columna de desplazamientos y giros de los extremos de un elemento referidos a su sistema local
$X_e$	grados de libertad no incluidos después de la condensación
$X_i$	grados de libertad incluidos después de la condensación
$\ddot{x}_g(t)$	aceleración del suelo debida al sismo
$\dot{x}(t)$	velocidad
$\{\dot{x}\}$	vector columna de velocidades
$\ddot{x}(t)$	aceleración
$\{\ddot{x}\}$	vector columna de aceleraciones
$\{x_j \max\}$	vector columna de desplazamientos máximos del modo "j"
$\ddot{x}_t(t)$	aceleración total en sistemas de un grado de libertad
$X_{p,j}$	respuesta máxima del modo "j"
$X_j \max$	desplazamiento máximo del modo "j"

$X_{j \max, i}$	desplazamiento máximo del piso "i" para el modo "j"
$X_p$	valor máximo más probable de una acción o esfuerzo
$\{x_{\max}\}$	desplazamientos máximos más probables
$\alpha$	factor de intensidad en la norma PDS-1 (1974)
$\beta$	factor de respuesta en la norma PDS-1 (1974)
$\delta$	decremento logarítmico; factor de cimentación en la norma PDS-1 (1974)
$\delta_x (\delta_y, \delta_z)$	desplazamiento según el eje "x" ("y", "z") local del elemento
$\Delta \dot{x}$	incremento de velocidad producido por un impulso
$\epsilon_x$	deformación longitudinal del elemento
$\epsilon$	vector columna de deformaciones del elemento
$\zeta$	parámetro adimensional $z/L$
$\eta$	factor de distribución; parámetro adimensional $y/L$
$\theta$	ángulo de fase
$\theta_x (\theta_y, \theta_z)$	giro según el eje "x" ("y", "z") local del elemento
$\lambda$	valor propio
$\mu$	factor de ductilidad; amortiguamiento viscoso
$\xi$	grado de amortiguamiento; parámetro adimensional $x/L$
$\xi'$	grado equivalente de amortiguamiento
$\xi_j$	grado de amortiguamiento del modo "j"
$\rho$	densidad
$\rho_{x_1, x_2}$	coeficiente de correlación cruzada
$\{\sigma\}$	vector columna de tensiones del elemento
$\tau$	variable de integración para el tiempo
$[\Omega^2]$	matriz diagonal de cuadrados de frecuencias modales
$\phi_{i, j}$	elemento "i" del vector columna del modo "j"
$\{\phi_j\}$	vector columna del modo de vibración "j"
$[\phi]$	matriz de modos de vibración
$\psi_i$	función de desplazamiento
$[\psi]$	matriz de funciones de desplazamiento
$\xi_j$	factor de participación del modo "j"

## Capítulo 1

### SISTEMAS DINAMICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

#### 1.1. ECUACIONES DE DESPLAZAMIENTO

La respuesta dinámica de una estructura viene definida por su historia de desplazamientos, o lo que es lo mismo por la variación con el tiempo de las coordenadas que representan los grados de libertad definidos. Las *ecuaciones de desplazamiento* del sistema son las que permiten obtener, en cada instante, los desplazamientos de la estructura en estudio.

La formulación de las ecuaciones de desplazamiento de un sistema dinámico puede realizarse por distintos métodos, cada uno de los cuales presenta ventajas en el estudio de cierto tipo de problemas. De estos métodos podemos señalar, por su interés en el análisis de estructuras, los siguientes:

- Equilibrio directo a partir del Principio de D'Alambert
- A partir del Principio de los Desplazamientos Virtuales
- A partir del Principio de Hamilton

En el caso particular de sistemas de un solo grado de libertad, resulta muy sencillo formular las ecuaciones de desplazamiento a partir del equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Un sistema dinámico de un grado de libertad suele representarse como una estructura de una sola planta y un solo vano (fig. 1(a)) o como un sistema formado por un muelle y una masa (fig. 1(b)).

En ambos casos existe una masa, que solo puede moverse en una dirección, que está restringida por un resorte de rigidez  $K$  y un amortiguador de valor  $C$ , y sobre la que actúa una fuerza  $P(t)$ .

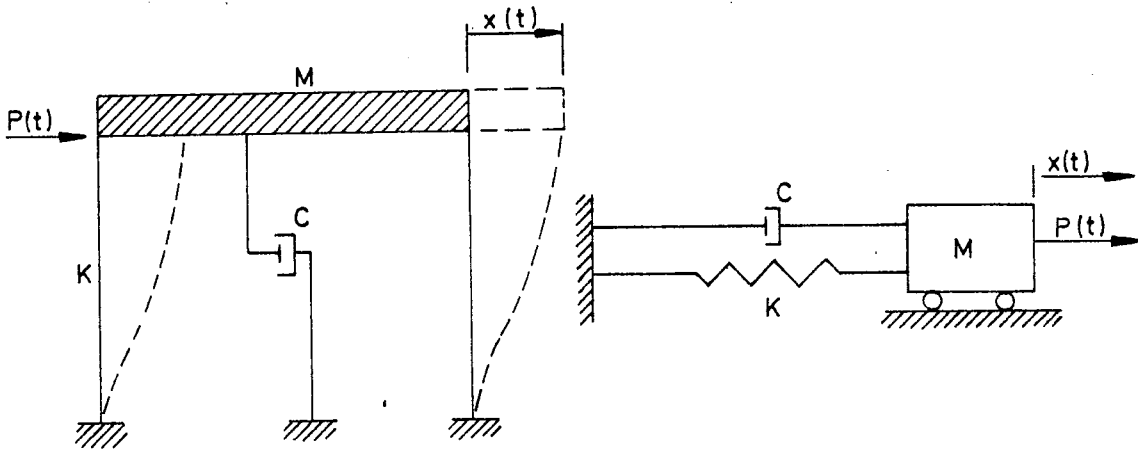


Figura 1

Sistemas de un grado de libertad

Para cualquiera de las dos representaciones, la ecuación de equilibrio puede ponerse como:

$$F_I + F_A + F_E = P(t) \quad (1.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} F_I &= M\ddot{x}(t) && \text{es la fuerza de inercia} \\ F_A &= C\dot{x}(t) && \text{es la fuerza de amortiguamiento} \\ F_E &= Kx(t) && \text{es la fuerza elástica} \end{aligned}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (1.1), se llega a la ecuación de desplazamiento del sistema:

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = P(t) \quad (1.2)$$

Esta ecuación resuelve el caso de una masa sobre la que actúa una fuerza. En el caso de las acciones sísmicas, no hay una fuerza directamente aplicada a la estructura, sino que la excitación corresponde a la aceleración que el sismo introduce en la base de la misma. En este caso, en la ecuación (1.2),  $P(t) = 0$ . Por otro lado, la aceleración



de la masa está compuesta por dos términos, la aceleración relativa respecto a la base ( $\ddot{x}$ ) y la aceleración de la base producida por el sismo ( $\ddot{x}_g$ ), tal como se representa en la figura 2.

$$\ddot{x}_t(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t) \quad (1.3)$$

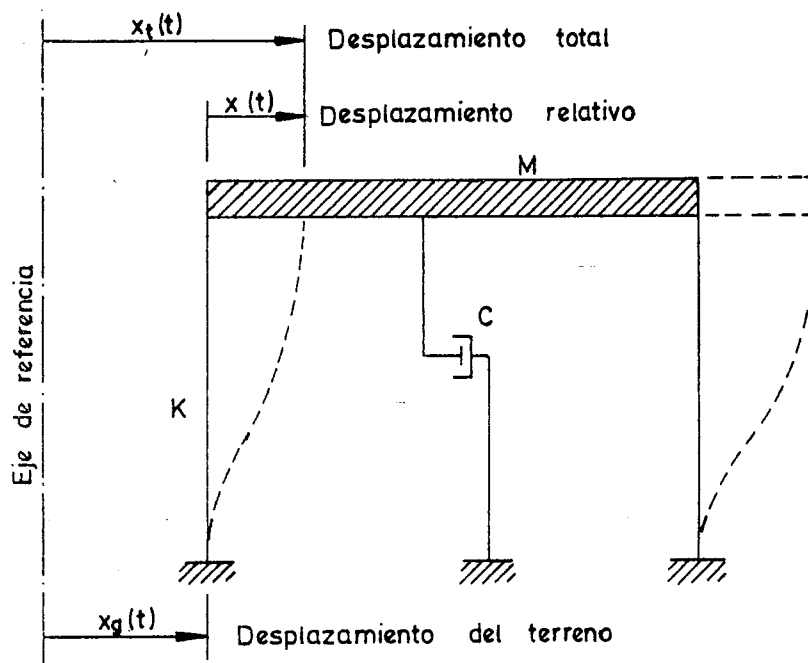


Figura 2

Sistema de una grado de libertad excitado en base

Puesto que la fuerza de inercia depende de la aceleración total de la masa, vendrá dada por:

$$F_I = M \ddot{x}_t(t) = M \ddot{x}(t) + M \ddot{x}_g(t) \quad (1.4)$$

sustituyendo esta ecuación en (1.2) con  $P(t) = 0$ , se tiene:

$$M \ddot{x}(t) + M \ddot{x}_g(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = 0 \quad (1.5)$$

donde el término  $M\ddot{x}_g(t)$  puede tomarse como una fuerza efectiva resultante del desplazamiento del terreno. Así pues, pasándolo al segundo

miembro tenemos:

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = P_{ef}(t) \quad (1.6)$$

con:

$$P_{ef}(t) = - M \ddot{x}_g(t) \quad (1.7)$$

La ecuación (1.6) es la ecuación de desplazamiento para un sistema de un grado de libertad bajo excitación sísmica. Se deduce de esta ecuación que la estructura responde a la acción sísmica igual que respondería a una carga  $P_{ef}(t)$ , producto en cada instante de la masa del sistema y la aceleración del terreno.

Una vez planteada la ecuación de desplazamiento de un sistema dinámico de un grado de libertad (1.2) y vista la forma de aplicarla al caso particular de excitación sísmica (ecuaciones 1.6 y 1.7), lo que ahora pretendemos es obtener la respuesta de este sistema al caso más general de una carga que varía de forma aleatoria con el tiempo. Para esto, se hace necesaria la evaluación de las respuestas a casos más simples (vibración libre e impulso) y a partir de estas llegar al caso general.

## 1.2. VIBRACION LIBRE

Si en la ecuación (1.2) se hace  $P(t) = 0$ , se tiene la ecuación homogénea siguiente:

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = 0 \quad (1.8)$$

Los desplazamientos que tienen lugar en este caso se denominan *vibraciones libres* del sistema. La solución de esta ecuación es de la forma:

$$x(t) = G e^{st} \quad (1.9)$$

sustituyendo el valor de  $x(t)$  y de sus derivadas en la ecuación (1.8), se tiene:

$$(M s^2 + C s + K) G e^{st} = 0 \quad (1.10)$$

y dividiendo por  $M G e^{st}$ :

$$s^2 + \frac{C}{M} s + w^2 = 0 \quad (1.11)$$

siendo:

$$w = \frac{K}{M}$$

### 1.2.1. Sin amortiguamiento

En este caso  $C=0$  y el valor de  $s$  de la ecuación (1.11), es:

$$s = \pm iw \quad (1.13)$$

con lo que la ecuación (1.9), se convierte en:

$$x(t) = G_1 e^{iwt} + G_2 e^{-iwt} \quad (1.14)$$

teniendo en cuenta que:

$$e^{\pm iwt} = \cos wt \pm i \sin wt \quad (1.15)$$

la ecuación (1.14) se convierte en:

$$x(t) = A \sin wt + B \cos wt \quad (1.16)$$

en esta ecuación, las constantes  $A$  y  $B$  pueden obtenerse en función de las condiciones iniciales al comienzo de la vibración libre. Sustituyendo  $t=0$  en  $x(t)$  y  $\dot{x}(t)$ , se obtiene  $A = \dot{x}(0)/w$  y  $B = x(0)$ , con lo que la

ecuación (1.16) queda como:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{w} \operatorname{sen} wt + x(0) \cos wt \quad (1.17)$$

Esta ecuación representa un desplazamiento armónico y se representa gráficamente en la figura 3 para un desplazamiento inicial ( $x(0)$ ) y una velocidad inicial ( $\dot{x}(0)$ ).

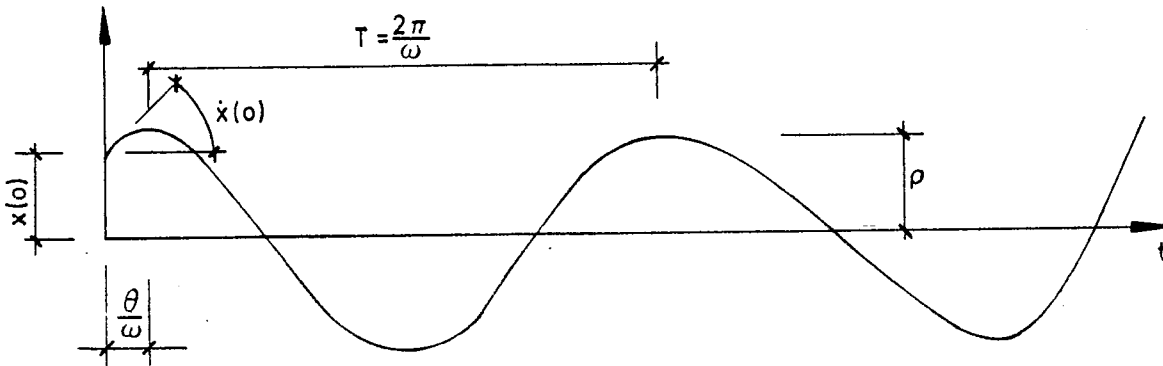


Figura 3  
Vibración libre no amortiguada

En dicha ecuación  $w$  es la *frecuencia circular* o velocidad angular del desplazamiento, que viene medida en radianes por unidad de tiempo. La *frecuencia cíclica* o simplemente *frecuencia* viene dada por:

$$f = \frac{w}{2\pi} \quad (1.18)$$

y se expresa en ciclos por unidad de tiempo. La inversa de la frecuencia corresponde al *período*  $T$ .

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{w} \quad (1.19)$$

que viene dado en unidades de tiempo.

El desplazamiento dado por la ecuación (1.17), puede ponerse como:



$$x(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (1.20)$$

como se deduce del diagrama de Argand o representación vectorial de la figura 4.

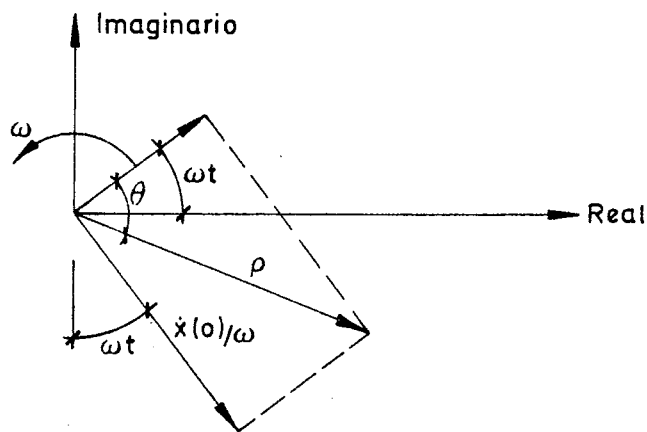


Figura 4.

Representación de Argand para vibración libre

En esta representación la respuesta viene dada por la parte real o proyección horizontal de los dos vectores rotación. La amplitud del desplazamiento viene dada por la resultante:

$$\rho = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right]^2} \quad (1.21)$$

y el ángulo de fase:

$$\theta = \text{arc tg} \frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)} \quad (1.22)$$

que corresponde al ángulo de retraso del movimiento de la resultante respecto al término en coseno de la respuesta.

1.2.2. Con amortiguamiento

El caso sin amortiguamiento considerado en el apartado anterior es de poco interés práctico, por cuanto no tiene en cuenta la pérdida de energía que se produce en el sistema de vibración. Esta pérdida de energía (o amortiguamiento) tiene una gran importancia en el caso de excitación sísmica, ya que produce importantes reducciones en las amplitudes de la respuesta de la estructura.

En este caso, mediante un procedimiento similar al anterior y para amortiguamientos inferiores al crítico ( $C_c = 2 M w$ ).

$$x(t) = e^{-\xi w t} [A \operatorname{sen} w_D t + B \cos w_D t] \quad (1.23)$$

donde

$$w_D = w \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.24)$$

$$\xi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2 M w} \quad (1.25)$$

$$A = \frac{\dot{x}(0) + x(0) \xi w}{w_D} ; B = x(0) \quad (1.26)$$

La ecuación (1.23) es similar a la (1.16) excepto en que el desplazamiento armónico está sujeto a un decrecimiento exponencial, como se representa en la figura 5.

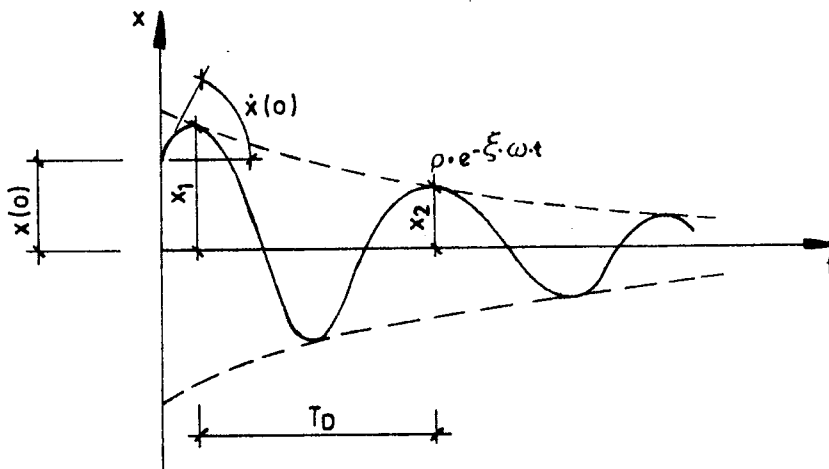


Figura 5  
Vibración libre amortiguada

Igual que en el caso sin amortiguamiento, la ecuación (1.23) puede ponerse en forma vectorial como:

$$x(t) = \rho e^{-\xi w t} \cos (w_D t - \theta) \quad (1.27)$$

$$\rho = \sqrt{\left[ \frac{\dot{x}(0) + x(0) \xi w}{w_D} \right]^2 + [x(0)]^2} \quad (1.28)$$

$$\theta = \text{arc tg} \frac{\dot{x}(0) + x(0) \xi w}{w_D x(0)} \quad (1.29)$$

Es importante señalar que el período de vibración del sistema amortiguado no cambia durante la respuesta y que la relación entre las amplitudes en dos ciclos consecutivos cualesquiera se mantiene constante. Se suele denominar *decremento logarítmico* ( $\delta$ ) al logaritmo natural del cociente de amplitudes, que queda relacionado con el amortiguamiento por:

$$\delta = \log \frac{x_1}{x_2} = \log \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2 \pi \frac{w}{w_D} \xi \quad (1.30)$$

Estas ecuaciones permiten evaluar el amortiguamiento de un sistema a partir de las amplitudes de los desplazamientos en dos ciclos sucesivos de vibración libre.

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} \frac{w_D}{w} \quad (1.31)$$

En el caso de amortiguamientos bajos  $w_D \approx w$ , con lo que se obtiene directamente una buena aproximación del amortiguamiento a partir del decremento logarítmico.

### 1.3. RESPUESTA A UN IMPULSO

Una carga dinámica de este tipo consiste en un impulso principal

de corta duración, como se representa en la figura 6.

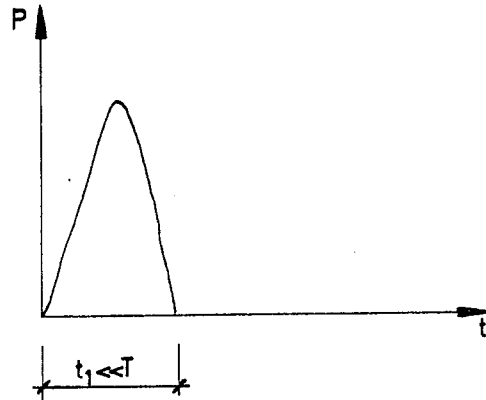


Figura 6  
Impulso dinámico

Una característica importante de este tipo de carga es la menor importancia del amortiguamiento en las respuestas máximas de la estructura, en comparación con otros tipos de cargas (periódicas, armónicas, etc.). Esto es debido a que el valor máximo se alcanza en un tiempo muy corto, antes de que las fuerzas de amortiguamiento puedan llegar a absorber una parte importante de la energía transmitida a la estructura.

En la mayoría de los textos de Dinámica de Estructuras (ref. 1 p.ej) pueden encontrarse los planteamientos para distintos tipos de cargas impulsivas (senoidal, rectangular, triangular, etc.). A continuación se expone un procedimiento aproximado para evaluar la respuesta máxima a un impulso de corta duración.

### 1.3.1. Sin amortiguamiento

La relación impulso-momento para la masa  $M$  puede ponerse como:

$$M \Delta \dot{x}(t) = \int_0^t [P(t) - K x(t)] dt \quad (1.32)$$



donde  $\Delta\dot{x}(t)$  representa el cambio de velocidad producido por la carga. En esta ecuación puede verse que para valores pequeños de  $t_1$ , el desplazamiento ( $x(t_1)$ ) experimentado durante la carga es del orden de  $t$ , mientras que el cambio de velocidad ( $\Delta\dot{x}(t)$ ) es del orden de  $t_1$ . Puesto que el impulso es del orden de  $t_1$ , el término de fuerza elástica ( $K x(t)$ ) tiende a cero cuando  $t_1$  tiende a cero y puede despreciarse para impulsos de pequeña duración. Con esta aproximación:

$$M \Delta\dot{x}(t) \approx \int_0^{t_1} P(t) dt \quad (1.33)$$

Después de la aplicación del impulso, se tiene una vibración libre que, de acuerdo con (1.17) viene dada por:

$$x(t-t_1) = \frac{\dot{x}(t_1)}{w} \operatorname{sen} w(t-t_1) + x(t_1) \operatorname{cos} w(t-t_1) \quad (1.34)$$

Esta ecuación, teniendo en cuenta que el término  $x(t_1)$  es pequeño y que  $\dot{x}(t_1) = \Delta\dot{x}(t)$ , puede ponerse como:

$$x(t-t_1) \approx \frac{1}{Mw} \left[ \int_0^{t_1} P(t) dt \right] \operatorname{sen} w(t-t_1) \quad (1.35)$$

### 1.3.2. Con amortiguamiento

De la misma forma que para el caso sin amortiguamiento, puede obtenerse una expresión aproximada para el caso amortiguado. Si las condiciones iniciales son las mismas:

$$x(0) \approx 0 \text{ y } \dot{x}(0) \approx \frac{1}{M} \int_0^{t_1} P(t) dt \quad (1.36)$$

a partir de la ecuación (1.23) se obtiene:

$$x(t-t_1) = \frac{1}{M w_D} \left[ \int_0^{t_1} P(t) dt \right] e^{-\xi w t} \text{sen } w_D (t-t_1) \quad (1.37)$$

#### 1.4. RESPUESTA A UNA CARGA ARBITRARIA: INTEGRAL DE DUHAMEL

El procedimiento del apartado anterior puede emplearse para llegar a una fórmula que permita evaluar la respuesta a una carga dinámica general. Como en los casos anteriores, hay que distinguir dos casos, según se considere o no el amortiguamiento de la estructura.

##### 1.4.1. Sin amortiguamiento

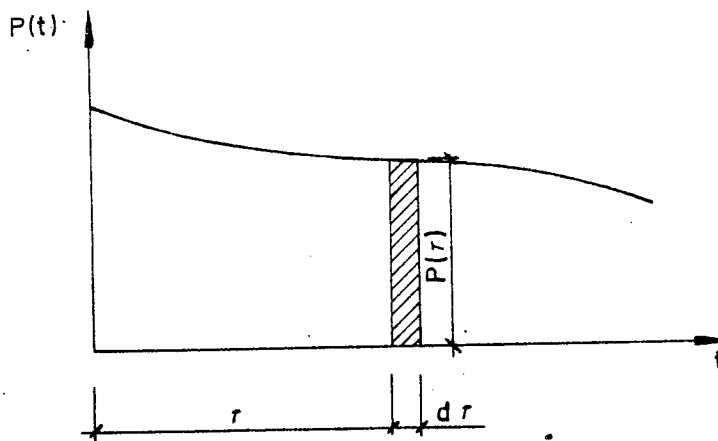


Figura 7

Carga dinámica arbitraria

Consideremos la carga dinámica arbitraria representada en la figura 7, dividida en una sucesión de impulsos de corta duración. La magnitud de uno de estos impulsos diferenciales, es  $P(\tau) d\tau$  y la respuesta diferencial que produce puede expresarse, de acuerdo con la ecuación (1.35), para  $t > \tau$  por:

$$dx(t) = \frac{P(\tau) d\tau}{M w} \text{ sen } w(t-\tau) \quad (1.38)$$

donde el término  $dx(t)$  representa la respuesta diferencial al impulso para  $t > \tau$ , y no el cambio de  $x$  durante el intervalo de tiempo  $dt$ .

La respuesta total se obtiene superponiendo los efectos de todos los impulsos diferenciales en que se ha dividido la carga; o lo que es lo mismo, integrando todas las respuestas diferenciales producidas durante la aplicación de la misma.

$$x(t) = \frac{1}{M w} \int_0^t P(\tau) \text{ sen } w(t-\tau) d\tau \quad (1.39)$$

Esta ecuación se conoce como Integral de Duhamel para sistemas no amortiguados y permite obtener la respuesta de un sistema elástico a una carga dinámica arbitraria. Como consecuencia de haberse empleado en su deducción el Principio de Superposición, esta ecuación se aplica solo a estructuras con respuesta lineal.

#### 1.4.2. Con amortiguamiento

La ecuación para este caso puede obtenerse directamente a partir de la ecuación de respuesta a un impulso de un sistema amortiguado. Considerando la carga total como sucesión de impulsos diferenciales se llega a la ecuación:

$$x(t) = \frac{1}{M w_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi w(t-\tau)} \text{ sen } w_D(t-\tau) d\tau \quad (1.40)$$

#### 1.5. RESPUESTA A LOS SISMOS

A partir de la expresión (1.40) de la Integral de Duhamel, la respuesta a un sismo de un sistema dinámico de un grado de libertad,

puede ponerse como:

$$x(t) = \frac{1}{w} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi w(t-\tau)} \text{sen } w(t-\tau) d\tau \quad (1.41)$$

Para llegar a esta expresión se consideran las aproximaciones siguientes:

- Se emplea la frecuencia del sistema no amortiguado, en vez de la correspondiente al amortiguado. Esta aproximación es muy común debido a que en la mayoría de casos el amortiguamiento es muy bajo (en general menor del 10% del crítico) y de acuerdo con la expresión (1.24), el error cometido al tomar la frecuencia no amortiguada tiene poca influencia.
- Se sustituye el término  $P(\tau)$  por  $M\ddot{x}_g(t)$ , en vez de  $-M\dot{x}_g(t)$ . Esto supone que la fuerza efectiva actúa en el sentido de la aceleración del terreno. Aunque esto no es verdad, en las aplicaciones prácticas tiene poca importancia, ya que hay que considerar que la excitación de la base actúa en cualquier dirección.

La expresión (1.41) puede ponerse en la forma:

$$x(t) = \frac{1}{w} V(t) \quad (1.42)$$

siendo:

$$V(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi w(t-\tau)} \text{sen } w(t-\tau) d\tau \quad (1.43)$$

Las ecuaciones (1.41) y (1.42), dan el desplazamiento relativo de la masa respecto a la base; a partir de estos resultados se obtienen los desplazamientos totales de la masa sumando los desplazamientos del terreno.

Las fuerzas asociadas con la deformación elástica pueden obte-

nerse directamente como:

$$F_E = K x(t) \quad (1.44)$$

Esta forma, que resulta adecuada para los sistemas de un grado de libertad, no resulta conveniente para sistemas más complicados. En estos sistemas se parte de la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema sin amortiguamiento.

$$F_I + F_E = 0 \quad (1.45)$$

para el caso de desplazamiento armónico:

$$F_I = M \ddot{x}(t) = -M \omega^2 x(t) \quad (1.46)$$

despejando  $F_E$  de la ecuación (1.45), sustituyendo  $F_I$  por su valor en (1.46) y el valor de  $x(t)$  de la ecuación (1.42), se tiene:

$$F_E(t) = M \omega^2 x(t) = M \omega V(t) \quad (1.47)$$

A partir de esta ecuación podría pensarse que  $\omega^2 x(t)$  es la aceleración total de la masa. Esto no es así, debido a que siempre existirán unas fuerzas de amortiguamiento. La expresión para la aceleración total puede obtenerse a partir de las ecuaciones (1.8) y (1.25), resultando:

$$\ddot{x}(t) = -2 \xi \dot{x}(t) - \omega^2 x(t) \quad (1.48)$$

A partir de esta ecuación, suponiendo que las fuerzas de amortiguamiento contribuyen poco al equilibrio dinámico del sistema, se tiene para la aceleración total:

$$\ddot{x}(t) \approx -\omega^2 x(t) = \omega V(t) \quad (1.49)$$

Al término  $w^2 x(t)$  se le suele denominar *aceleración efectiva*, por cuanto a partir de ella puede calcularse la *fuerza efectiva* como:

$$Q(t) = M w^2 x(t) \quad (1.50)$$

o también de acuerdo con (1.49)

$$Q(t) = M w V(t) \quad (1.51)$$

Estas fuerzas efectivas pueden emplearse exactamente como fuerzas estáticas aplicadas a la estructura, para obtener los esfuerzos internos (momentos y cortantes) que se producen debidos al sismo.

Referencias

1. CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Kogakusha, 1975.
2. CLOUGH, R. W., "Earthquake Response of Structures", capítulo 12 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, Inc., 1970.
3. HURTY, W. C., RUBINSTEIN, M. F., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Inc., 1964.
4. NEWMARK, N. M., ROSENBLUETH, E., *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*, Diana, 2ª Edición, 1978.
5. PAZ, M., *Structural Dynamics*, Van Nostran Reinhold Company, 1980.





## Capítulo 2

### ESPECTROS DE RESPUESTA

#### 2.1. INTRODUCCION

La respuesta de un sistema de un grado de libertad puede obtenerse, en cualquier instante, a partir de la ecuación (1.42). Sin embargo, el obtener las fuerzas y desplazamientos durante todo el tiempo de duración del sismo es una tarea que exige mucho esfuerzo y que, afortunadamente, no es necesaria en la mayoría de los casos prácticos, en los que es suficiente determinar los valores máximos. Con este objeto aparecen los espectros de respuesta, cuya obtención y características se exponen a continuación.

#### 2.2. ESPECTROS DE RESPUESTA ELASTICOS

##### 2.2.1. Obtención de los espectros de respuesta elásticos

A partir de las ecuaciones (1.42) y (1.51), pueden obtenerse los valores máximos para las fuerzas y desplazamientos, introduciendo el valor máximo de la función de respuesta  $V(t)$ . A este valor máximo se le denomina *pseudo-velocidad espectral*, debido a que no es exactamente igual a la velocidad máxima en los sistemas amortiguados; siendo su valor:

$$S_v = V_{\max} = \left[ \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi w(t-\tau)} \text{sen } w(t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (2.1)$$

A partir de la ecuación (1.41) se obtiene el desplazamiento máximo, *desplazamiento espectral*, que se representa por  $S_d$  y viene dado por:

$$S_d = \frac{S_v}{w} \quad (2.2)$$

A partir de la ecuación (1.49), se define la *seudo-aceleración espectral*, que se representa por  $S_a$  y viene dada por:

$$S_a = w S_v \quad (2.3)$$

Al igual que ocurría con la velocidad, este valor de la aceleración no corresponde al valor máximo, debido a la presencia del amortiguamiento.

En la ecuación (2.1) se observa que la *seudo-velocidad espectral* depende de tres factores:

- Las características del movimiento del terreno, a través de la aceleración  $\ddot{x}_g(t)$ .
- La relación de amortiguamiento de la estructura ( $\xi$ ).
- La frecuencia de la estructura ( $w$ ).

De acuerdo con esto, para un sismo y una relación de amortiguamiento determinados, es posible obtener la *seudo-velocidad espectral* como una función del período ( $T$ ) o la frecuencia de la estructura ( $w$ ). Realizando esta operación para varias relaciones de amortiguamiento y representándolo gráficamente, se obtienen curvas del tipo de las de la figura 1(b).

Las curvas de este gráfico se obtuvieron calculando las velocidades espectrales a partir de las aceleraciones de la figura 1(a), correspondientes al registro del terremoto ocurrido en El Centro (California) en Mayo de 1940, para las relaciones de amortiguamiento indicadas. Para cada relación de amortiguamiento y cada período se obtiene un punto de las curvas. En este caso, el punto corresponde a la velocidad máxima, por lo que el espectro obtenido es el de velocidades. De la misma forma se podrían haber obtenido los espectros de desplazamientos o aceleraciones, cuyos valores pueden obtenerse directamente a partir de las ecuaciones (2.2) y (2.3).

El empleo de estos espectros tiene la ventaja de que permiten obtener, de una forma directa, los valores máximos de la respuesta del sistema. Como ya se ha indicado, la *seudo-velocidad espectral* es, por

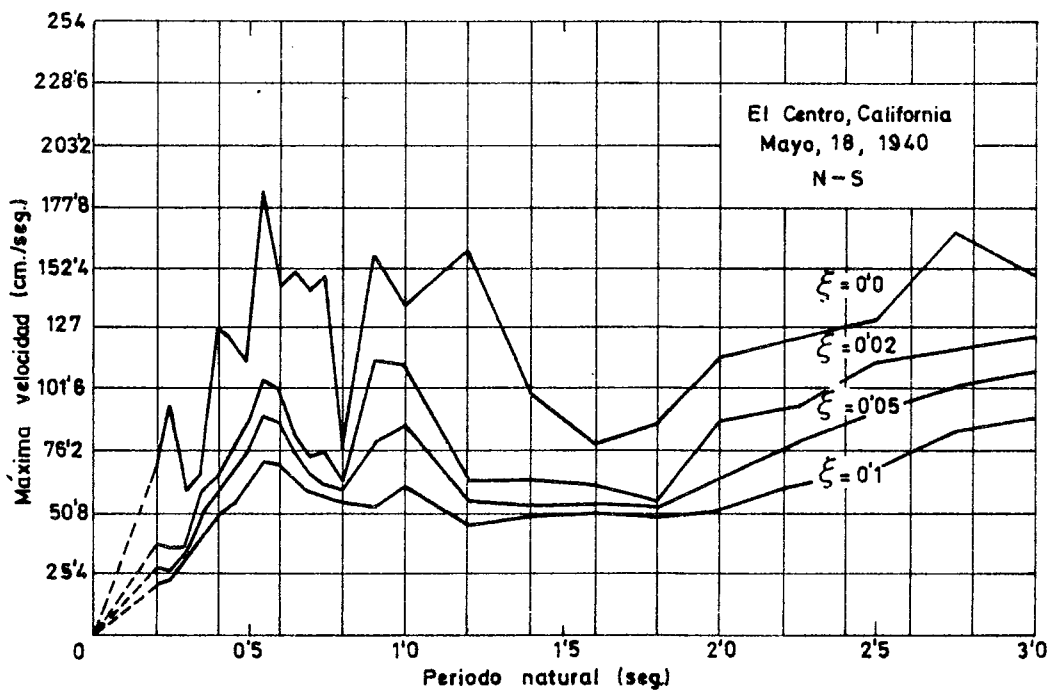
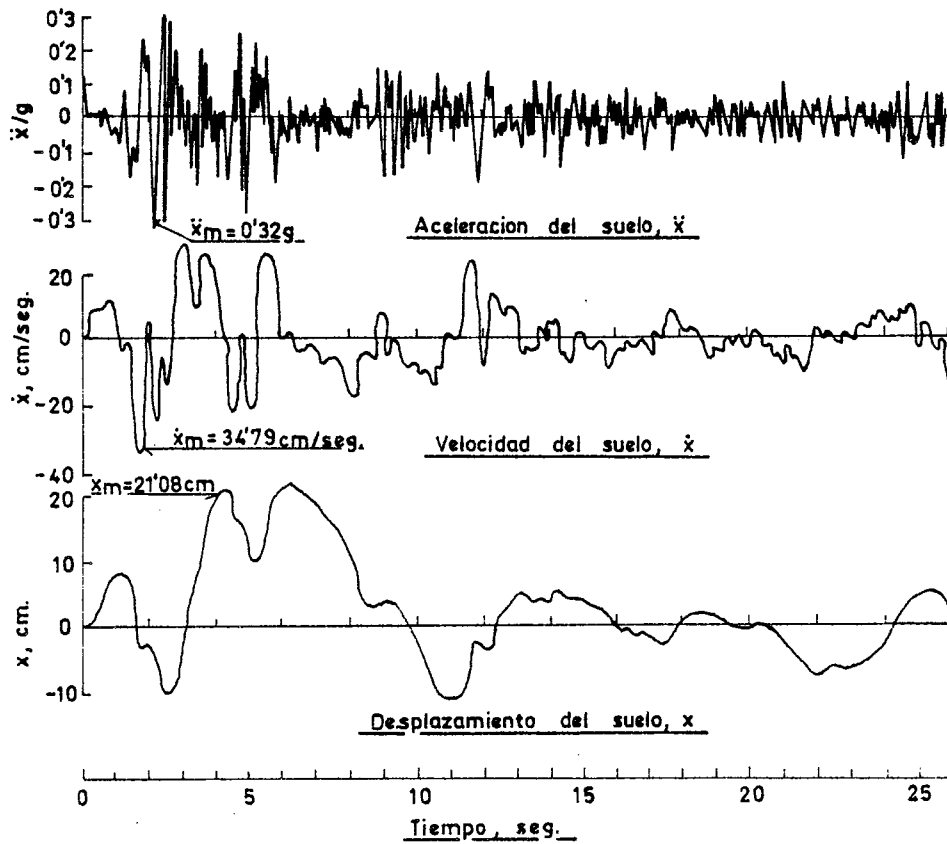


Figura 1

Movimiento del suelo y espectro de respuesta de velocidades del terremoto de El Centro (California) de Mayo de 1940 (9)

definición, el valor máximo de la integral de (2.1).

$$S_v(\xi, T) = V_{\max}(\xi, T) \quad (2.4)$$

de acuerdo con esto, las respuestas máximas se obtienen a partir del espectro de respuesta correspondiente al período y amortiguamiento de la estructura. El desplazamiento máximo viene dado por:

$$x_{\max} = \frac{1}{w} S_v(\xi, T) = S_d(\xi, T) \quad (2.5)$$

la fuerza elástica máxima por:

$$F_{E, \max} = M w S_v(\xi, T) = M S_a(\xi, T) \quad (2.6)$$

y la aceleración total máxima:

$$\ddot{x}_{\max}^t \approx S_a(\xi, T) \quad (2.7)$$

### 2.2.2. Características de los espectros de respuesta elásticos

Frente a la representación simple de la figura 1(a), suelen emplearse otras que facilitan, en un solo gráfico, los valores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. La figura 2, corresponde a una de estas representaciones para el mismo terremoto de la figura 1(a).

En esta representación se tiene en abscisas, en escala logarítmica, la frecuencia natural del sistema no amortiguado. En ordenadas, también en escala logarítmica, se representa el cociente entre la pseudo-velocidad espectral y la máxima velocidad del terreno. Los valores del cociente del desplazamiento espectral al desplazamiento máximo del terreno se obtienen a partir de la escala del eje de ordenadas de la izquierda, empleando rectas que suben a  $45^\circ$  de izquierda a derecha. Del mismo modo, el cociente pseudo-aceleración espectral aceleración máxima del terreno se obtiene a partir de la escala del eje de ordenadas de la

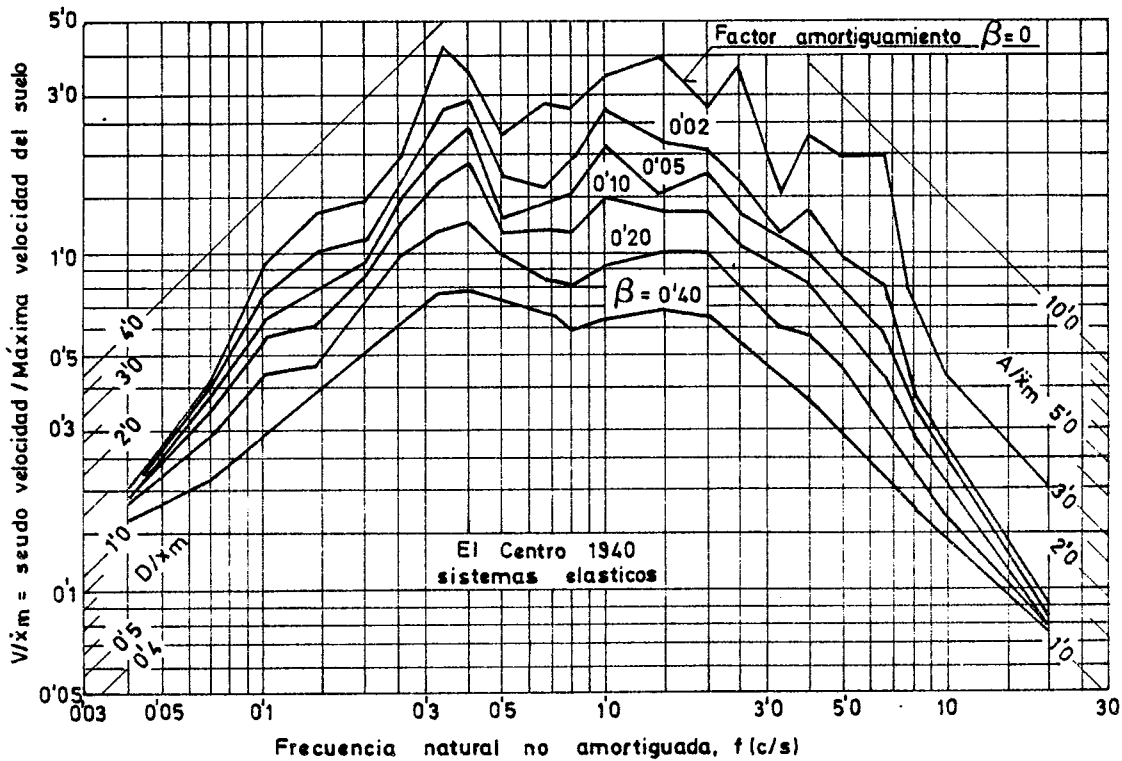


Figura 2

Espectro de respuesta elástico (El Centro 1940) (9)

derecha, empleando rectas que suben a 45° de derecha a izquierda. En resumen, puede decirse que esta representación da las amplificaciones de la respuesta respecto a los valores máximos de desplazamiento, velocidad y aceleración del suelo.

El espectro de la figura 2, puede tomarse cualitativamente, como característico para casi todos los tipos de desplazamiento del terreno (9). En esta figura puede verse que, en sistemas con frecuencias bajas, las respuestas para todos los grados de amortiguamiento tienden de una forma asintótica al valor 1 de la escala correspondiente al des-

plazamiento máximo del suelo. De acuerdo con la ecuación (1.12), un sistema con frecuencia baja consiste en una masa grande y una rigidez pequeña; cuando se produce el movimiento del suelo, la gran inercia de la masa y la baja rigidez del sistema hace que la masa prácticamente no llegue a moverse, con lo que la deformación elástica es aproximadamente igual al desplazamiento del suelo.

Al contrario que el caso anterior, cuando el sistema tiene una frecuencia alta (gran rigidez y pequeña masa), al producirse el movimiento del suelo, la gran rigidez del sistema obliga a la masa a moverse de la misma forma que el suelo, con lo que sus aceleraciones son iguales en cada instante.

Este efecto puede observarse en la figura 2, donde, para frecuencias altas, las curvas se acercan asintóticamente al valor 1.

En la zona intermedia del espectro se producen respuestas amplificadas respecto a los valores del sismo. En general, el factor de amplificación para desplazamientos es menor que para velocidades y este a su vez menor que para las aceleraciones. Para la curva sin amortiguamiento estos factores son, aproximadamente, 3.5 para desplazamientos, 4.2 para velocidades y 9.5 para aceleraciones. Estos factores bajan considerablemente cuando el sistema presenta un cierto amortiguamiento; para valores del 5% al 10% del crítico las amplificaciones son, aproximadamente, 1 para desplazamientos, 1.5 para velocidades y 2 para aceleraciones.

Al obtener estos espectros para otros sismos, se ha visto que los resultados son bastante similares a los indicados anteriormente. A partir de estos resultados se considera adecuado representar la forma general de un espectro tal como aparece en la figura 3.

En esta figura aparece una zona central de respuestas amplificadas y dos zonas extremas, la de bajas frecuencias en que el desplazamiento del sistema es igual al desplazamiento máximo del suelo, y la de altas frecuencias en que la aceleración del sistema es igual a la aceleración máxima del suelo. Para las relaciones de amortiguamiento de las construcciones normales (5% al 10%) y para una amplia gama de sismos se ha visto que los factores de amplificación pueden tomarse como 1 para desplazamientos, 1.5 para velocidades y 2 para aceleraciones.

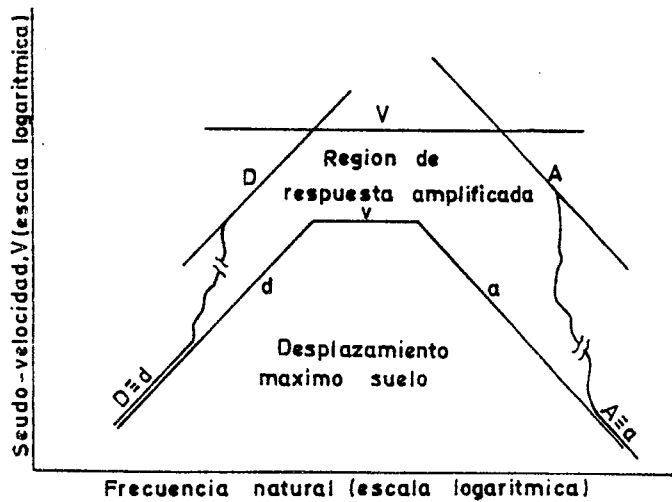


Figura 3

Forma general de los espectros de respuesta elásticos

### 2.3. ESPECTROS DE RESPUESTA INELASTICOS

Para realizar un diseño correcto de una estructura sismorresistente, es necesario considerar su comportamiento fuera del régimen elástico. Dejando aparte los métodos paso a paso de análisis no lineal, se ha visto que el diseño mediante espectros de respuesta, proporciona resultados adecuados para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

El primer paso para poder emplear este procedimiento es la obtención del espectro de respuesta inelástico. Los estudios para la obtención de estos espectros fueron llevados a cabo, fundamentalmente, por Newmark y Veletsos (11, 18), continuados y analizados por otros investigadores (8) y empleados en la mayoría de trabajos sobre diseño inelástico con espectros de respuesta (14, 15, 17, etc.).

#### 2.3.1. Obtención a partir del espectro elástico:

##### Procedimiento de Newmark-Hall.

La respuesta inelástica de un sistema dinámico puede aproximarse

por una relación elasto-plástica, tal como se representa en la figura 4.

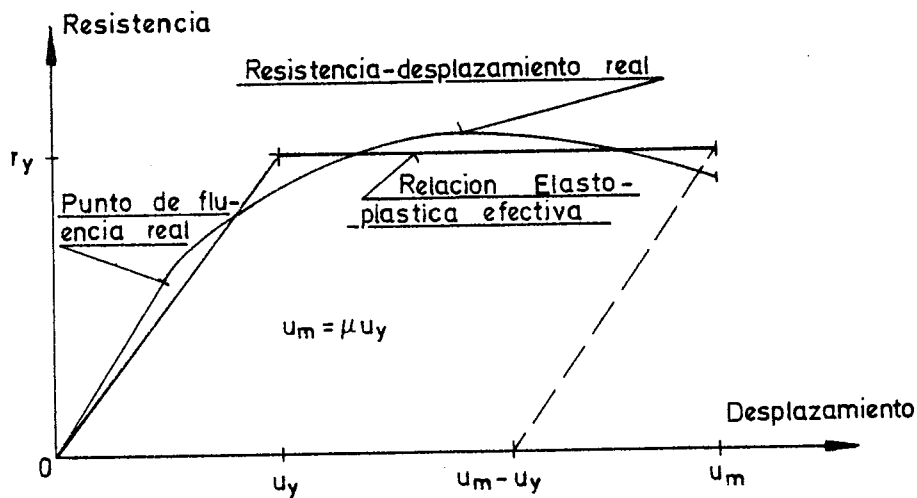


Figura 4

Modelo de respuesta elasto-plástica

Esta representación consta de una zona elástica inicial, una región plástica de valor constante y una descarga que se considera elástica hasta que se alcanza la fluencia en el sentido contrario. Newmark y Veletsos (11, 18), han realizado análisis para el caso particular en que la fluencia se produce para el mismo valor en ambas direcciones y los han representado en diagramas similares a los de la figura 2. Para ello, en vez de representar las curvas para distintas relaciones de amortiguamiento ( $\xi$ ), lo han hecho para distintos valores del *factor de ductilidad* ( $\mu$ ), entendiéndolo como tal la relación entre el desplazamiento máximo del sistema y el desplazamiento para el cual se inicia la fluencia. Con el fin de que las aceleraciones aparezcan correctamente, se han representado los desplazamientos elásticos y no los totales, pudiéndose obtener estos últimos multiplicando los primeros por el factor de ductilidad.

El espectro de la figura 5, corresponde al registro del terremoto de El Centro de 1940 y está calculado para distintos valores del



factor de ductilidad y una relación de amortiguamiento durante el comportamiento elástico del 2% del crítico.

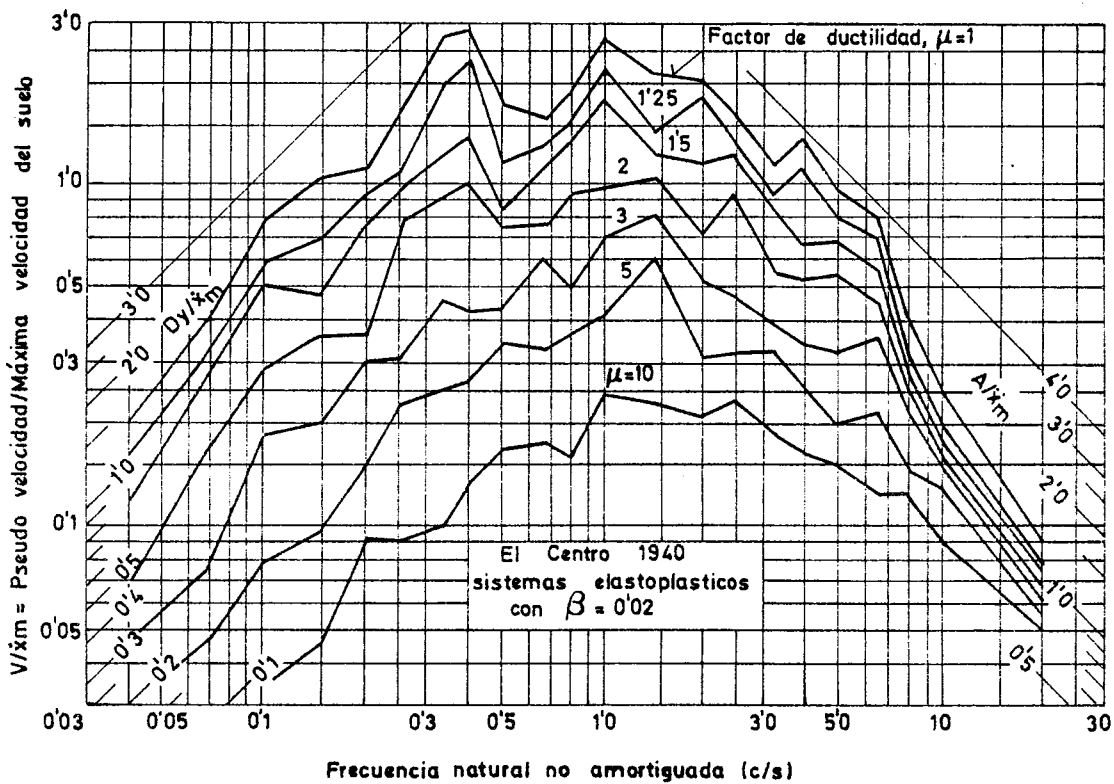


Figura 5

Espectro de respuesta inelástica (El Centro 1940) (9)

En este espectro puede verse que en la zona de frecuencias bajas los desplazamientos varían inversamente al factor de ductilidad y que en la zona de frecuencias altas las aceleraciones son prácticamente las mismas, independientemente del factor de ductilidad. De acuerdo con esto y teniendo en cuenta que las curvas representan desplazamientos elásti-

cos, los desplazamientos totales en la zona de bajas frecuencias serán iguales a los desplazamientos máximos del terreno, tal como ocurría en los espectros elásticos.

De los resultados obtenidos en este caso y los de estudios similares realizados para otros sismos, se obtienen las siguientes conclusiones:

- En la zona de bajas frecuencias, el desplazamiento total es el mismo para la respuesta inelástica que para la respuesta del sistema elástico de igual frecuencia.
- En la zona de frecuencias intermedias, la energía absorbida por el sistema inelástico es la misma que la absorbida por el sistema elástico de igual frecuencia.
- En la zona de altas frecuencias, la aceleración es la misma para la respuesta inelástica que para la respuesta del sistema elástico de igual frecuencia.

Estas conclusiones se han representado de una forma aproximada en la figura 6.

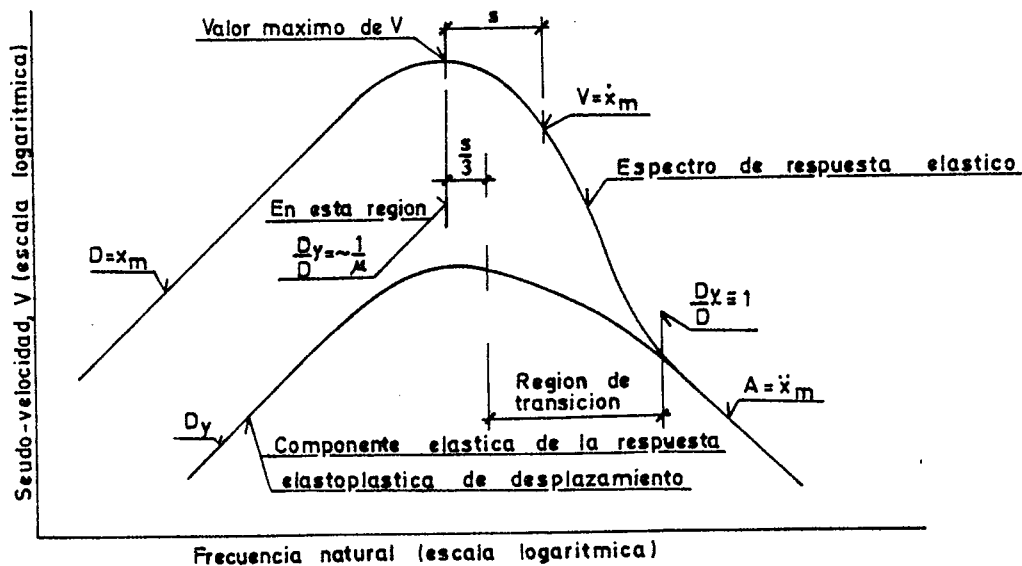


Figura 6

Obtención del espectro de respuesta inelástico

En resumen y tomando como base los resultados de los estudios realizados hasta el momento, pueden realizarse diseños conservativos con el empleo de un espectro inelástico, obtenido a partir del espectro elástico mediante unas transformaciones (tabla 1 (9)) que son función del factor de ductilidad ( $\mu$ ).

<u>Cantidad que se conserva</u>	<u>Desplazamiento</u>	<u>Aceleración</u>
Desplazamiento	1	$\frac{1}{\mu}$
Energía (o velocidad)	$\frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}}$
Fuerza (o aceleración)	$\mu$	1

Tabla 1. Relación entre valores del espectro elástico y elasto-plástico.

De acuerdo con esta tabla, en un caso habitual de factor de ductilidad  $\mu = 5$ , se tendría lo siguiente:

- A lo largo de una línea de desplazamiento constante, el desplazamiento para el espectro inelástico es el mismo del elástico y la aceleración tiene un valor de un quinto de la del elástico.
- A lo largo de una línea de velocidad constante, el desplazamiento del espectro inelástico es cinco tercios y la aceleración un tercio de la del elástico.
- A lo largo de una línea de aceleración constante, el desplazamiento del espectro inelástico es cinco veces mayor y la aceleración de la misma que en el espectro elástico.

### 2.3.2. Otros procedimientos

El método para obtener el espectro de respuesta de un sistema

inelástico a partir del espectro elástico, presentado en el apartado anterior, fue propuesto por Newmark y Hall. Desde la aparición de este método han continuado los estudios sobre la respuesta de sistemas inelásticos, que han dado lugar a distintas correcciones al procedimiento señalado. Uno de los estudios es el debido a Lai y Biggs (8). En este estudio se generaron artificialmente varios movimientos del suelo para investigar todas las posibles causas que pueden influir en el espectro de respuesta inelástica (duración del movimiento, factor de ductilidad, relación de amortiguamiento, etc.). A partir de estos análisis se observa que el espectro de respuesta inelástico no depende significativamente de la duración del movimiento, siempre que los desplazamientos con duración variable sean compatibles con el mismo espectro de respuesta elástica.

En este mismo estudio se llega a la conclusión de que el procedimiento de Newmark-Hall, para construir el espectro inelástico para 5% de amortiguamiento, da resultados erróneos del lado contrario a la seguridad y que el error aumenta al aumentar el factor de ductilidad. A partir de los casos analizados se proponen una serie de relaciones para construir los espectros de respuesta inelástica. En la figura 7, se dan estas curvas para una relación de amortiguamiento del 5% y distintos períodos ( $a = 0.1$  seg,  $b = 0.5$  seg,  $c = 0.7$  seg y  $d = 4.0$  seg.).

A partir de estas relaciones de respuesta inelástica se construye el espectro de respuesta inelástico. En la figura 7, se ha representado el espectro inelástico para  $\mu = 4$  y relación de amortiguamiento del 5%, comparándolo con el Newmark-Hall correspondiente a estos mismos valores.

En esta figura puede verse que para un período no amortiguado de 0.6 segundos, el desplazamiento inelástico de este método es alrededor de un 30% mayor y la aceleración inelástica un 50% mayor que los valores del método de Newmark-Hall.

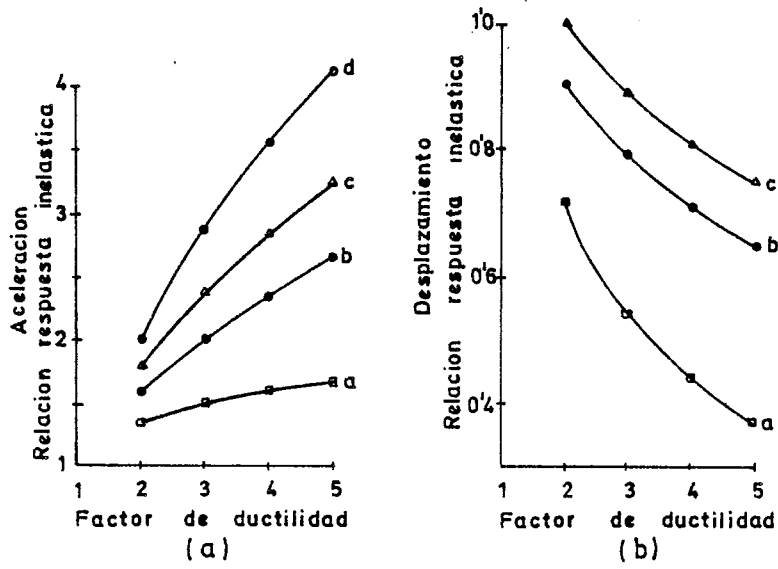


Figura 7

Variación de la respuesta inelástica con el factor de ductilidad (8)

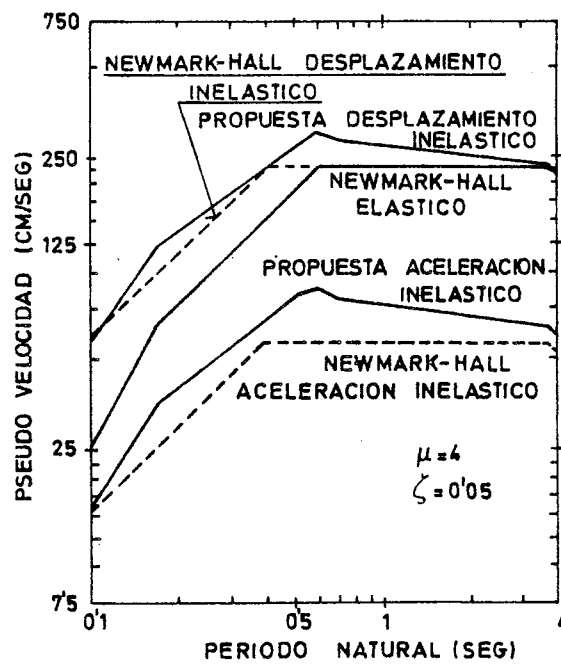


Figura 8

Comparación de espectros de respuesta inelásticos (8)

Referencias

1. CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Kogakusha, 1975.
2. CLOUGH, R. W., "Earthquake Response of Structures", capítulo 12 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, Inc., 1970.
3. DONOVAN, N. C., VALERA, J. E., BERESFORD, P.J., "Statistical Uncertainty of Design Based on Smoothed Response Spectra", *US National Conference on Earthquake Engineering*, Ann. Arbor, Michigan, 1975, pp. 53-59.
4. ESTEVA, L., "Ductilidad y Comportamiento Sísmico", *Jornadas Técnicas sobre Ingeniería Sísmica*, ETSICCP, Barcelona 21-22 Marzo 1977.
5. ESTRADA, G., *Estructuras Antisísmicas*, Compañía Editora Continental, S.A., Mexico, 2ª Edición, 1975.
6. HOUSNER, G. W., "Design Spectrum", capítulo 5 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, Inc., 1970.
7. HOUSNER, G. W., "Strong Ground Motion", capítulo 4 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, Inc., 1970.
8. LAI, S. P., BIGGS, J. M., "Inelastic Response Spectra for Aseismic Building Design", *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 106, ST6, June 1980, pp. 1295-1310.
9. NEWMARK, N. M., "Current Trends in the Seismic Analysis and Design of High-Rise Structures", capítulo 16 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, 1970.

10. NEWMARK, N. M., ROSENBLUETH, E., *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*, Diana, 2ª Edición, 1978.
11. NEWMARK, N. M., VELETSOS, A. S., "Design Procedures for Shock Isolation Systems of Underground Protective Structures, Vol. III, Response Spectra of Single Degree of Freedom Elastic and Inelastic Systems", *Report for Air Force Weapons Laboratory*, June 1964.
12. RIDDELL, R., NEWMARK, N. M., "Statistical Analysis of the Response of Nonlinear Systems Subject to Earthquakes", *Structural Research Series No. 468, Civil Engineering Studies*, University of Illinois, Urbana-Champaign, August 1979.
13. SHIBATA, A., SOZEN, M. A., "Substitute Structure Method to Determine Design Forces in Earthquake Resistant Reinforced Concrete Frames", *Sixth World Conference on Earthquake Engineering*, New Delhi, India, January 1977, Vol. 5, pp. 162-172.
14. SHIBATA, A., SOZEN, M. A., "Substitute Structure Method for Seismic Design in R/C", *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division* Vol. 102, ST1., January 1976, pp. 1-18.
15. SHIBATA, A., SOZEN, M. A., "Use of Linear Models in Design to Reflect the Effect of Nonlinear Response", *Proceedings of the Review Meeting US-Japan Cooperative Research Program in Earthquake Engineering*, August 18-20, Honolulu, Hawai.
16. SMILOWITZ, R., NEWMARK, N. M., "Design Seismic Accelerations in Buildings", *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division*, V.105, No. ST12, December 1979, pp. 2487-2496.
17. TANSIRIKONGKOL, V., PECKNOLD, D. A., "Equivalent Linear SDF Response to Earthquakes", *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division* Vol. 105, No. ST12, December 1979, pp. 2529-2545.

18. VELETSOS, A. S., NEWMARK, N. M., "Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions", *Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering*, Vol. II, Tokyo, 1960.
19. ZSUTTY, T., "Some Problems and Decisions Relative to the Response Spectrum Method of Seismic Design", *US National Conference on Earthquake Engineering*, Ann. Arbor, Michigan, pp. 87-93, June 1975.



## Capítulo 3

### SISTEMAS DINAMICOS DE MULTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

#### 3.1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se ha visto que cualquier estructura puede representarse por un sistema de un solo grado de libertad, cuya respuesta dinámica puede evaluarse en cada instante a partir de la Integral de Duhamel y que pueden obtenerse los valores máximos de fuerzas y desplazamientos a partir del espectro de respuesta para el movimiento considerado. Ahora bien, los resultados de este análisis solo serán representativos de la respuesta de la estructura si su desplazamiento realmente puede representarse por una única coordenada, generalizada o no. Principalmente, el que la respuesta de una estructura pueda obtenerse a partir de una idealización de un solo grado de libertad, depende de los siguientes factores:

- La distribución a lo largo de la estructura de las propiedades de masa y rigidez. En general, la masa está distribuida uniformemente a lo largo de la estructura y la distribución de rigideces es tal que no permite su estudio como sistema de un grado de libertad.
- La variación con el tiempo del valor y dirección de la carga efectiva aplicada. En función de esto, el análisis como sistema de un grado de libertad solo dará buenos resultados en aquellos casos en que la fuerza aplicada excite de una forma predominante una de las formas de respuesta de la estructura.

En la mayoría de casos, estos factores hacen necesario el empleo de más de un grado de libertad para describir adecuadamente la respues-

ta de la estructura. El movimiento de la estructura en estos casos viene definido por los desplazamientos de una serie de puntos, en los que se acumulan además las masas distribuidas de la estructura. En principio no existe ninguna imposición para la localización de estos puntos, ahora bien, los resultados obtenidos serán mejores si se emplean aquellos que puedan dar una mejor definición de la deformada de la estructura. En cuanto al número de puntos a emplear, evidentemente cuanto mayor sea este número, mejor será la aproximación de los resultados a la solución real; sin embargo, en muchas ocasiones puede ocurrir que la mejora en los resultados no compense el aumento de cálculos producido. Hay que tener en cuenta además que, tal como se señala en el apartado correspondiente a condensación dinámica de grados de libertad, el número de puntos necesario para obtener un resultado dinámico con una cierta precisión es menor que el necesario para obtener la misma precisión en resultados de análisis estático.

### 3.2. ECUACIONES DE DESPLAZAMIENTO

Como ejemplo para la formulación de estas ecuaciones vamos a emplear la estructura de "n" plantas representada en la fig. 1. Como es habitual en el análisis dinámico de las estructuras de edificios en altura, se emplean las siguientes aproximaciones:

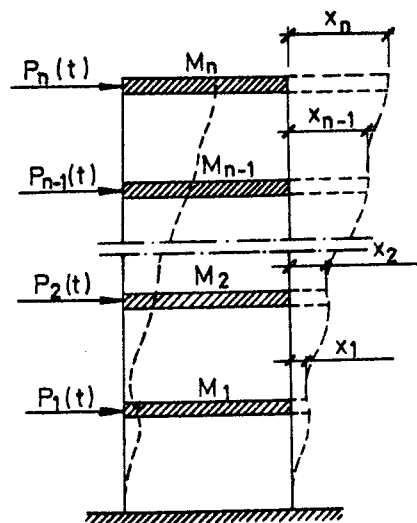


Figura 1

Modelo de "n" grados de libertad

- La masa de la estructura está concentrada únicamente en los pisos.
- No se consideran las deformaciones axiales de vigas y columnas (rigidez axial infinita), o lo que es lo mismo, solo se consideran desplazamientos horizontales.

Con esto, la respuesta dinámica de esta estructura está completamente definida por los desplazamientos horizontales de los "n" pisos que la componen y las ecuaciones de desplazamiento del sistema pueden formularse a partir del equilibrio de las fuerzas asociadas con cada uno de estos desplazamientos. Como en el caso de un solo grado de libertad, las fuerzas que aparecen son de cuatro tipos:

- Fuerzas exteriores ( $P_i(t)$ )
- Fuerzas de inercia ( $F_{Ii}$ )
- Fuerzas de amortiguamiento ( $F_{Ai}$ )
- Fuerzas elásticas ( $F_{Ei}$ )

Así pues, planteando las ecuaciones de equilibrio dinámico para cada piso se tiene:

$$\begin{array}{rcl}
 F_{I1} + F_{A1} + F_{E1} & = & P_1(t) \\
 F_{I2} + F_{A2} + F_{E2} & = & P_2(t) \\
 - & - & - \\
 - & - & - \\
 F_{In} + F_{An} + F_{En} & = & P_n(t)
 \end{array} \tag{3.1}$$

Estas ecuaciones pueden ponerse en forma matricial como:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} \tag{3.2}$$

Para llegar a estas ecuaciones hay que tener en cuenta que las fuerzas de inercia en cada piso vienen dadas por el producto de su masa

y su aceleración:

$$F_{Ii} = M_i \ddot{x}_i \quad (3.3)$$

haciendo esto para cada piso y poniéndolo en forma matricial se tiene:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\} \quad (3.4)$$

siendo:

$\{F_I\}$  vector columna de orden "n" formado por las fuerzas de inercia de cada piso.

$[M]$  matriz de masas (cuadrada de orden "n"), con todo ceros excepto la diagonal principal, en la que se colocan las masas totales de cada piso.

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & M_2 & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & M_{n-1} & 0 \\ 0 & - & - & - & - & M_n \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$\{\ddot{x}\}$  vector columna de orden "n" formado por la aceleración de cada uno de los pisos.

$$\{\ddot{x}\} = \{\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_{n-1}, \ddot{x}_n\}^T \quad (3.6)$$

En la ecuación (3.4), al ser la matriz de masa diagonal, la fuerza de inercia correspondiente a un grado de libertad es única-

mente función de la masa y aceleración de ese grado de libertad. En el caso en que se empleen coordenadas generalizadas se producirán acoplamientos entre los distintos grados de libertad, lo que complica el análisis, sobre todo por tener que operar con las matrices completas.

Las fuerzas elásticas dependen de los desplazamientos del sistema y pueden expresarse, de forma similar a como se hace en el análisis matricial elástico, como:

$$\{F_E\} = [K] \{x\} \quad (3.7)$$

siendo:

$\{F_E\}$  vector columna de orden "n" formado por las fuerzas elásticas de cada piso.

$[K]$  matriz de rigidez (cuadrada de orden "n").

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & - & - & - & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & - & - & - & K_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ K_{n1} & K_{n2} & - & - & - & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$\{x\}$  vector columna orden "n" formado por los desplazamientos de cada uno de los pisos.

$$\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}^T \quad (3.9)$$

Finalmente, igual que se ha hecho con las fuerzas elásticas, las fuerzas de amortiguamiento pueden ponerse como producto de una matriz de amortiguamiento por el vector de velocidades de piso:

$$\{F_A\} = [C] \{\dot{x}\} \quad (3.10)$$

siendo:

$\{F_A\}$  vector columna de orden "n" formado por las fuerzas de amortiguamiento de cada piso.

$[C]$  matriz de amortiguamiento (cuadrada de orden "n")

$\{\dot{x}\}$  vector columna de orden "n" formado por las velocidades de cada piso.

### 3.3. MODOS DE VIBRACION Y FRECUENCIAS

En el análisis de sistemas de un grado de libertad hemos visto que la respuesta dinámica depende de dos factores básicos: la frecuencia ( $\omega$ ) o período de vibración ( $T$ ) y la forma de desplazamiento  $\Psi(x)$  (excepto cuando la masa se supone concentrada en un punto). En el caso de sistemas de múltiples grados de libertad, la respuesta dinámica viene condicionada por esos mismos valores, por lo que el primer paso para el análisis de estos sistemas será la evaluación de las frecuencias y modos de vibración.

La ecuación que da la vibración libre del sistema, sin considerar el amortiguamiento, se obtiene haciendo  $[C] = 0$  y  $\{P(t)\} = 0$  en la ecuación 3.2.

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (3.11)$$

Igual que en los sistemas de un grado de libertad, suponiendo que el desplazamiento es armónico, puede ponerse:

$$x(t) = x \text{ sen}(\omega t + \theta) \quad (3.12)$$

siendo  $x$  la amplitud de la vibración,  $\omega$  la frecuencia y  $\theta$  un ángulo de

fase. A partir de esta ecuación, la aceleración viene dada por:

$$\ddot{x}(t) = -w^2 x \text{ sen}(wt + \theta) = -w^2 x(t) \quad (3.13)$$

sustituyendo (3.12) y (3.13) en (3.11), se tiene:

$$-w^2 [M] \{x\} \text{ sen}(wt + \theta) + [K] \{x\} \text{ sen}(wt + \theta) = \{0\} \quad (3.14)$$

como esta ecuación ha de cumplirse para cualquier valor arbitrario de  $\text{sen}(wt + \theta)$  puede ponerse:

$$[K] - w^2 [M] \{x\} = \{0\} \quad (3.15)$$

La solución de este sistema de ecuaciones simultáneas es de la forma:

$$\{x\} = \frac{\{0\}}{\left| \left[ [K] - w^2 [M] \right] \right|} \quad (3.16)$$

así pues, solo es posible una solución distinta de la trivial  $\{x\} = \{0\}$ , cuando el determinante del denominador se hace cero:

$$\left| \left[ [K] - w^2 [M] \right] \right| = \{0\} \quad (3.17)$$

Operando en este determinante se obtiene una ecuación algebraica de grado "n" en  $w^2$ , que se denomina *ecuación característica*. Las "n" raíces de esta ecuación ( $w_1^2, w_2^2, \dots, w_j^2, \dots, w_n^2$ ) se denominan *valores propios*. En el análisis estructural en que las matrices de masa y rigidez son reales, simétricas y definidas positivas, se demuestra que los valores propios son siempre positivos y, por tanto, todas las frecuencias  $w_j$  son reales y positivas. A la frecuencia más pequeña se le denomina *frecuencia fundamental* y al período correspondiente, *período fundamental*.

Sustituyendo cada uno de los valores propios en la ecuación (3.15), se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneas. Este sistema de ecuaciones no tiene solución única, o lo que es lo mismo, los *vectores*

propios solución del mismo tienen sus amplitudes indeterminadas. Lo que si que se puede obtener es la *forma* de la vibración asociada a cada frecuencia ( $w_j$ ), que se denomina *modo de vibración* ( $\{\phi_j\}$ ). Para obtener los modos de vibración se le asigna el valor 1 a uno de los desplazamientos y se obtienen los restantes desplazamientos con relación a este. Con el objeto de obtener la máxima precisión en los cálculos y unificar los resultados es conveniente asignar el valor 1 al desplazamiento máximo de cada modo.

Los modos de vibración libre tienen dos propiedades de ortogonalidad que resultan de gran utilidad para simplificar el análisis dinámico de un sistema. Estas propiedades pueden demostrarse, por ejemplo, por aplicación de la ley de Betti (ref. 1 pág. 185-186), y pueden ponerse como:

a) para las masas

para un sistema con masas puntuales

$$\sum_{i=1}^n M_i \phi_j \phi_k = 0 \quad \begin{array}{l} j, k = 1, 2, \dots, n \\ j \neq k \end{array} \quad (3.18)$$

y en forma matricial, más general

$$\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_k\} = 0 \quad \begin{array}{l} j, k = 1, 2, \dots, n \\ j \neq k \end{array} \quad (3.19)$$

b) para las rigideces, en forma matricial

$$\{\phi_j\}^T [K] \{\phi_k\} = 0 \quad \begin{array}{l} j, k = 1, 2, \dots, n \\ j \neq k \end{array} \quad (3.20)$$

#### 3.4. ECUACIONES MODALES DE DESPLAZAMIENTO: SUPERPOSICION MODAL

Se ha visto que un sistema de "n" grados de libertad tiene "n"



modos independientes de vibración; por tanto, cualquier posición deformada del sistema puede darse como combinación lineal de estos modos, tratándolos como coordenadas generalizadas de desplazamiento. Así pues, cualquier desplazamiento  $x_i$  será igual a la suma de las contribuciones de cada modo:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} X_j \tag{3.21}$$

siendo  $X_j$  la amplitud del modo "j". En forma matricial, el desplazamiento total del sistema puede ponerse como:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} X_j = [\phi] \{X\} \tag{3.22}$$

siendo:

$$[\phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ - & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ - & - & \dots & - \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Diferenciando la ecuación (3.22) y sustituyendo los valores  $\{x(t)\}$ ,  $\{\dot{x}(t)\}$  y  $\{\ddot{x}(t)\}$  en la (3.2) se tiene:

$$[M] [\phi] \{\ddot{X}\} + [C] [\phi] \{\dot{X}\} + [K] [\phi] \{X\} = \{P(t)\} \tag{3.24}$$

Multiplicando ambos miembros por el vector traspuesto de uno de los modos  $\{\phi_j\}$  se tiene:

$$\{\phi_j\}^T [M] [\phi] \{\ddot{X}\} + \{\phi_j\}^T [C] [\phi] \{\dot{X}\} + \{\phi_j\}^T [K] [\phi] \{X\} = \{\phi_j\}^T \{P(t)\} \tag{3.25}$$

teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de los modos para las matrices de masa y de rigidez y suponiendo que se cumplen también para la matriz de amortiguamiento, se llega a:

$$\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\} \ddot{X}_j + \{\phi_j\}^T [C] \{\phi_j\} \dot{X}_j + \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_j\} X_j = \{\phi_j\}^T \{P(t)\} \quad (3.26)$$

Esta ecuación de desplazamiento en coordenadas modales, puede ponerse como:

$$M_j^* \ddot{X}_j + C_j^* \dot{X}_j + K_j^* X_j = P_j^*(t) \quad (3.27)$$

siendo:

$$\text{Masa generalizada} \quad M_j^* = \{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\} \quad (3.28a)$$

$$\text{Amortiguamiento generalizado} \quad C_j^* = \{\phi_j\}^T [C] \{\phi_j\} \quad (3.28b)$$

$$\text{Rigidez generalizada} \quad K_j^* = \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_j\} \quad (3.28c)$$

$$\text{Fuerza generalizada} \quad P_j^*(t) = \{\phi_j\}^T \{P(t)\} \quad (3.28d)$$

aplicando a estos valores generalizados las relaciones de la rigidez y el amortiguamiento con la masa, obtenidas en sistemas de un grado de libertad, se tiene:

$$C_j^* = 2 \xi_j w_j M_j^* \quad (3.29)$$

$$K_j^* = w_j^2 M_j^* \quad (3.30)$$

sustituyendo estos valores en (3.27), se tiene finalmente:

$$\ddot{X}_j + 2 \xi_j w_j \dot{X}_j + w_j^2 X_j = \frac{P_j^*(t)}{M_j^*} \quad (3.31)$$

Esta ecuación, obtenida para el modo "j", puede aplicarse a cada uno de los "n" modos de vibración libre del sistema. Así pues, la solución de las ecuaciones de desplazamiento de un sistema de "n" grados de libertad, que en principio requería la solución de un sistema de "n" ecuaciones, se ha reducido a la solución de "n" ecuaciones independientes, una para cada modo, iguales a las de los sistemas con un grado de libertad.

### 3.5. RESPUESTA A LOS SISMOS

En el caso de excitación sísmica, las acciones sobre el sistema provienen de las fuerzas de inercia que en él se desarrollan, producto de la masa en cada punto por la aceleración del suelo. En el caso de estructuras de varias plantas, en el piso "i" por ejemplo, la fuerza efectiva es:

$$P_{ief}(t) = M_i \ddot{x}_g(t) \quad (3.32)$$

y el vector de fuerzas efectivas totales vendrá dado por:

$$\{P_{ef}(t)\} = [M] \{I\} \ddot{x}_g(t) \quad (3.33)$$

siendo  $\{I\}$  un vector columna unitario de dimensión "n". Sustituyendo esta ecuación en la (3.28), se tiene:

$$P_{ef}^*(t) = \{\phi_j\}^T [M] \{I\} \ddot{x}_g(t) = f_j \ddot{x}_g(t) \quad (3.34)$$

siendo  $f_j$  el *factor de participación* para el modo "j", dado por:

$$f_j = \{\phi_j\}^T [M] \{I\} \quad (3.35)$$

sustituyendo (3.35) en (3.31), se tiene:

$$\ddot{x}_j + 2 \xi_j w_j \dot{x}_j + w_j^2 x_j = \frac{f_j}{M_j^*} \ddot{x}_g(t) \quad (3.36)$$

A partir de la ecuación de Duhamel, se obtiene la respuesta del modo "j" en cualquier instante (t) como:

$$X_j(t) = \frac{f_j}{M_j^*} \frac{1}{w_j} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) e^{-\xi_j w_j (t-\tau)} \text{sen } w_j (t-\tau) d\tau \quad (3.37)$$

que puede ponerse como:

$$X_j(t) = \frac{f_j}{M_j^*} \frac{V_j(t)}{w_j} \quad (3.38)$$

Una vez obtenidas las respuestas para cada uno de los "n" modos del sistema, la respuesta total se obtiene superponiendo la contribución de cada uno de acuerdo con la ecuación (3.22), resultando:

$$\{x(t)\} = [\phi] \{X(t)\} = [\phi] \left\{ \frac{f_j}{M_j^* w_j} V_j(t) \right\} \quad (3.39)$$

Una ventaja del procedimiento de superposición modal, es que puede obtenerse una solución aproximada empleando solo una parte de los modos de la estructura en el proceso de superposición. En el caso de acciones sísmicas, la mayor participación corresponde a los dos o tres primeros modos (los de frecuencias mas bajas), con lo que pueden obtenerse unos resultados aceptables y reducir el tiempo de proceso empleando solo las respuestas de estos modos.

A partir de los desplazamientos en un instante "t", las fuerzas elásticas pueden obtenerse directamente como:

$$\{f_E\} = [K] \{x(t)\} = [K] [\phi] \{X(t)\} \quad (3.40)$$

sin embargo, igual que en el caso de los sistemas de un grado de libertad, resulta más conveniente expresarlas en función de las fuerzas de inercia desarrolladas en la vibración libre del sistema. En este caso:

$$[K] \cdot [\phi] = [M] [\phi] [\Omega^2] \quad (3.41)$$

siendo  $[\Omega^2]$  una matriz diagonal cuyos términos son las frecuencias al cuadrado.

Sustituyendo la ecuación (3.41) en la (3.40), se tiene:

$$\{f_E(t)\} = [M] [\phi] [\Omega^2] \{X(t)\} \quad (3.42)$$

y sustituyendo el valor de (3.39):

$$\{f_E(t)\} = [M] [\phi] \left\{ \frac{\xi_j}{M_j^*} w_j V_j(t) \right\} \quad (3.43)$$

Una vez obtenidas las fuerzas elásticas en un instante "t", el resto de acciones (cortante en la base, momento de vuelco, etc.) pueden calcularse a partir de las ecuaciones de la estática. El *cortante en la base* viene dado por la suma de las fuerzas en cada piso, y vale:

$$Q_o(t) = \sum_{j=1}^n f_{Ej}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{M_j^*} w_j V_j(t) \quad (3.44)$$

de la misma forma, el *momento de vuelco* total en la base viene dado por:

$$M_o(t) = \sum_{j=1}^n Y_j f_{Ej}(t) = \{Y\}^T [M] [\phi] \left\{ \frac{\xi_j}{M_j^*} w_j V_j(t) \right\} \quad (3.45)$$

donde  $Y_j$  es la distancia desde el piso "j" hasta la base

La cantidad  $\frac{\xi_j^2}{M_j^*}$  tiene las dimensiones de una masa y se le deno-

mina *masa modal efectiva* de la estructura, pudiéndose interpretar como la parte de la masa total que responde al sismo en cada modo. Puede demostrarse que la suma de las masas efectivas es igual a la masa total del sistema. Multiplicando la masa modal efectiva por la aceleración de la gravedad se tiene el *peso efectivo* para el modo "j":

$$W_j = \frac{\xi_j^2}{M_j^*} g \quad (3.46)$$

en función de este valor, el cortante en la base para el modo "j" puede ponerse como:

$$Q_j(t) = \frac{W_j}{g} W_j V_j(t) \quad (3.47)$$

y la distribución de fuerzas para el modo "j":

$$\{f_j(t)\} = [M] \{\phi_j\} \frac{Q_j(t)}{\xi_j} \quad (3.48)$$

### 3.6. ANALISIS SISMICO CON ESPECTROS: COMBINACION DE LAS RESPUESTAS MODALES MAXIMAS

La respuesta a un sismo de un sistema de múltiples grados de libertad en un instante "t" puede obtenerse por medio de las ecuaciones (3.39). Ahora bien, en las aplicaciones prácticas resulta de mayor interés obtener las respuestas máximas del sistema, ya que van a ser estos valores los que van a condicionar el diseño. Para obtener estos valores máximos con el procedimiento de superposición modal, hay que evaluar la respuesta de cada uno de los modos a lo largo del sismo, para posterior-

mente sumarlas y obtener las respuestas máximas. Frente a este procedimiento, que requiere una gran cantidad de cálculos, se ha desarrollado un procedimiento de análisis basado en los espectros de respuesta, que se expone a continuación.

Las expresiones para la respuesta de un modo "j" obtenidas en el apartado anterior, son totalmente equivalentes a las obtenidas para los sistemas de un grado de libertad en coordenadas generalizadas. Así pues, resulta evidente que las respuestas máximas de cada modo pueden ser obtenidas a partir del espectro de respuesta sísmico, empleando los mismos procedimientos que en los sistemas de un grado de libertad. De acuerdo con esto, introduciendo la velocidad espectral  $S_{vj}$  para el modo "j" en la ecuación (3.38), se tiene la respuesta máxima de desplazamiento de dicho modo.

$$X_{j\max} = \frac{f_j}{M_j^*} \frac{S_{vj}}{w_j} = \frac{f_j}{M_j^*} S_{dj} \quad (3.49)$$

la distribución de desplazamientos máximos en este modo viene dada por:

$$\{X_{j\max}\} = \{\phi_j\} X_{j\max} = \{\phi_j\} \frac{f_j}{M_j^*} S_{dj} \quad (3.50)$$

la distribución de fuerzas por:

$$\{f_{j\max}\} = [M] \{\phi_j\} w_j^2 X_{j\max} = [M] \{\phi_j\} \frac{f_j}{M_j^*} S_{aj} \quad (3.51)$$

y el cortante máximo en la base por:

$$Q_{j\max} = W_j \frac{S_{aj}}{g} \quad (3.52)$$

Una vez obtenidos los valores máximos de las respuestas de cada modo, hay que combinarlas para obtener la respuesta máxima total. Evidentemente, la suma de los valores modales máximos no se alcanzan al mismo tiempo. Este procedimiento se ha visto que da resultados excesivamente conservadores; debido a esto, se han propuesto otros métodos que dan valores mas acordes con los obtenidos, mediante análisis con métodos paso a paso.

Nelson (5) plantea el problema de la combinación de modos a partir del caso simplificado de un sistema vibrando con dos modos naturales. Partiendo de las hipótesis:

- Tiempo de respuesta suficientemente largo.
- Las respuestas modales en el tiempo pueden asimilarse a funciones aleatorias de banda estrecha de valor medio cero.

se llega a:

$$x_p^2 = x_{1,p}^2 + x_{2,p}^2 + 2\rho_{x_1,x_2}(0) x_{1,p} x_{2,p} \quad (3.53)$$

siendo:

$\rho_{x_1,x_2}$  un coeficiente de correlación cruzada.

$x_{1,p}$  y  $x_{2,p}$  valores máximos de las respuestas modales.

El coeficiente de correlación cruzada ( $\rho_{x_1,x_2}$ ) da la dependencia funcional entre las respuestas en el tiempo. Si no existe correlación entre estas respuestas, el coeficiente de correlación será cero, con lo cual:

$$x_p^2 = x_{1,p}^2 + x_{2,p}^2 \quad (3.54)$$

o

$$x_p = [x_{1,p}^2 + x_{2,p}^2]^{1/2} \quad (3.55)$$



se llega de esta forma a la regla de *suma de cuadrados* de los máximos de las respuestas modales. En algunos casos puede ocurrir que haya una total correlación entre los modos o que sea necesario conocer una cota superior de la respuesta, en estos casos basta tener en cuenta que:

$$|X_{1,p}| + |X_{2,p}| \geq [X_{1,p}^2 + X_{2,p}^2]^{1/2} \quad (3.56)$$

con lo cual, a partir de (3.55):

$$X_p \leq |X_{1,p}| + |X_{2,p}| \quad (3.57)$$

que corresponde a la regla de suma de *valores absolutos*.

Queda finalmente el caso en que haya una correlación media entre los modos, como ocurre cuando las frecuencias son bastante cercanas. En este caso, adoptando para el coeficiente de correlación cruzada la expresión:

$$\rho_{x_1, x_2}(0) = \frac{1}{2(1+\zeta_{12}^2)} \quad (3.58)$$

Se llega a la expresión conocida como *regla de la doble suma modal*.

$$X_p = \left[ X_{1,p}^2 + X_{2,p}^2 + \frac{X_{1,p} X_{2,p}}{1+\zeta_{12}^2} \right]^{1/2} \quad (3.59)$$

esta regla fue propuesta por Rosenblueth y Elorduy y se obtiene considerando un segmento de ruido blanco de duración "s"(11). La expresión propuesta para  $\zeta_{12}$  es:

$$\zeta_{12} = \frac{w_{D1} - w_{D2}}{\xi_1' w_1 + \xi_2' w_2} \quad (3.60)$$

siendo  $w_1$  y  $w_2$  las frecuencias naturales libres,  $w_{D1}$  y  $w_{D2}$  las frecuencias naturales amortiguadas y  $\xi'_1$  y  $\xi'_2$  los grados equivalentes de amortiguamiento, dados por:

$$\xi'_j = \xi_j + \frac{2}{w_j s} \quad (3.61)$$

La ecuación (3.59) da resultados mejores que las (3.56) y (3.57) sobre todo cuando las frecuencias son muy próximas, ya que al ir aumentando la separación entre ellas va incrementándose el valor de  $\zeta_{12}$  y se igualan los resultados de ambas ecuaciones.

La generalización de estas ecuaciones para "n" modos es directa, resultando:

a) doble suma

$$X_p = \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n X_{p,j} X_{p,k} \zeta_{j,k} \right]^{1/2} \quad (3.62)$$

con

$$\zeta_{jk} = \frac{w_{Dj} - w_{Dk}}{\xi'_j w_j + \xi'_k w_k} \quad (3.63)$$

b) suma de cuadrados

$$X_p = \left[ \sum_{j=1}^n X_{p,j}^2 \right]^{1/2} \quad (3.64)$$

c) suma de valores absolutos

$$X_p = \sum_{j=1}^n |X_{p,j}| \quad (3.65)$$

En el caso de edificios en altura, las diferencias entre las frecuencias naturales de los modos principales hace que resulte suficientemente correcto el empleo de la suma de cuadrados, de los máximos modales para obtener las respuestas máximas.

Referencias

1. CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Kogakusha, 1975.
2. CLOUGH, R. W., "Earthquake Response of Structures", capítulo 12 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, Inc., 1970.
3. HURTY, W. C., RUBINSTEIN, M. F., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Inc. 1970.
4. HOUSNER, G. W., "Strong Ground Motion", capítulo 4 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, Inc., 1970.
5. NELSON, F. C., "The Role of Closely Spaced Modes in the Seismic Response of Equipament and Structures".
6. NEWMARK, N. M., "Current Trends in the Seismic Analysis and Design of High-Rise Structures", capítulo 16 de *Earthquake Engineering*, WIEGEL, R. L. (editor), Prentice-Hall, Inc., 1970.
7. NEWMARK, N. M., ROSENBLUETH, E., *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*, Diana, 2ª Edición, 1978.
8. PAZ, M., *Structural Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
9. RASCON, O. A., VILLARREAL, A. G., *Estudio Estadístico de los Criterios para Estimar la Respuesta Sísmica de Sistemas Lineales con dos Grados de Libertad*, Instituto de Ingeniería UNAM, Mexico.
10. RIDDELL, R., NEWMARK, N. M., "Statiscal Analysis of the Response of Nonlinear Systems Subject to Earthquakes", *Structural Research Series No. 468, Civil Engineering Studies*, University of Illinois, Urbana Champaign, August 1979.

11. ROSENBLUETH, E., ELORDY, J., "Response of Linear Systems to Certain Transient Disturbances", *Proceedings 4th World Conference on Earthquake Engineering*, 1969.
12. ZSUTTY, T., "Some Problems and Decisions Relative to the Response Spectrum Method of Seismic Design", *US National Conference on Earthquake Engineering*, Ann. Arbor, Michigan, pp. 87-93, June 1975.

## Capítulo 4

### FORMULACION DE LAS CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS ELEMENTOS

#### 4.1. INTRODUCCION

En este capítulo se expone la forma de obtener las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento para un elemento prismático recto. Se ha procurado dar la mayor generalidad al planteamiento, de manera que permita tratar el problema dinámico en su máxima amplitud. De una parte se calcula la matriz de rigidez del elemento como suma de la *matriz de rigidez elástica* y la *matriz de rigidez geométrica*, lo que permite tener en cuenta efectos no lineales debidos a los desplazamientos relativos entre los extremos de los elementos.

Asimismo se consideran dos tipos de matrices de masa, la *matriz de masas consistente* y la *matriz de masas condensada*. La primera se puede obtener mediante la aplicación del Principio de Hamilton y la segunda por ensamble directo, suponiendo que toda la masa que contribuye a un grado de libertad está concentrada en ese grado de libertad.

#### 4.2. MATRICES DE RIGIDEZ ELASTICA Y GEOMETRICA

Consideremos un elemento prismático recto con su sistema de coordenadas local representados en la figura 1.

Sea  $\{u\}$  el vector columna de desplazamientos ( $u_x, u_y, u_z$ ) en un punto interior del elemento. Si se representa con el vector  $\{X\}$  los desplazamientos y giros en ambos extremos del elemento en el sistema local:

$$\{X\} = \{\delta_{xi}, \delta_{yi}, \delta_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, \delta_{xj}, \delta_{yj}, \delta_{zj}, \theta_{xj}, \theta_{yj}, \theta_{zj}\}^T \quad (4.1)$$

empleando las teorías de flexión y torsión y despreciando las deforma-

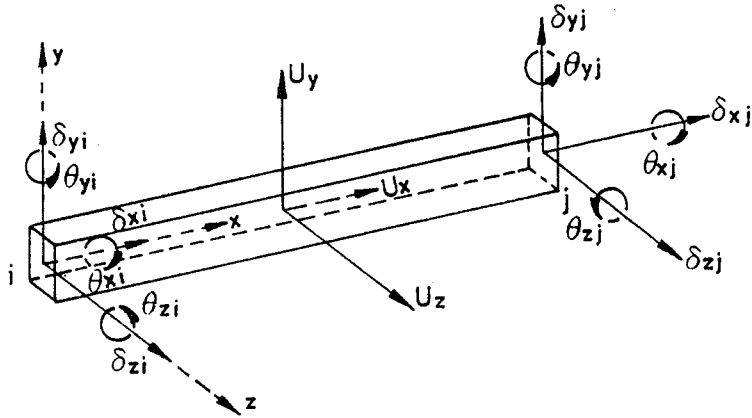


Figura 1

Elemento prismático recto

ciones por cortante se demuestra (ref. 9 pp. 292-293) que:

$$\{u\} = [N] \{x\} \tag{4.2}$$

siendo:

$$[N]^T = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 \\ 6(\xi-\xi^2) & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 \\ 6(\xi-\xi^2)\zeta & 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ 0 & -(1-\xi)L\zeta & -(1-\xi)L\eta \\ (1-4\xi+3\xi^2)L\zeta & 0 & (-\xi+2\xi^2-\xi^3)L \\ (-1+4\xi-3\xi^2)L\eta & (-2\xi^2+\xi^3)L & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 6(-\xi+\xi^2)\eta & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 \\ 6(-\xi+\xi^2)\zeta & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 \\ 0 & -L\xi\zeta & -L\xi\eta \\ (-2\xi+3\xi^2)L\zeta & 0 & (\xi^2-\xi^3)L \\ (2\xi-3\xi^2)L\eta & (-\xi^2+\xi^3)L & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

con los parámetros adimensionales:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \eta = \frac{y}{L} \quad \zeta = \frac{z}{L} \quad (4.4)$$

Para obtener las matrices de rigidez, partimos de la expresión de la energía de deformación interna de un cuerpo, que puede ponerse como:

$$U_i = \frac{1}{2} \int \int \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV \quad (4.5)$$

donde los vectores  $\{\sigma\}$  y  $\{\epsilon\}$  representan los valores finales que alcanzan las seis componentes de la tensión y de la deformación.

Esta expresión de la energía de deformación interna puede ponerse en función de las deformaciones o de las tensiones. Si las tensiones y deformaciones se expresan en función de las fuerzas internas (esfuerzo axial, esfuerzos cortantes, momentos flectores y momento torsor) de un elemento prismático, se tiene:

$$\begin{aligned} U_i = & \int_0^L \frac{F^2}{2EA} dx + \int_0^L \frac{M_y^2}{2EI_y} dx + \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int_0^L \frac{V_y^2}{2GA} dx + \\ & + \int_0^L \frac{V_z^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si por el contrario, las tensiones y deformaciones se expresan en función de las deformaciones, teniendo en cuenta solamente la deformación  $\epsilon_x$ :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] - \left[ y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right] \quad (4.7)$$

la energía de deformación, despreciando los términos con potencias de

orden 4 de la deformación, viene dada por:

$$\begin{aligned}
 U_i = & \frac{1}{2} \int_0^L AE \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L AE \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L AE \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) dx \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

siendo:

- L la longitud del elemento.
- A el área de la sección transversal.
- $I_p$  el momento de inercia polar.
- $I_y$  el momento de inercia respecto al eje "y".
- $I_z$  el momento de inercia respecto al eje "z".
- J la constante o módulo de torsión.
- E el módulo de elasticidad longitudinal.

A partir de (4.2) y (4.3), se obtiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{L} (-\delta_{xi} + \delta_{xj}) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_y}{\partial x} = & \frac{1}{L} [ 6 (-\xi + \xi^2) \delta_{yi} + (1 - 4\xi + 3\xi^2) L \theta_{zi} + \\
 & + 6 (\xi - \xi^2) \delta_{yj} + (-2\xi + 3\xi^2) L \theta_{zj} ] \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_z}{\partial x} = & \frac{1}{L} [ 6 (-\xi + \xi^2) \delta_{zi} + (-1 + 4\xi - 3\xi^2) L \theta_{yi} + \\
 & + 6 (\xi - \xi^2) \delta_{zj} + (2\xi - 3\xi^2) L \theta_{yj} ] \quad (4.11)
 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} [6 (-1 + 2\xi) \delta_{yi} + 2 (-2 + 3\xi) L \theta_{zi} + 6 (1 - 2\xi) \delta_{yj} + 2 (-1 + 3\xi) L \theta_{zj}] \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} [6 (-1 + 2\xi) \delta_{zi} + 2 (2 - 3\xi) L \theta_{yi} + 6 (1 - 2\xi) \delta_{zj} + 2 (1 - 3\xi) L \theta_{yj}] \quad (4.13)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (4.9) a (4.13) en la (4.8) e integrando, se obtiene una expresión de la energía de deformación en la que aparece el término  $A E (\delta_{xj} - \delta_{xi})/L$ . Incluso en el caso de desplazamientos relativamente grandes, esta cantidad puede tratarse como constante, e igual a la fuerza axial en el elemento. Aplicando el Primer Teorema de Castigliano (ref. 9 pp. 36-37) a la expresión final de la energía de deformación, se obtienen las relaciones fuerza desplazamiento:

$$\{f\} = ( [k_E] + [k_G] ) \{x\} \quad (4.14)$$

siendo:

$\{f\}$  el vector de fuerzas y momentos en los nudos:

$$\{f\} = \{f_{xi}, f_{yi}, f_{zi}, m_{xi}, m_{yi}, m_{zi}, f_{xj}, f_{yj}, f_{zj}, m_{xj}, m_{yj}, m_{zj}\}^T \quad (4.15)$$

$[k_E]$  la matriz de rigidez elástica, dada por (4.16).

$[k_G]$  la matriz de rigidez geométrica, dada por (4.17).

La matriz  $[k_E]$  es la matriz de rigidez que se emplea en el análisis lineal y la matriz  $[k_G]$  tiene en cuenta la no linealidad debida a los desplazamientos relativos entre los extremos de las piezas.



$$\begin{bmatrix}
 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} \\
 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{y_p}{AL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{AL} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{AL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

(4.17)

SIMETRICA

$$[k_G] = \frac{f_x}{L}$$

Para poder formar la matriz de rigidez geométrica, se puede suponer que las fuerzas axiales se mantienen constantes durante la carga dinámica; o lo que es lo mismo, que estas fuerzas provienen de una condición de carga estática independiente, que no viene afectada por la respuesta dinámica de la estructura. En los casos en que las fuerzas axiales varíen de una forma significativa en el tiempo, se tiene una matriz de rigidez variable con el tiempo y no pueden emplearse los procedimientos de análisis basados en el principio de superposición.

Una formulación mas completa de la matriz de rigidez geométrica puede encontrarse en (8) en la que se incluyen los efectos no lineales producidos por los momentos y fuerzas cortantes.

#### 4.3. MATRICES DE MASA

En los primeros intentos de tratar los problemas dinámicos, la masa de cada elemento se concentraba en los nudos, lo que daba lugar a *matrices de masa diagonales*, aunque en realidad no existiera ninguna masa concentrada.

Archer (1) por una parte y Leckie y Lindberg (4) por otra, demostraron simultáneamente en 1963, que esta concentración de masas en los nodos era innecesaria. A partir de este momento se inicia el empleo de las *matrices de masa consistentes*, llamadas así por obtenerse a partir de las mismas funciones que se emplean para calcular las matrices de rigidez. Posteriormente se ha comprobado que la matriz de masas condensada, resulta más adecuada y conveniente en muchos problemas.

##### 4.3.1. Matriz de masas consistente

La matriz de masas de un elemento, en su sistema de coordenadas, viene dada por:

$$[m] = \iiint_V \rho [a]^T [a] dV \quad (4.18)$$

En esta ecuación  $\rho$  es la densidad del elemento y  $[a]$  es la matriz que relaciona los desplazamientos  $\{u\}$  en un punto interior del

elemento con los desplazamientos  $\{x\}$  en los extremos del elemento. Se muestra (ref. 9, pp. 273-275) que en un problema dinámico los desplazamientos  $\{u\}$  no pueden relacionarse con los valores instantáneos de los desplazamientos en los extremos; como consecuencia de que los desplazamientos  $\{u\}$  dependen de la historia previa de los desplazamientos en los extremos  $\{x\}$ . A pesar de esto, se suele emplear la distribución de desplazamientos estáticos del elemento que se ha comprobado que da resultados suficientemente correctos en la mayoría de aplicaciones. Además pueden mejorarse los resultados, disminuyendo el tamaño de los elementos hasta lograr la precisión deseada.

Si en la ecuación (4.18) se sustituye la matriz  $[a]$  por la matriz  $[N]$  dada en 4.3, se tiene:

$$[m] = \iiint_V \rho [N]^T [N] dV \quad (4.19)$$

realizando la integración sobre el volumen total del elemento se obtiene la matriz de masas (4.20).

#### 4.3.2. Matriz de masas condensadas

Este es el modelo matemático más simple para incluir las propiedades de masa de un elemento. En este modelo, la masa del elemento asociada a un grado de libertad se supone concentrada y actuando en la dirección del grado de libertad. Este procedimiento se aplica tanto para los grados de libertad de giro como para los de desplazamiento.

Las masas concentradas se calculan suponiendo que la parte del elemento asociada a un grado de libertad responde como un cuerpo rígido, mientras que el resto del elemento no participa en el giro o desplazamiento. Con esta hipótesis, se excluye el acoplamiento dinámico entre los giros o desplazamientos del elemento y la matriz de masa del elemento es diagonal.

La obtención de la matriz condensada puede sistetizarse con una expresión análoga a la (4.19).



$$[m] = \iiint_V \rho [\psi]^T [\psi] dV \quad (4.21)$$

donde  $[\psi]$  es una matriz de funciones de desplazamiento  $\psi_i$  que tienen valor unitario en la región asociada al grado de libertad "i" y valor cero en cualquier otra región.

#### 4.3.3. Comparación de las matrices de masa consistente y condensada:

##### Otras formulaciones

De las dos matrices de masa obtenidas en los apartados anteriores, cada una presenta ventajas e inconvenientes a la hora de aplicarlas a un problema particular.

Las principales ventajas de la matriz de masa condensada derivan del ahorro de esfuerzo de cálculo que supone. En primer lugar, al ser la matriz diagonal, se reducen sustancialmente las necesidades de almacenamiento de datos, se facilitan y reducen las operaciones matriciales y en algunos problemas, permite reducir el número de grados de libertad. Esto último ocurre cuando se desprecia la inercia a rotación, ya que en este caso los grados de libertad correspondientes no tienen masas asociadas. Con esta reducción, el empleo de matrices condensadas suele dar mejores resultados que el empleo de matrices consistentes con el mismo número de grados de libertad totales.

En principio, el empleo de la matriz de masas consistente debería dar mayor precisión en los resultados; sin embargo, la realidad es que esta mejora no es muy grande, debido fundamentalmente a que la influencia de los grados de libertad de rotación es mucho menor que la influencia de los grados de libertad de traslación.

La principal ventaja de emplear la matriz de masas consistente es consecuencia de que todas las contribuciones energéticas (rigideces de los elementos e inercias de las masas) se evalúan de la misma forma, lo que permite obtener conclusiones cualitativas acerca de las frecuencias de vibración; por ejemplo, puesto que la formulación consistente emplea un número finito de funciones de desplazamiento (equivale a imponer unas restricciones de deformación adicionales a la estructura), las frecuencias obtenidas con ella, serán siempre superiores a las reales.

En algunos tipos de problemas, se ha comprobado que el empleo de la matriz de masas condensada da errores del mismo orden que la matriz de masas consistente, pero de signo contrario. Un ejemplo es el caso de elementos sometidos a fuerzas axiales con diversas condiciones de contorno. En la referencia 5, se obtienen los siguientes resultados:

a) Error en frecuencia empleando la matriz de masas condensada:

$$[m] = \frac{\rho L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\frac{w_a}{w_e} = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{\pi}{N}\right)^4 \quad (4.23)$$

b) Error en frecuencia empleando la matriz de masas consistente:

$$[m] = \frac{\rho L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\frac{w_a}{w_e} = 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{\pi}{N}\right)^4 \quad (4.25)$$

siendo:

$w_a$  la frecuencia aproximada

$w_e$  la frecuencia exacta

$N$  el número de elementos que abarca la longitud de onda de la vibración

c) Error empleando una matriz de masas intermedia entre la consistente y la condensada:

$$[m] = \frac{\rho L}{12} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$



$$\frac{w_a}{w_e} = 1 + \frac{1}{30} \left(\frac{\pi}{N}\right)^4 + O\left(\frac{\pi}{N}\right)^6 \quad (4.27)$$

Como puede verse, el error con esta matriz intermedia resulta mucho menor que el error con las matrices anteriores.

#### 4.4. MATRICES DE AMORTIGUAMIENTO

Al contrario que la masa o la rigidez de una estructura, el amortiguamiento no es, necesariamente, una propiedad inherente a la misma. Las fuerzas de amortiguamiento dependen no solo de la estructura sino también del medio que la rodea (el aire, por ejemplo). Los mecanismos de amortiguamiento suelen dividirse en tres grupos, amortiguamiento viscoso, amortiguamiento estructural y amortiguamiento negativo.

El *amortiguamiento viscoso* se presenta cuando la estructura se mueve dentro de un fluido. Las fuerzas de amortiguamiento son función de la velocidad y cuando la estructura oscila libremente, la amplitud de la vibración decae de forma exponencial. Si el amortiguamiento es mayor que un cierto valor crítico, cesa el carácter oscilatorio del movimiento. En las estructuras de edificación, el amortiguamiento es mucho menor que el crítico.

El *amortiguamiento estructural* se produce por fricciones internas de los elementos y deformaciones en los nudos. Las fuerzas de amortiguamiento, en este caso, son función de la deformación de la estructura y su formulación matemática no es fácilmente aplicable al análisis estructural.

El *amortiguamiento negativo* se produce cuando un sistema en vez de disipar energía, la toma.

Si se admite que el amortiguamiento es del tipo viscoso, empleando una formulación similar a la de la matriz de masas consistente, la matriz de amortiguamiento de un elemento puede ponerse como:

$$[c] = \iiint_V \mu [a]^T [a] dV \quad (4.28)$$

donde  $\mu$  represente el *amortiguamiento viscoso*. A partir de esta matriz,

la matriz de amortiguamiento de la estructura se puede obtener siguiendo un proceso similar al de la matriz de rigidez. Sin embargo, en la práctica, la obtención de las características de amortiguamiento resulta impracticable; por esta razón, el amortiguamiento total de la estructura suele darse como relaciones de amortiguamiento obtenidas mediante ensayos sobre estructuras similares, en vez de obtenerlo de forma explícita a partir de la matriz de amortiguamiento de cada elemento.

En aquellos casos en que resulte necesario disponer de la matriz de amortiguamiento, suele admitirse que esta matriz es proporcional a la matriz de rigidez, a la matriz de masas o a una combinación de ambas. (ver p. ej. ref. 9).

Referencias

1. ARCHER, J. S., "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems", *Proceedings ASCE, Journal of Structural Division*, Vol. 89, ST4, Aug. 1963, pp. 161-178.
2. BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
3. DESAI, CH. S., ABEL, J. F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold Company, 1974.
4. LECKIE, F. A., LINDBERG, G. M., "The Effect of Lumped Parameters on Beam Frequencies", *Aero. Quart.*, Vol. 14, pp. 234, 1963.
5. MAC NEAL, R. H., *Electric Circuit Analogies for Elastic Structures*, John Wiley and Sons, 1962.
6. NEWMARK, N. M., ROSENBLUETH, E., *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*, Diana, 2ª Edición 1978.
7. PAZ, M., *Structural Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
8. MAC CORMICK (Editor), *NASTRAN USER'S MANUAL y NASTRAN THEORETICAL MANUAL*, June 1972.
9. PRZEMIENIECKI, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.



## Capítulo 5

### REDUCCION DE GRADOS DE LIBERTAD EN EL ANALISIS DINAMICO

#### 5.1. INTRODUCCION

El desarrollo de modelos discretos de estructura precisa, en primer lugar, de una decisión inicial del número de grados de libertad a emplear. Una descripción exacta de la geometría de estructura puede necesitar muchos mas grados de libertad que los necesarios desde el punto de vista del análisis. En general, la limitación del número de grados de libertad a emplear viene impuesta por los programas u ordenador disponible, el costo de la solución y el grado de precisión deseado.

El interés por limitar el número de grados de libertad suele ser mayor en los problemas dinámicos que en los estáticos; debido a esto, la mayoría de programas de cálculo estructural dan al usuario la posibilidad de emplear en el análisis dinámico menos grados de libertad que los utilizados en el análisis estático. Un ejemplo es el programa NASTRAN, donde el usuario indica los grados de libertad del análisis estático que desea emplear en análisis dinámico y el programa se encarga de referir los restantes grados de libertad a estos, reduciendo así el orden del problema.

#### 5.2. CONDENSACION DE GRADOS DE LIBERTAD PARA LA OBTENCION DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

Sea un problema de valores propios de un sistema en el que se desea eliminar algunos grados de libertad ( $X_e$ ) y retener el resto ( $X_i$ ), para reducir el orden del sistema de ecuaciones a resolver. Las ecuaciones que describen la vibración libre de un sistema sin amortiguamiento pueden ponerse como:

$$\begin{bmatrix} [M_{ii}] & [M_{ie}] \\ [M_{ei}] & [M_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{X}_i\} \\ \{\ddot{X}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ie}] \\ [K_{ei}] & [K_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_i\} \\ \{X_e\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5.1)$$

Para cada modo de vibración se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \{\ddot{X}_i\} \\ \{\ddot{X}_e\} \end{Bmatrix} = -\lambda^2 \begin{Bmatrix} \{X_i\} \\ \{X_e\} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Sustituyendo la ecuación (5.2) en la (5.1), se tiene:

$$-\lambda^2 \begin{bmatrix} [M_{ii}] & [M_{ie}] \\ [M_{ei}] & [M_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_i\} \\ \{X_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ie}] \\ [K_{ei}] & [K_{ee}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_i\} \\ \{X_e\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5.3)$$

Desarrollando la fila inferior de (5.3), se tiene:

$$(\lambda^2 [M_{ei}] - [K_{ei}]) \{X_i\} + (\lambda^2 [M_{ee}] - [K_{ee}]) \{X_e\} = \{0\} \quad (5.4)$$

y despejando  $\{X_e\}$ :

$$\{X_e\} = -(\lambda^2 [M_{ee}] + [K_{ee}])^{-1} (\lambda^2 [M_{ei}] - [K_{ei}]) \{X_i\} \quad (5.5)$$

que puede ponerse como:

$$\{X_e\} = -[T] \{X_i\} \quad (5.6)$$

siendo  $[T]$  la *matriz de transformación*:

$$[T] = -(\lambda^2 [M_{ee}] + [K_{ee}])^{-1} (\lambda^2 [M_{ei}] - [K_{ei}]) \quad (5.7)$$

Sustituyendo la ecuación (5.6) en la fila superior de la ecuación (5.3), se llega a un problema de valores propios con un número reducido de incógnitas ( $X_i$ ):

$$\lambda^2 ([M_{ii}] - [M_{ie}] [T]) \{X_i\} = ([K_{ee}] - [K_{ie}] [T]) \{X_i\} \quad (5.8)$$

El inconveniente de esta ecuación es que la matriz de transformación incluye el valor propio, que es una incógnita a resolver.

Se pueden emplear los métodos normales para obtener los valores y vectores propios de la ecuación (5.8) si se sigue un procedimiento iterativo y con cada valor de  $\lambda$  obtenido se calcula una nueva matriz  $[T]$ . Por ejemplo podría empezarse con el valor  $\lambda=0$ , obtener el valor propio, calcular la nueva matriz de transformación y repetir el proceso hasta que dos valores propios sucesivos difieran en una cantidad suficientemente pequeña. En algunos tipos de problemas se ha visto que existe una relación casi lineal entre los valores propios empleados para calcular la matriz de transformación y los obtenidos al resolver la ecuación (5.8) con esta matriz. En general, esto ocurrirá si  $\lambda^2 [M_{ee}]$  y  $\lambda^2 [M_{ei}]$  son pequeños comparados con  $[K_{ee}]$  y  $[K_{ei}]$  respectivamente, como puede deducirse de la ecuación (5.7).

Desarrollando  $(\lambda^2 [M_{ee}] - [K_{ee}])^{-1}$  en la ecuación (5.7) y despreciando los términos en  $\lambda^4$  frente a los términos en  $\lambda^2$  se tiene:

$$[T] = [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] + \lambda^2 (-[K_{ee}]^{-1} [M_{ei}] + [K_{ei}]^{-1} [M_{ee}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}]) \quad (5.9)$$

Esta ecuación presenta la ventaja, frente a la ecuación (5.7), de no tener que calcular una inversa en cada ciclo de iteración.

Sustituyendo la ecuación (5.9) en la fila superior de la ecuación (5.3) y despreciando de nuevo los términos en  $\lambda^4$  frente a los términos en  $\lambda^2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda^2 & ([M_{ii}] - [M_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] - [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [M_{ei}] + \\ & + [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [M_{ee}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}]) \{X_i\} = \\ & = ([K_{ii}] - [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}]) \{X_i\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

ecuación que permite obtener los valores propios sin necesidad de iteración.

Al mismo resultado de la ecuación (5.10) pero siguiendo un planteamiento diferente se llega con el método propuesto por Guyan (3). En este método, la transformación de la ecuación (5.1) a la ecuación (5.8) se hace en dos partes; primeramente se obtiene la matriz de transformación [T] a partir de (5.1), despreciando los términos de inercia, con lo cual:

$$\{X_e\} = -[K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \{X_i\} = -[T] \{X_i\} \quad (5.11)$$

en segundo lugar se obtienen las *matrices de rigidez* [K]\* y *de masa* [M]\* *reducidas*, empleando la ecuación (5.11) para expresar la energía cinética y potencial del sistema reducido en función de  $\{X_i\}$ . Las matrices reducidas que se obtienen son:

$$[K]^* = [K_{ii}] - [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} [M]^* &= [M_{ii}] - [M_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] - \\ &- [K_{ie}] [K_{ee}] ([M_{ei}] - [M_{ee}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}]) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Estas expresiones pueden ponerse como:

$$[K]^* = [K] [A] [A]^T \quad (5.14)$$

$$[M]^* = [A]^T [M] [A] \quad (5.15)$$

siendo:



$$\{A\} = \begin{Bmatrix} [I] \\ -[K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Como puede observarse, estas matrices de rigidez y masa reducidas dan lugar a un problema de valores propios idéntico al de la ecuación (5.10).

Tomando como base el planteamiento expuesto, pueden distinguirse tres procedimientos para la obtención de los valores y vectores propios del sistema reducido y de los vectores propios del sistema sin reducir:

a) *Procedimiento "exacto"*.

Los valores propios se obtienen por un procedimiento iterativo, a partir de la ecuación (5.8) empleando cada vez la matriz de transformación dada por la ecuación (5.7).

Los vectores propios del sistema sin reducir se obtienen expandiendo los obtenidos directamente (sistema reducido), con los calculados a partir de la ecuación (5.6) y la matriz de transformación de (5.7).

b) *Método de Guyan*.

Los modos reducidos (valores y vectores propios) se obtienen a partir de las matrices reducidas de masa  $[M]^*$ , ecuación (5.13) y de rigidez  $[K]^*$ , ecuación (5.12).

Los vectores propios del sistema sin reducir se obtienen expandiendo los obtenidos con las matrices anteriores, con los calculados a partir de la ecuación (5.6) y la matriz de transformación de (5.11).

c) *Método de Guyan modificado*.

Los modos reducidos se obtienen como el procedimiento anterior.

Los vectores propios del sistema sin reducir se obtienen expandiendo los obtenidos directamente, con los calculados a partir de la ecuación (5.6) y la matriz de transformación de (5.7).

Para la aplicación de estos métodos de reducción, es del máximo interés determinar que grados de libertad van a incluirse directamente en el análisis dinámico y cuales van a ser eliminados del mismo. Un procedimiento elemental consiste en eliminar primeramente los grados de libertad a los que estén asociados pocas o ninguna masa. Henshell y Ong

(4) sugieren un procedimiento de selección consistente en calcular el cociente de los coeficientes de la diagonal de la matriz de rigidez y de la matriz de masa  $K_{ii}/M_{ii}$  y eliminar primeramente los grados de libertad en los que mayor sea este cociente.

En las referencias (7) y (9) se examinan estos procedimientos de reducción para determinar los errores que cada método puede introducir en los valores propios, vectores propios y esfuerzos en los elementos. A partir de los resultados de estas referencias se llega a las siguientes conclusiones:

- En la obtención de los valores propios, la diferencia de errores (respecto a la solución del problema sin reducir) de los tres métodos presentados son insignificantes.
- En la obtención de los vectores propios, el error en el método de Guyan modificado es, aproximadamente, el mismo que el del procedimiento "exacto", mientras que los errores del método de Guyan son, en general, mucho mayores.

A la hora de elegir el método a emplear hay que tener en cuenta los siguientes factores:

- Grado de exactitud necesaria de los resultados
- Capacidad del ordenador disponible
- Esfuerzo de cálculo exigido por cada método

Teniendo en cuenta estos factores y las conclusiones anteriores, el método de Guyan modificado parece ser el más conveniente. Frente al método "exacto", la pérdida de exactitud es muy pequeña y el esfuerzo de cálculo se reduce notablemente al no tener que realizar un proceso iterativo que exige, en cada ciclo, la inversión de una matriz de orden igual al número de grados de libertad no incluidos en el análisis. Frente al método de Guyan, a cambio de un pequeño aumento en el número de cálculos cuatro multiplicaciones y dos sumas de matrices, se mejoran notablemente los resultados de los vectores propios.

## 5.3. EJEMPLOS, TABLAS Y GRAFICOS COMPARATIVOS

En el apartado anterior se ha visto, de una manera cualitativa, los errores que se cometen al obtener los valores y vectores propios cuando se emplea un procedimiento de condensación de grados de libertad. Igualmente en el capítulo 4, se ha señalado la posibilidad de emplear matrices de masa consistentes o condensadas. En este apartado se va a ver cuales son los errores cometidos al aplicar estos procedimientos a una estructura reticular de nudos rígidos. Al mismo tiempo se verán los errores que se cometen al emplear otra hipótesis simplificativa habitual en este tipo de estructuras, suponer que las vigas y los soportes no sufren alargamientos ni acortamientos debido a las fuerzas axiales, con lo que se reduce más el número de grados de libertad.

La estructura a analizar aparece representada en la figura 1, en la que se da la geometría, características estáticas de vigas y soportes y cargas gravitatorias aplicadas.

En primer lugar se va a estudiar, exclusivamente, la influencia en los resultados que tiene la variación del número de grados de libertad dinámicos incluidos directamente en el análisis. Se van a considerar 6 modelos diferentes:

Modelo 1

- Incluye directamente todos los grados de libertad.

Modelo 2

- Incluye directamente 15 grados de libertad, correspondientes a los desplazamientos horizontales de los nudos 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57 y 61.

Modelo 3

- Incluye directamente 8 grados de libertad, correspondientes a los desplazamientos horizontales de los nudos 5, 13, 21, 29, 37, 45, 53 y 61.

Modelo 4

- Incluye directamente 4 grados de libertad, correspondientes a los desplazamientos horizontales de los nudos 13, 29, 45 y 61.



Modelo 5

- Incluye directamente 2 grados de libertad, correspondientes a los desplazamientos horizontales de los nudos 29 y 61.

Modelo 6

- Incluye directamente 1 grado de libertad, correspondiente al desplazamiento horizontal del nudo 61.

Con vistas a la aplicación en un análisis sísmico por superposición modal con espectros de respuesta, los valores de mayor interés son las frecuencias y los modos de vibración. Las frecuencias porque van a servir para determinar las ordenadas de los espectros de diseño y los modos de vibración porque van a determinar la distribución de fuerzas sobre la estructura debidas a la acción sísmica. Además, puesto que en general se va a considerar únicamente la componente del desplazamiento horizontal, es este el valor que se ha reflejado en las tablas y gráficos.

En la figura 2, se representan los errores en la frecuencia de cada modo en función del número de grados de libertad dinámicos. En la figura 3, se representan los valores de las tablas 1, 2, 3 y 4, correspondientes a los cuatro primeros modos.

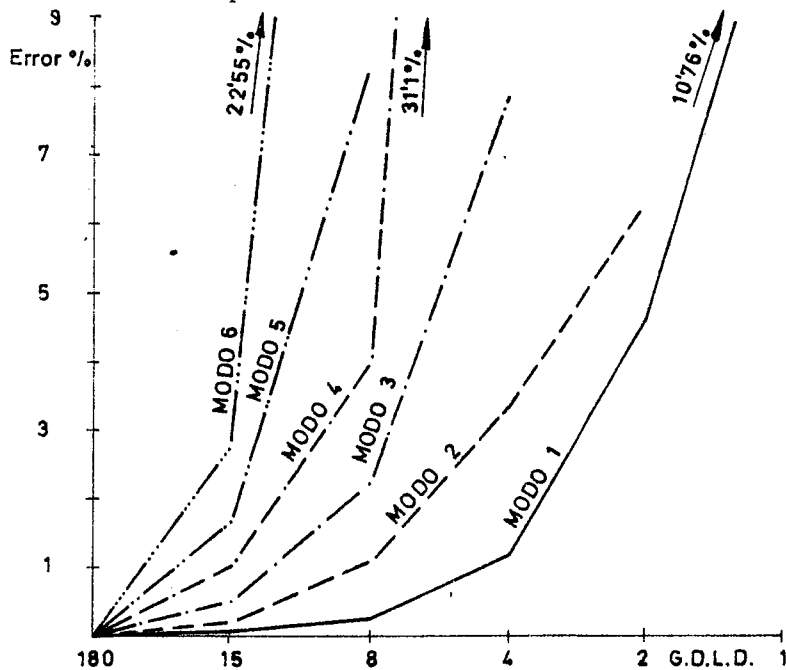


Figura 2

Errores en frecuencia al variar el nº de grados de libertad dinámicos

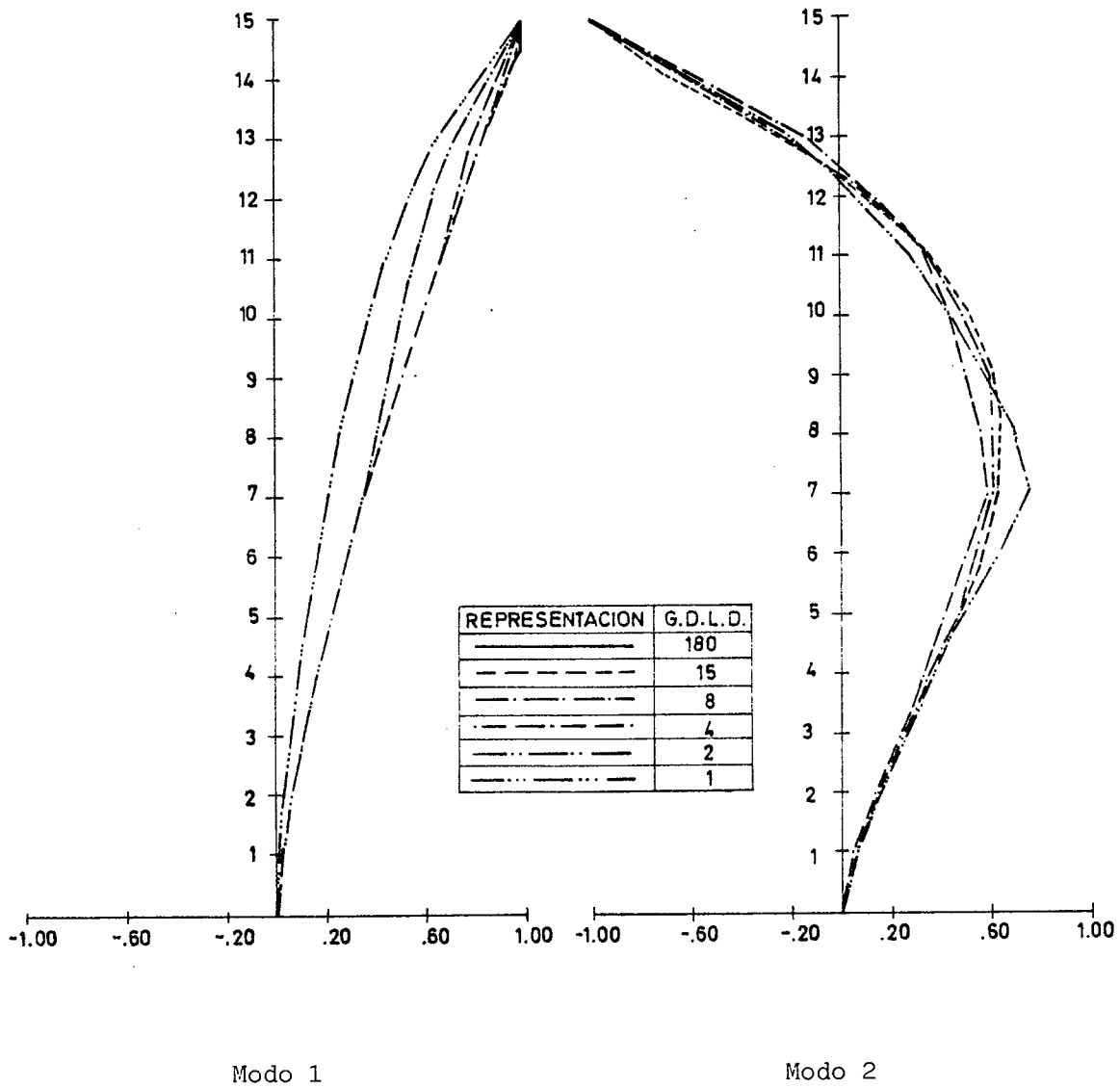


Figura 3  
Variación con el nº de g.d.l. dinámicos  
directamente incluidos en el análisis



MODELO	1	2	3	4	5	6
Nº G. D. L.	180	15	8	4	2	1
FREC.(c/s)	0,3239	0,3240	0,3247	0,3276	0,3388	0,3597
MASA G.	1,4574+1	1,4555+1	1,4442+1	1,3927+1	1,2056+1	0,9270+1
RIG. G.(T/m)	6,0371+1	6,0335+1	6,0114+1	5,9032+1	5,4643+1	4,7369+1
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0233	0,0233	0,0233	0,0233	0,0223	0,0125
9	0,0649	0,0648	0,0648	0,0650	0,0623	0,0352
13	0,1140	0,1140	0,1141	0,1143	0,1099	0,0625
17	0,1690	0,1690	0,1689	0,1679	0,1641	0,0938
21	0,2345	0,2345	0,2347	0,2324	0,2298	0,1319
25	0,3000	0,3000	0,2996	0,2988	0,2969	0,1717
29	0,3679	0,3679	0,3682	0,3687	0,3650	0,2149
33	0,4361	0,4361	0,4351	0,4312	0,4082	0,2609
37	0,5153	0,5153	0,5156	0,5066	0,4558	0,3184
41	0,5944	0,5944	0,5923	0,5879	0,5069	0,3813
45	0,6732	0,6732	0,6735	0,6734	0,5639	0,4517
49	0,7590	0,7590	0,7540	0,7339	0,6364	0,5420
53	0,8472	0,8472	0,8473	0,8022	0,7279	0,6567
57	0,9408	0,9408	0,9264	0,9016	0,8646	0,8292
61	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabla 1

Modo 1: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos directamente incluidos en el análisis



MODELO	1	2	3	4	5	
Nº G. D. L.	180	15	8	4	2	
FREC.(c/s)	0,8154	0,8169	0,8241	0,8425	0,8665	
MASA G.	1,2104+1	1,2006+1	1,1348+1	9,8202+1	1,2000+1	
RIG. G.(T/m)	3,1776+2	3,1636+2	3,0431+2	2,7521+2	3,5585+2	
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
5	0,0583	0,0583	0,0577	0,0544	0,0513	
9	0,1582	0,1583	0,1552	0,1491	0,1414	
13	0,2683	0,2683	0,2653	0,2537	0,2465	
17	0,3783	0,3782	0,3694	0,3358	0,3642	
21	0,4905	0,4903	0,4842	0,4273	0,5054	
25	0,5760	0,5758	0,5594	0,5160	0,6440	
29	0,6316	0,6313	0,6218	0,5929	0,7628	
33	0,6478	0,6474	0,6232	0,5628	0,6924	
37	0,6118	0,6113	0,5990	0,5007	0,5764	
41	0,5186	0,5179	0,4912	0,4281	0,4372	
45	0,3610	0,3603	0,3478	0,3357	0,2792	
49	0,1069	0,1061	0,0900	0,1298	0,0730	
53	-0,2365	-0,2372	-0,2429	-0,1485	-0,1925	
57	-0,6955	-0,6959	-0,6287	-0,5767	-0,5985	
61	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	

Tabla 2

Modo 2: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos  
directamente incluidos en el análisis

MODELO	1	2	3	4		
Nº G.D.L.	180	15	8	4		
FREC.(c/s)	1,3637	1,3705	1,3938	1,4705		
MASA G.	1,6445+1	1,6076+1	1,4568+1	1,5477+1		
RIG.G.(T/m)	1,2073+3	1,1922+3	1,1174+3	1,3213+3		
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
5	0,1181	0,1180	0,1161	0,1604		
9	0,3120	0,3117	0,2983	0,4354		
13	0,5616	0,5011	0,4919	0,7141		
17	0,6474	0,6464	0,6110	0,7749		
21	0,7278	0,7264	0,7082	0,7968		
25	0,6965	0,6945	0,6438	0,8014		
29	0,5464	0,5440	0,5211	0,7560		
33	0,2893	0,2868	0,2491	0,3923		
37	-0,1012	-0,1034	-0,1173	-0,1162		
41	-0,4993	-0,5007	-0,4669	-0,6758		
45	-0,8083	-0,8084	-0,7999	-1,2008		
49	-0,9101	-0,9084	-0,7759	-0,9518		
53	-0,6345	-0,6316	-0,6288	-0,4672		
57	0,2408	0,2430	0,1675	0,2618		
61	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		

Tabla 3

Modo 3: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos  
directamente incluidos en el análisis

MODELO	1	2	3	4		
Nº G. D. L.	180	15	8	4	-	
FREC.(c/s)	1,9573	1,9772	2,0345	2,5674		
MASA G.	1,4690+1	1,4112+1	1,1313+1	0,9385+1		
RIG.G.(T/m)	2,2219+3	2,1781+3	1,8487+3	2,4421+3		
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		
5	0,1657	0,1661	0,1583	1,4054		
9	0,4192	0,4200	0,3769	3,7680		
13	0,6177	0,6183	0,5859	5,8582		
17	0,6788	0,6784	0,5904	4,2191		
21	0,5567	0,5546	0,5124	1,4628		
25	0,2623	0,2583	0,2031	-1,4218		
29	-0,1419	-0,1462	-0,1598	-4,0234		
33	-0,5199	-0,5238	-0,4500	-3,3415		
37	-0,7535	-0,7540	-0,7195	-1,7481		
41	-0,6595	-0,6552	-0,5130	0,0533		
45	-0,2046	-0,1976	-0,1801	1,8178		
49	0,5253	0,5314	0,3848	1,6245		
53	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
57	0,3530	0,3474	0,2284	-0,0064		
61	-0,8036	-0,8063	-0,6742	-1,0041		

Tabla 4

Modo 4: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos  
directamente incluidos en el análisis

Los resultados anteriores reflejan solo la influencia de variar el número de grados de libertad incluidos directamente en el análisis. A continuación se van a estudiar los errores que se producen cuando se eliminan grados de libertad, debido al empleo de hipótesis simplificadoras adicionales. Para ello se emplean los cuatro modelos siguientes:

#### Modelo 1

- Tiene en cuenta todos los grados de libertad (180)
- Emplea la matriz de masas consistente
- Emplea las áreas reales de los perfiles

#### Modelo 2

- Tiene en cuenta todos los grados de libertad (180)
- Emplea la matriz de masas condensada
- Emplea las áreas reales de los perfiles

#### Modelo 3

- Tiene en cuenta 15 grados de libertad, correspondientes a los desplazamientos horizontales de los nudos 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57 y 61
- Emplea la matriz de masas consistente
- Emplea las áreas reales de los perfiles

#### Modelo 4

- Tiene en cuenta 15 grados de libertad (los mismos del modelo número 3)
- Emplea la matriz de masas condensada
- Emplea valores de las áreas muy superiores a los reales, para que las deformaciones axiales de vigas y soportes sean prácticamente cero

Los resultados correspondientes a los 4 primeros modos aparecen en las tablas 5, 6, 7 y 8.

MODELO	1	2	3	4	Errores absolutos mod. 1-4	Errores (%) mod. 1-4
Nº G.D.L.	180	180	15	15		
FREC.(c/s)	0,3239	0,3239	0,3240	0,3456	0,0217	6,6996
MASA G.	1,4573+1	1,4574+1	1,4555+1	1,4947+1	0,3740+1	2,5664
RIG.G.(T/m)	6,0381+1	6,0371+1	6,0345+1	7,0510+1	1,0129+1	16,7700
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	----	----
5	0,0233	0,0233	0,0233	0,0258	0,0025	10,7296
9	0,0649	0,0649	0,0649	0,0706	0,0057	8,7827
13	0,1140	0,1140	0,1140	0,1226	0,0086	7,5439
17	0,1691	0,1690	0,1691	0,1798	0,0107	6,3276
21	0,2345	0,2345	0,2345	0,2475	0,0130	5,5437
25	0,3000	0,3000	0,3001	0,3139	0,0139	4,6333
29	0,3680	0,3679	0,3680	0,3819	0,0139	3,7771
33	0,4362	0,4361	0,4362	0,4494	0,0132	3,0261
37	0,5153	0,5153	0,5154	0,5284	0,0131	2,5422
41	0,5945	0,5944	0,5945	0,6066	0,0121	2,0353
45	0,6733	0,6732	0,6733	0,6836	0,0105	1,5298
49	0,7591	0,7590	0,7591	0,7680	0,0089	1,1724
53	0,8472	0,8472	0,8472	0,8547	0,0075	0,8852
57	0,9409	0,9408	0,9409	0,9471	0,0062	0,6589
61	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	----	----

Tabla 5

Modo 1: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos considerados en el análisis

MODELO	1	2	3	4	Errores absolutos mod. 1-4	Errores (%) mod. 1-4
Nº G. D. L.	180	180	- 15	15		
FREC.(c/s)	0,8155	0,8154	0,8170	0,8296	0,0141	1,7290
MASA G.	1,2094+1	1,2104+1	1,1996+1	1,1827+1	-0,0267+1	-2,2077
RIG. G.(T/m)	3,1755+2	3,1776+2	3,1616+2	3,2140+2	0,0385+2	1,2124
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	----	----
5	0,0583	0,0583	0,0583	0,0574	-0,0009	-1,5437
9	0,1583	0,1584	0,1582	0,1551	-0,0032	-2,0214
13	0,2681	0,2683	0,2681	0,2626	-0,0055	-2,0515
17	0,3781	0,3783	0,3780	0,3700	-0,0081	-2,1423
21	0,4902	0,4905	0,4900	0,4797	-0,0105	-2,1420
25	0,5757	0,5760	0,5754	0,5635	-0,0122	-2,1192
29	0,6313	0,6316	0,6309	0,6185	-0,0128	-2,0276
33	0,6475	0,6478	0,6471	0,6349	-0,0126	-1,9460
37	0,6115	0,6118	0,6109	0,5995	-0,0120	-1,9624
41	0,5182	0,5186	0,5176	0,5081	-0,0101	-1,9491
45	0,3607	0,3610	0,3600	0,3531	-0,0076	-2,1070
49	0,1067	0,1069	0,1059	0,1005	-0,0062	-5,8107
53	-0,2368	-0,2365	-0,2374	-0,2422	0,0054	2,2804
57	-0,6957	-0,6955	-0,6961	-0,7024	0,0067	0,9631
61	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	----	----

Tabla 6

Modo 2: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos  
considerados en el análisis

MODELO	1	2	3	4	Errores absolutos mod. 1-4	Errores ( % ) mod. 1-4
Nº G.D.L.	180	180	15	15		
FREC.(c/s)	1,3628	1,3637	1,3697	1,3715	0,0087	0,6384
MASA G.	1,6452+1	1,6445+1	1,6083+1	1,6615+1	0,1630+1	0,9908
RIG. G.(T/m)	1,2064+3	1,2074+3	1,1912+3	1,2340+3	0,0276+3	2,2878
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	----	----
5	0,1180	0,1181	0,1179	0,1187	0,0007	0,5932
9	0,3117	0,3120	0,3114	0,3125	0,0008	0,2567
13	0,5012	0,5016	0,5006	0,5028	0,0016	0,3192
17	0,6468	0,6474	0,6459	0,6490	0,0022	0,3401
21	0,7274	0,7278	0,7259	0,7303	0,0029	0,3987
25	0,6962	0,6965	0,6942	0,7004	0,0042	0,6033
29	0,5463	0,5464	0,5440	0,5510	0,0047	0,8603
33	0,2895	0,2893	0,2870	0,2946	0,0051	1,7616
37	-0,1006	-0,1012	-0,1029	-0,0981	-0,0025	-2,4851
41	-0,4986	-0,4993	-0,5000	-0,4994	0,0008	0,1605
45	-0,8077	-0,8083	-0,8078	-0,8130	0,0053	0,6562
49	-0,9098	-0,9101	-0,9081	-0,9196	0,0098	1,0772
53	-0,6348	-0,6345	-0,6319	-0,6463	0,0115	1,8116
57	0,2403	0,2408	0,2425	0,2347	-0,0056	-0,8822
61	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	----	----

Tabla 7

Modo 3: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos considerados en el análisis

MODELO	1	2	3	4	Errores absolutos mod. 1-4	Errores (%) mod. 1-4
Nº G. D. L.	180	180	15	15		
FREC.(c/s)	1,9553	1,9573	1,9573	1,9645	0,0092	0,4705
MASA G.	1,4732+1	1,4691+1	1,4148+1	1,4761+1	0,0029+1	0,1968
RIG. G.(T/m)	2,2236+3	2,2219+3	2,1793+3	2,2489+3	0,0253+3	1,1378
NUDO						
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	----	----
5	0,1658	0,1659	0,1660	0,1663	0,0005	0,3016
9	0,4195	0,4195	0,4199	0,4196	0,0001	0,0238
13	0,6184	0,6182	0,6184	0,6194	0,0010	0,1617
17	0,6799	0,6794	0,6788	0,6816	0,0022	0,3238
21	0,5583	0,5573	0,5554	0,5603	0,0020	0,3582
25	0,2638	0,2626	0,2594	0,2669	0,0031	1,1751
29	-0,1402	-0,1415	-0,1450	-0,1378	-0,0024	-1,7118
33	-0,5195	-0,5204	-0,5229	-0,5178	-0,0017	-0,3272
37	-0,7545	-0,7544	-0,7540	-0,7564	0,0019	0,2518
41	-0,6610	-0,6598	-0,6563	-0,6661	0,0051	0,7716
45	-0,2067	-0,2048	-0,1994	-0,2119	0,0052	2,5157
49	0,5244	0,5258	0,5301	0,5216	-0,0028	-0,5339
53	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	----	----
57	0,3533	0,3529	0,3480	0,3500	-0,0033	0,9341
61	-0,8050	-0,8043	-0,8069	-0,8078	0,0028	0,3478

Tabla 8

Modo 4: Variación con el nº de g.d.l. dinámicos  
considerados en el análisis



En los resultados presentados en las tablas y gráficos anteriores puede verse que:

- Los errores en frecuencia, al no incluir directamente los grados de libertad de rotación y de desplazamiento vertical, son prácticamente nulos.
- Los errores en frecuencia al incluir directamente en el análisis dinámico, un solo desplazamiento horizontal por piso, son despreciables. Para los distintos modos se tiene:

Modo 1	0,0308 %
Modo 2	0,1839 %
Modo 3	0,6800 %
Modo 4	1,0167 %
Modo 5	1,6674 %

- Los errores en las frecuencias empiezan a ser importantes cuando el número de grados de libertad, directamente incluidos en el análisis dinámico, se acerca al número del modo a obtener. En la estructura analizada se tiene:

<u>g.d.l.d.</u>	<u>Modo 1</u>	<u>Modo 2</u>	<u>Modo 3</u>	<u>Modo 4</u>	<u>Modo 5</u>	<u>Modo 6</u>
180	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,0309	0,1839	0,4986	1,0167	1,6673	2,7430
8	0,2469	1,0669	2,2072	3,9442	0,2226	22,5500
4	1,1423	3,3235	7,8316	31,1700		
2	4,6000	6,2669				
1	11,0530					

- Las diferencias entre las frecuencias obtenidas con la matriz de masas consistente y las obtenidas con la matriz de masas condensada, empleando en ambos casos el mismo número de grados de libertad (mayor o igual al número de plantas) es prácticamente nula.

- Las frecuencias obtenidas con la hipótesis de soportes infinitamente rígidos a esfuerzo axial, son ligeramente superiores a las obtenidas considerando la rigidez real.

Una particularidad que se presenta en este caso, contrariamente a lo que ocurre en los anteriores, es que el error aumenta al aumentar el número de plantas y es mayor en el primer modo que en los siguientes.

Modo 1	6,6996 %
Modo 2	1,7290 %
Modo 3	0,6384 %
Modo 4	0,4705 %

Para justificar este efecto hay que tener en cuenta que la vibración de una estructura de este tipo se puede descomponer en dos formas de deformación, una de cortante puro y otra de flexión pura. Al imponer que no se produzcan deformaciones axiales en los soportes, lo que se está haciendo es anular las deformaciones de flexión; debido a esto, los errores aumentarán a medida que sea mayor la influencia de las deformaciones de flexión, o sea que serán mayores en el primer modo y en las estructuras mas esbeltas.

- Los errores cometidos en la obtención de los vectores propios siguen en general las mismas tendencias señaladas para las frecuencias, si bien alcanzan en algunos puntos valores máximos superiores a los de las frecuencias.

En base a estos resultados, puede afirmarse que los errores al emplear el modelo simplificado número 4, de las tablas 6 a 9, son suficientemente pequeños para considerar despreciable su influencia en los resultados finales de un diseño sísmico.

Referencias

1. BATHE, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
2. CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Kogakusha, 1975.
3. DESAI, CH. S., ABEL, J. F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold Company, 1974.
4. HENSELL, R. D., ONG, J. H., "Automatic Masters for Eigenvalue Economisation", *Int. J. Earthquake Structural Dynamics*, Vol. 3, pp. 375-383, 1975.
5. NEWMARK, N. M., ROSENBLUETH, E., *Fundamentos de Ingeniería Sísmica*, Diana, 2ª Edición 1978.
6. PAZ, M., *Structural Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
7. MILLER, CH. A., "Dynamic Reduction of Structural Models, *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division*, ST. 10, October 1980, pp. 2097-2107.
8. PRZEMIENIECKI, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.
9. ZIENKIEWICZ, O. C., *El Método de los Elementos Finitos*, Reverte S.A. Barcelona, 1980.



## Capítulo 6

### ANALISIS SISMICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES ORTOGONALES PLANAS CON ESPECTROS DE RESPUESTA

#### 6.1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se han ido exponiendo, de forma general, los conceptos y procedimientos necesarios para el análisis sísmico de estructuras por superposición modal con espectros de respuesta. Con este capítulo lo que se pretende es la particularización de estos procedimientos a un caso de gran interés práctico, las estructuras reticulares ortogonales planas de nudos rígidos.

En este capítulo se exponen los distintos pasos para el análisis sísmico de una estructura y la formulación empleada es la que se ha empleado para la realización del programa "ASER" que se incluye en el capítulo 7.

#### 6.2. DEFINICION DEL ESPECTRO DE DISEÑO

Evidentemente, la mejor forma de determinar el espectro de diseño sería disponer de una cantidad suficiente de acelerogramas de sismos que permitiera obtener un espectro de respuesta medio característico de la zona en que va a asentarse la construcción. La baja frecuencia con que ocurren los sismos y la pequeña cantidad de aparatos registradores existentes hace que sea muy pequeña la cantidad de información disponible para poder construir estos espectros. Para eliminar este problema, se han propuesto una serie de "espectros medios" contruidos a partir de los registros de algunos terremotos. En la figura 1, se muestran los espectros medios de velocidades y aceleraciones obtenidos por Housner (6) a partir de las componentes de los terremotos de El Centro (California) 1940, El Centro 1934, Olympia (Washington) 1949 y Taft (California) de 1952.

Los espectros de cada terremoto se han normalizado para obtener

un espectro medio; si se desea obtener las ordenadas reales de los espectros de cada uno de los terremotos empleados, hay que multiplicar las ordenadas espectrales por 2,7, 1,9, 1,9 y 1,6, respectivamente.

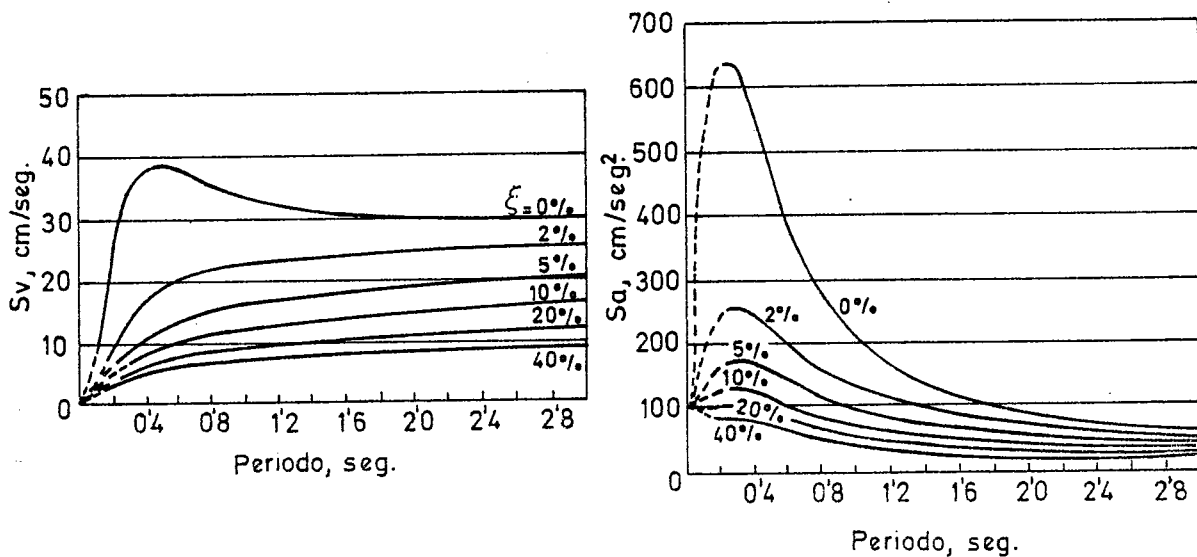


Figura 1

Espectros medios de velocidades y aceleraciones (6)

Si se van a emplear estos espectros, hay que tener en cuenta que su forma y valores son consecuencia de las características sísmicas (tipo de suelo, distancias a fallas, etc.) del lugar en que se registraron los terremotos, que pueden ser muy distintas de las del caso que se vaya a estudiar.

En el caso de que no se disponga de registros de sismos de la zona y a partir de las características observadas en los espectros de respuestas elásticas e inelásticas (señaladas en el capítulo 2, apartados 2.2 y 2.3), el espectro de diseño puede obtenerse con el procedimiento siguiente:

- Estimar los valores máximos del esplazamiento, velocidad y aceleración del suelo que pueden presentarse de acuerdo con el grado sísmico considerado.

- Obtener el espectro de respuesta elástico a partir del amortiguamiento de la estructura.
- Obtener los espectros de diseño inelásticos de fuerzas y desplazamientos a partir del factor de ductilidad.

Los valores máximos del movimiento del suelo pueden obtenerse a partir de estudios rigurosos de las características sísmicas de la zona en función de los máximos terremotos ocurridos, o recurriendo a los valores que fijan las Normas y Reglamentos Sísmicos en vigor.

El espectro de respuesta elástico puede obtenerse a partir del movimiento del suelo teniendo en cuenta que:

- Para frecuencias muy bajas ( $\approx 0,03$  c/s) e independientemente del grado de amortiguamiento, el desplazamiento del espectro de respuesta se acerca asintóticamente al desplazamiento máximo del suelo.
- Para frecuencias altas ( $\approx 20$  c/s) e independientemente del grado de amortiguamiento, la aceleración del espectro de respuesta se acerca asintóticamente a la aceleración máxima del suelo
- Para las frecuencias intermedias hay una amplificación del movimiento del suelo, mayor para aceleraciones que para velocidades y mayor para velocidades que para desplazamientos. Al contrario que antes, estos factores de amplificación son función del grado de amortiguamiento y bajan al aumentar este. En el espectro de respuesta del terremoto de El Centro 1940, los factores de amplificación para un sistema sin amortiguar son 9,5, 4,2 y 3,5; 4, 3 y 2 para amortiguamiento 2% y 2, 1,5 y 1 para amortiguamiento del 5% al 10%.

Una vez obtenido el espectro de respuesta elástico y en función del grado de ductilidad que puede desarrollar la estructura, puede obtenerse el espectro de respuestas inelástico según lo expuesto en el apartado 2.3.1. En resumen, la construcción del espectro inelástico se basa en las relaciones existentes con el elástico, observadas a partir de los espectros elásticos e inelásticos obtenidos para los registros de los

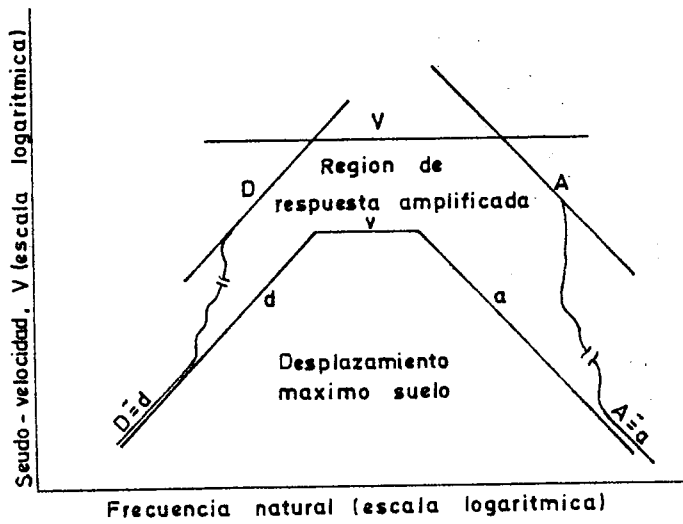


Figura 2

Forma general de los espectros de respuesta elástica

sismos de mayor importancia. Estas relaciones son:

- En las zonas de bajas frecuencias, el desplazamiento espectral es el mismo.
- En la zona de altas frecuencias, la aceleración espectral es la misma
- En la zona de frecuencias intermedias, la energía absorbida es la misma.

En base a estas relaciones se obtienen los valores de la tabla 1 que permiten obtener las ordenadas del espectro inelástico a partir de las del elástico en función del factor de ductilidad ( $\mu$ ).

<u>Cantidad que se conserva</u>	<u>Desplazamiento</u>	<u>Aceleración</u>
Desplazamiento	1	$\frac{1}{\mu}$
Energía	$\frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}}$
Aceleración	$\mu$	1

Tabla 1. Relación entre los valores de los espectros elástico e inelástico.



En la figura 3, se muestra un ejemplo de construcción del espectro de respuesta inelástico a partir de los valores del movimiento del suelo. Los valores de partida empleados son:

- Desplazamiento máximo del suelo . . . 25,4 cm.
- Velocidad máxima del suelo. . . . 45,72 cm/s.
- Aceleración máxima del suelo . . . . 0,4 g.
- Amortiguamiento . . . . . 10 %
- Factor de ductilidad . . . . . 5

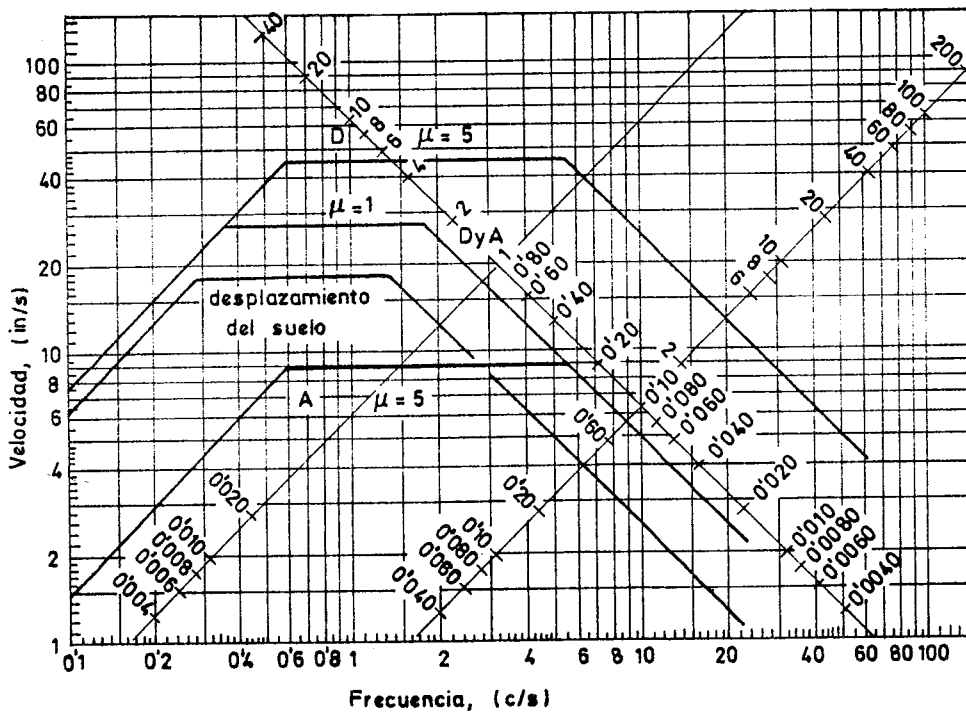


Figura 3

Construcciones del espectro de respuesta inelástico

Como puede verse, para el espectro inelástico se tienen dos curvas distintas, una para aceleraciones y otra para desplazamientos. A la hora de utilizar estos espectros para el análisis modal, se empleará el de aceleraciones para obtener los esfuerzos de diseño y el de desplazamientos para el cálculo de los desplazamientos inelásticos totales. Teniendo en cuenta las relaciones de la tabla 1, los desplazamientos ine-

lásticos pueden obtenerse multiplicando por el factor de ductilidad los calculados con el espectro de aceleraciones.

Si no se dispone de datos suficientes para seguir este procedimiento, puede emplearse alguno de los espectros medios de diseño que se han propuesto y que dan para cada periodo la relación entre la aceleración máxima del suelo y la aceleración de diseño. En la figura 4, se muestran tres de estos espectros.

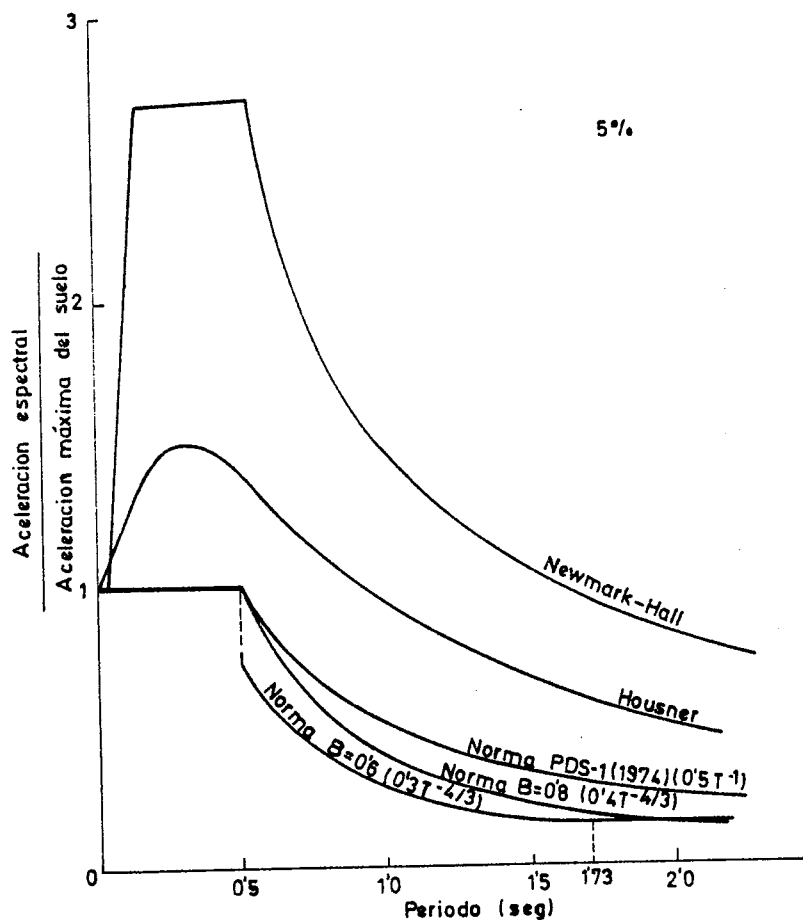


Figura 4

Modelos de espectro de diseño

Con las ordenadas menores aparece el espectro básico (sin factores de corrección) adoptado por la Norma Española PDS-1 (1974) y las cur

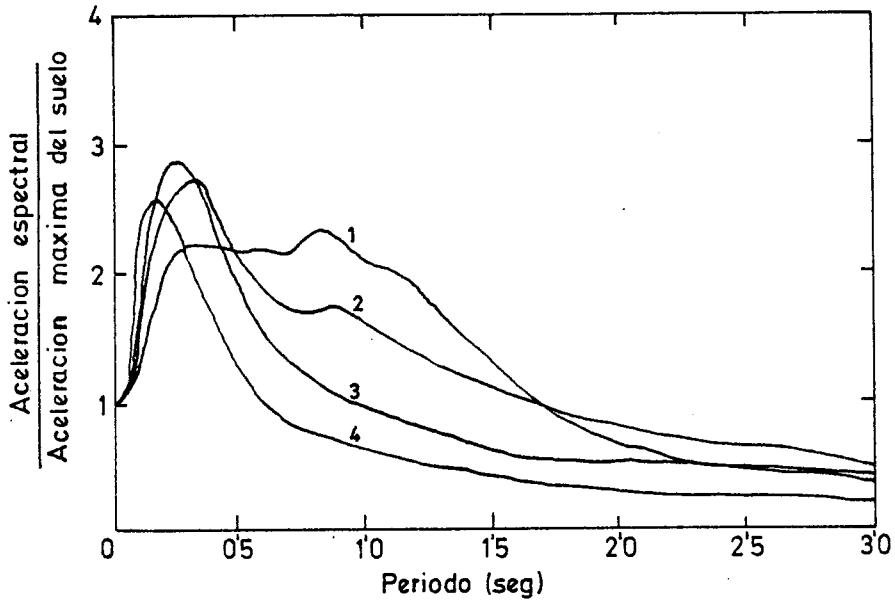
vas reducidas correspondientes a edificaciones con plantas poco subdivididas ( $B=0,8$ ) y con plantas muy subdivididas ( $B=0,6$ ). Si se va a emplear este espectro hay que tener en cuenta algunas cuestiones relacionadas con la fórmula propuesta para incluir las características de amortiguamiento:

- En el caso de "estructuras esbeltas y muy esbeltas" en las que es necesario emplear los modos 2º, y 2º y 3º, al aplicar la fórmula de reducción y ser los periodos bajos, aparecen valores del *factor de respuesta* ( $\beta$ ) superiores a 1; lo que resulta absurdo teniendo en cuenta que al aumentar el amortiguamiento siempre se reducen las respuestas.
- Para un periodo de unos dos segundos y debido a la limitación  $\beta \leq 0,5$  resulta que producen mayor amortiguamiento los edificios poco subdivididos que los muy subdivididos.

Otro de los espectros que se incluye es el debido a Housner, pensando para estructuras de edificación. Por último, el espectro con mayores ordenadas, es el propuesto por Newmark-Hall, para su aplicación en centrales nucleares.

Como puede comprobarse, estos espectros adoptan valores distintos y en los tres casos menores que las correspondientes a espectros de respuesta elásticos con el 5% de amortiguamiento, de los que parece ser que se ha partido. La razón de estas diferencias es que estos espectros no son de respuesta, sino espectros reducidos para diseño, en los que se ha tenido en cuenta el riesgo de la construcción y el grado de comportamiento inelástico (factor de ductilidad) que pueda admitir la estructura.

Para poder emplear estos espectros en el procedimiento que aquí se expone, habría que determinar cual es el factor de ductilidad empleado para reducir el espectro de respuesta elástico. De una forma aproximada, los espectros adoptados en las Normas y Reglamentos Sísmicos emplean valores del factor de ductilidad de 4 a 6. Podemos obtener el factor de ductilidad que debería desarrollar una estructura en caso de ocurrencia del sismo al que corresponde el espectro. La Norma PDS-1



- 1) ARCILLA Y ARENA BLANDA O MEDIA.
- 2) SUELOS ARENOSOS PROFUNDOS (75m.).
- 3) SUELOS DUROS (45m.).
- 4) ROCA

Figura 5

Espectros de respuesta para distintos tipos de suelo (8)

$$\delta = 1 + T/T_s - 0.5 (T/T_s)^2 \quad T/T_s < 1$$

$$\delta = 1.2 + 0.6T/T_s - 0.3(T/T_s)^2 \quad T/T_s > 1$$

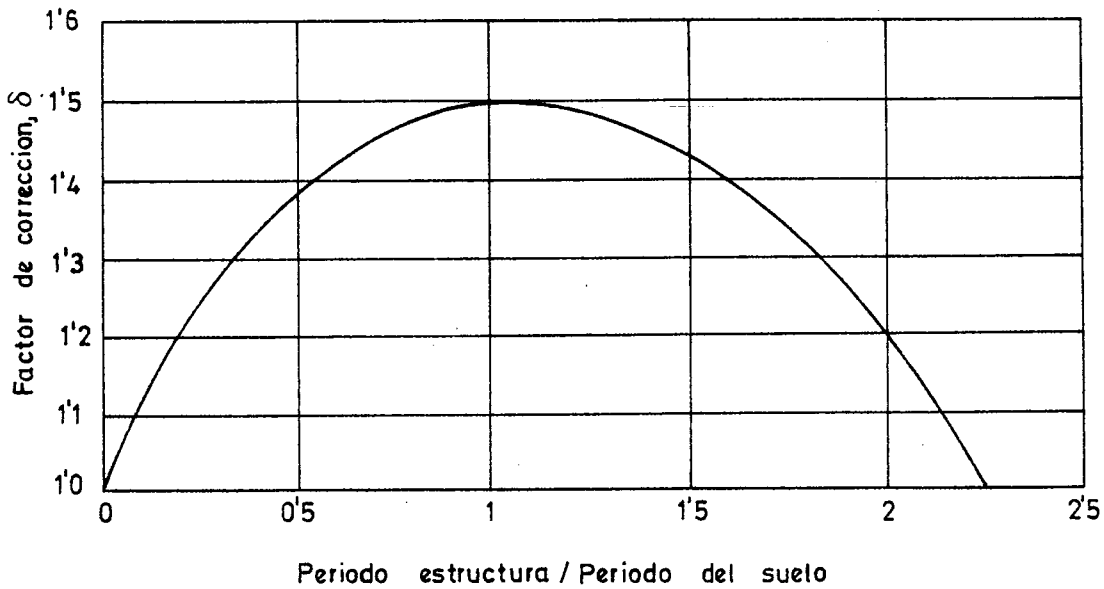


Figura 6

Factores de corrección del espectro en función del suelo

por ejemplo, en el rango de periodos de 0 a 0,5 segundos, toma una aceleración de diseño igual a la máxima del movimiento del suelo; si aceptamos que este espectro corresponde al 5% de amortiguamiento, el factor de amplificación de aceleraciones es aproximadamente de 2 y el factor para pasar de las aceleraciones del espectro elástico a las del inelástico es  $1/\sqrt{2\mu-1}$ . Si tenemos en cuenta los factores de amortiguamiento que reducen el valor del espectro de la Norma, para que la ordenada del espectro inelástico sea igual a la de la Norma, ha de cumplirse que:

$$\frac{2}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{B}{\sqrt[3]{T}}$$

que para  $B=0,6$  y  $T=0,5$  da un valor  $\mu=4,05$ . Realizando este proceso para distintos periodos podría obtenerse una "ductilidad media" para el espectro.

Cuando se vaya a emplear alguno de estos procedimientos, hay que tener en cuenta que la forma del espectro varía con las condiciones del suelo, tal como puede verse en la figura 5, obtenida por Seed, Ugas y Lismer (8) a partir de 104 registros de sismos con aceleraciones superiores a 0,05 g, correspondientes a 4 tipos distintos de suelos.

Se han realizado gran cantidad de estudios para tener en cuenta la influencia del terreno en los espectros de respuesta. Seed, por ejemplo, propone las curvas y factores de corrección de la figura 6 en las que se obtienen unos factores de amplificación de la relación periodo de la estructura/periodo del suelo.

La Norma Española PDS-1 (1974) en su artículo 4.13, tiene en cuenta este efecto, conjuntamente con el debido al tipo de cimentación, a través del *factor de cimentación* ( $\delta$ ).

Actualmente parece ser que la tendencia de las nuevas Normas Sísmicas para tener en cuenta la influencia del suelo es definir un espectro de respuesta para cada tipo de suelo, tal como lo ha hecho la Norma Japonesa, cuyos espectros para los distintos tipos de suelo se han representado en la figura 7.

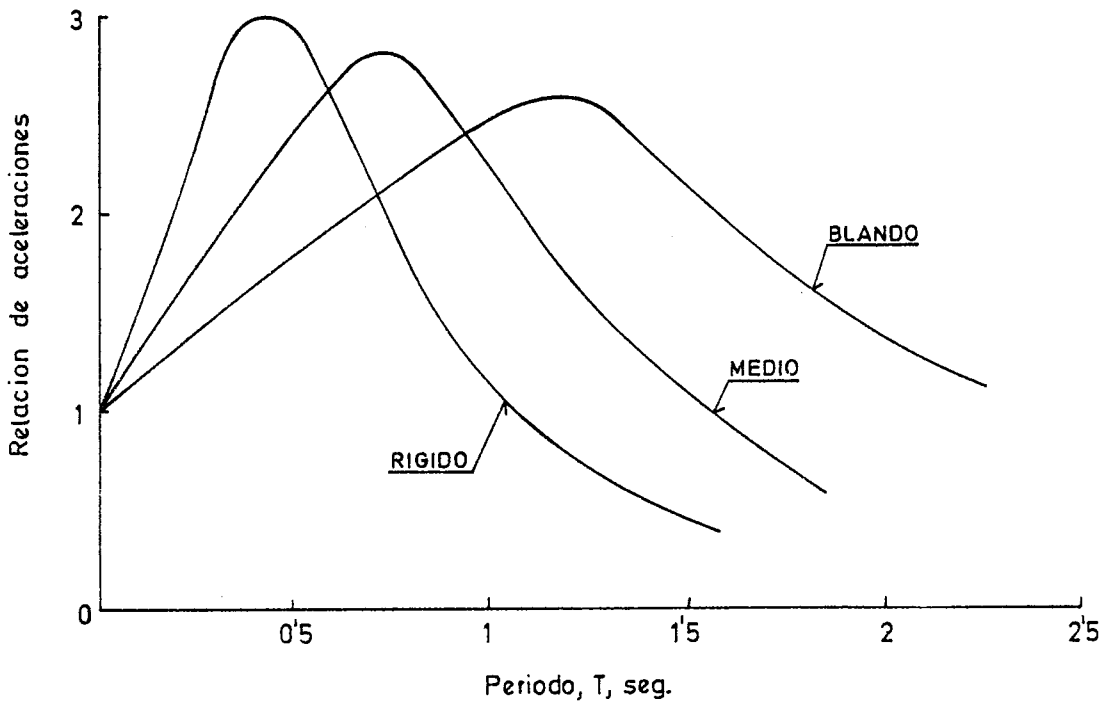


Figura 7

Espectros de diseño de la Norma Japonesa  
(para distintos tipos de suelo)

### 6.3. FORMACION Y CONDENSACION DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ Y DE MASAS DE LA ESTRUCTURA

Para la formación de la matriz dinámica, necesaria para la obtención de los valores y vectores propios es necesario, en primer lugar, la formación de las matrices de rigidez y de masa de la estructura.

En el capítulo 4, se han obtenido las matrices de rigidez y de masa de un elemento, en su sistema local, para el caso mas general de estructuras tridimensionales.

En este apartado se va a exponer un procedimiento para formar y condensar las matrices de rigidez y de masas totales de la estructura, particularizando las ecuaciones y matrices del citado capítulo para el modelo simplificado con las características siguientes:

- La estructura y las cargas están contenidas en el mismo plano.
- No se tienen en cuenta las deformaciones de los soportes producidas por los esfuerzos axiales.

- Toda la masa de un piso se supone concentrada en un punto y se asocia solamente al desplazamiento horizontal del piso.
- Los grados de libertad de giro y desplazamiento horizontal se condensan a un desplazamiento horizontal por cada piso de la estructura.

La primera hipótesis, habitual en el análisis estructural, supone que la estructura puede dividirse en una serie de pórticos que actúan aisladamente unos de otros. En general esto no será verdad; en efecto, debido a la rigidez de los forjados en su plano, los desplazamientos horizontales de los distintos pórticos serán prácticamente iguales, o lo que es lo mismo, todos los pórticos trabajan conjuntamente. En general, los resultados son suficientemente correctos; ahora bien, cuando por cualquier causa (un pórtico mucho más rígido que los demás, Los muros de una caja de escalera, etc.) se prevea que esta hipótesis vaya a dar errores apreciables, puede mejorarse el procedimiento imponiendo que los desplazamientos horizontales de todos los elementos resistentes unidos por los forjados sean los mismos.

La segunda hipótesis puede descomponerse en dos partes, una referente a las vigas y otra referente a los soportes. Respecto a las vigas, esta hipótesis puede considerarse totalmente correcta; en primer lugar, las fuerzas axiales que van a soportar no son tan altas como las de los soportes y en segundo lugar además de la rigidez propia, está la rigidez del forjado. Para los soportes, la validez de esta hipótesis está condicionada por la altura de la estructura; para el ámbito en que se pretende aplicar este modelo (estructuras de hasta 10 ó 15 plantas) los resultados son suficientemente correctos.

La validez de la tercera y cuarta hipótesis se ha estudiado en el capítulo 5, donde se ven los errores que se cometen al introducir cada una de las hipótesis.

De una forma general, para edificios en altura normales de menos de 15 plantas, los errores cometidos en los valores y vectores propios son, en los peores casos, menores del 10%. Esta cota superior del error es aceptable en diseño sísmico, sobre todo teniendo en cuenta la incertidumbre real existente a la hora de elegir el sismo de diseño.

### 6.3.1. Matrices de rigidez elástica y geométrica

Sea un elemento prismático recto de una estructura plana, y su sistema de coordenadas local representado en la figura 8.

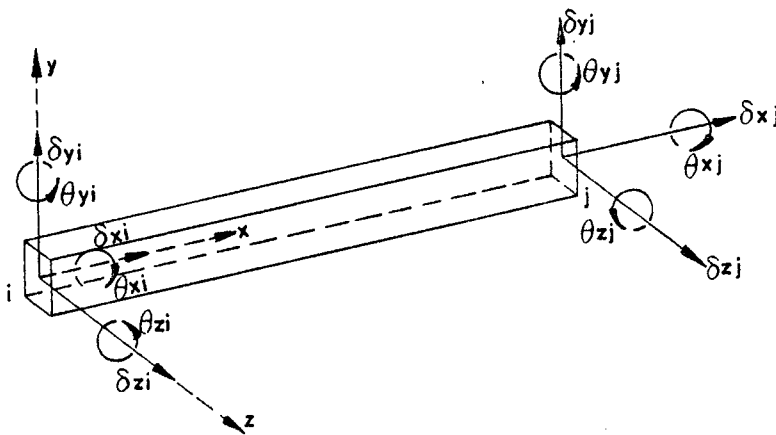


Figura 8

Elemento prismático recto

Si la estructura está contenida en el plano X-Y las fuerzas y desplazamientos a considerar en cada extremo, serán  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $m_z$ ,  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  y  $\theta_z$ . Imponiendo que el elemento no sufre alargamientos ni acortamientos, el desplazamiento relativo entre los extremos será cero. Como en la formulación matricial las fuerzas axiales ( $f_{xi}$ ,  $f_{xj}$ ) se obtienen a partir de los desplazamientos relativos de los extremos, al realizar esta simplificación no pueden obtenerse y hay que calcularlos a partir de las ecuaciones de equilibrio una vez conocidos el resto de los esfuerzos. Así pues, las fuerzas y desplazamientos a tener en cuenta para la formulación matricial del problema son  $f_y$ ,  $m_z$ ,  $\delta_y$  y  $\theta_z$ . Particularizando la ecuación (4.14) para este caso se tiene:

$$\{f\} = ([k_E] + [k_G]) \{x\} \quad (6.1)$$

siendo:



$$\{f\} = \{f_{yi}, m_{zi}, f_{yj}, m_{zj}\}^T \quad (6.2)$$

$$\{x\} = \{\delta_{yi}, \theta_{zi}, \delta_{yj}, \theta_{zj}\}^T \quad (6.3)$$

$$[k_E] = \begin{bmatrix} \frac{12 EI_z}{L^3} & \frac{6 EI_z}{L^2} & -\frac{12 EI_z}{L^3} & \frac{6 EI_z}{L^2} \\ & \frac{4 EI_z}{L} & -\frac{6 EI_z}{L^2} & \frac{2 EI_z}{L} \\ \text{SIMETRICA} & & \frac{12 EI_z}{L^3} & \frac{6 EI_z}{L^2} \\ & & & \frac{4 EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$[k_G] = \frac{f_x}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & \frac{2 L^2}{15} & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ \text{SIMETRICA} & & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & & \frac{2 L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

A partir de estas matrices de rigidez de un elemento, se puede obtener la matriz de rigidez de la estructura siguiendo el proceso general del método de las rigideces:

- Cálculo de las matrices de rigidez de los elementos en el sistema de coordenadas de la estructura.
- Formación de la matriz de rigidez de la estructura exigiendo que en cada nudo se cumplan las condiciones de compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas.
- Aplicación de las condiciones de contorno.

Este proceso es aplicable a estructuras con unas características totalmente arbitrarias; ahora bien, debido a esta generalidad, exige que se realicen una serie de operaciones que pueden evitarse, particularizando el procedimiento para el tipo de estructura en estudio.

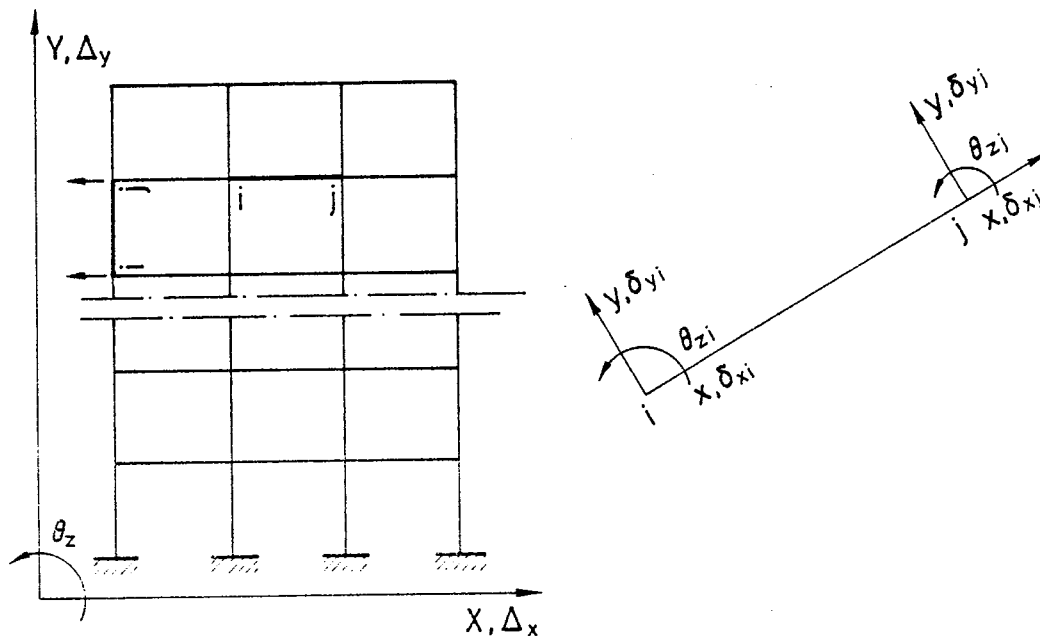


Figura 9

Ejemplo de estructura y sistemas de coordenadas

En la figura 9 se ha representado una estructura reticulada ortogonal, con un sistema de coordenadas global X, Y. Como puede observarse, todos los soportes tienen el eje "x" local paralelo al eje "Y" global de la estructura; así pues, para tener la matriz de rigidez de cualquier columna en el sistema global, hay que realizar un giro de  $90^\circ$  a las matrices 6.4 y 6.5. En vez de hacer este giro para cada elemento; puede obtenerse directamente la matriz de rigidez en el sistema global, teniendo en cuenta que:

- Los desplazamientos  $\delta_y$  del elemento son paralelos y de sentido contrario a los desplazamientos  $\Delta_x$  del sistema global.
- Los desplazamientos  $\delta_x$  son paralelos y del mismo sentido que los  $\Delta_y$ .

- Los giros son iguales en los sistemas global y local.

Teniendo en cuenta esto, las matrices (6.4) y (6.5) pueden ponerse, en el sistema global, como:

$$[K_E]_s = \begin{bmatrix} \frac{12 EI_z}{L^3} & -\frac{6 EI_z}{L^2} & -\frac{12 EI_z}{L^3} & -\frac{6 EI_z}{L^2} \\ & \frac{4 EI_z}{L} & \frac{6 EI_z}{L^2} & \frac{3 EI_z}{L} \\ \text{SIMETRICA} & & \frac{12 EI_z}{L^3} & \frac{6 EI_z}{L^2} \\ & & & \frac{4 EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$[K_G]_s = \frac{F_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & \frac{2 L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ \text{SIMETRICA} & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & \frac{2 L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

De la misma forma, para obtener las matrices de rigidez de las vigas en el sistema global, hay que tener en cuenta que:

- El sistema de coordenadas local de cualquier viga, es paralelo al sistema de coordenadas global de la estructura.
- Puesto que no se consideran las deformaciones axiales de los soportes y no hay desplazamientos verticales de los apoyos, los desplazamientos  $\delta_{yi}$  y  $\delta_{yj}$  son cero para cualquier viga.
- Puesto que las fuerzas axiales en las vigas son bajas, no se tiene en cuenta el cambio de rigidez debido a las mismas.

Con esto, la matriz de rigidez de una viga en el sistema global será:

$$[K_E]_v = \begin{bmatrix} \frac{4 EI_z}{L} & \frac{2 EI_z}{L} \\ & L \\ \text{SIMETRICA} & \frac{4 EI_z}{L} \\ & L \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Una vez obtenidas las matrices de rigidez de los elementos en el sistema local, puede hacerse conjuntamente la formación de la matriz de rigidez y la aplicación de las condiciones de contorno empleando el procedimiento de ensamble directo. Básicamente, el procedimiento consiste en formar los vectores de fuerzas y desplazamientos correspondientes a los grados de libertad no restringidos para, a continuación, ir colocando los coeficientes de las matrices de rigidez de cada elemento en la posición correspondiente de las matrices de rigidez globales (ref. 2). Procediendo de esta forma se imponen automáticamente las condiciones de contorno ya que en la matriz de rigidez no se han colocado las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad de los apoyos.

### 6.3.2. Matriz de Masas

En el apartado 4.3., se han formulado las matrices de masa consistente y condensada y en el apartado 5.3., se ha visto los errores que se cometen al emplear distintas formulaciones para la matriz de masas total de la estructura. En función de los resultados del citado apartado 5.3., queda justificado el empleo de una matriz de masas diagonal, en la que cada término de la diagonal principal corresponde a la masa total de uno de los pisos de la estructura. Como ya se ha señalado, esta matriz de masas está en el menor número de operaciones y de memoria de ordenador que su uso impone, por otro lado, los errores al emplearla son muy pequeños.

6.3.3. Condensación de las matrices de rigidez y de masas

Expresando la ecuación 5.10., en función de las matrices de rigidez y de masas reducidas, se tiene:

$$w^2 [M]^* \{X_i\} = [K]^* \{X_i\} \quad (6.9)$$

la matriz de rigidez reducida se obtiene como:

$$[K]^* = [K_{ii}] - [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \quad (6.10)$$

siendo:

- $[K_{ii}]$  la submatriz de rigidez que relaciona fuerzas y desplazamientos horizontales de piso.
- $[K_{ee}]$  la submatriz de rigidez que relaciona momentos y giros en los nudos.
- $[K_{ie}]$  la submatriz de rigidez que relaciona fuerzas horizontales de piso con giros en los nudos.
- $[K_{ei}]$  la submatriz de rigidez que relaciona momentos en nudos con desplazamientos horizontales de piso.

Para la matriz de masas reducida, teniendo en cuenta que se emplea una matriz de masas diagonal, con masas asociadas exclusivamente a los desplazamientos de piso, se tiene:

$$[M]^* = [M] \quad (6.11)$$

## 6.4. OBTENCION DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

De una forma general, los procedimientos de obtención de valores y vectores propios, podemos dividirlos en dos grandes grupos; métodos de transformación y métodos iterativos.

Los *métodos de transformación* realizan una serie de transformaciones a la matriz dinámica, de forma que se mantienen los valores propios, para llevarla a una forma (diagonal, por ejemplo) en que los valores propios sean fáciles de obtener. En estos métodos se obtienen todos los valores propios a la vez y la cantidad de operaciones a realizar es proporcional a la tercera potencia del orden de la matriz dinámica ( $O(n^3)$ ).

Los *métodos iterativos* se aplican directamente a la matriz dinámica y, mediante un proceso de aproximaciones sucesivas, se van obteniendo uno a uno los valores propios. En estos métodos, la cantidad de operaciones a realizar es proporcional al producto del orden de la matriz dinámica por el número de valores a obtener y por el cuadrado del semiancho de banda de la matriz ( $O(n \cdot b^2)$ ).

En el subprograma "ANAMOD", incluido en el capítulo 7, se emplea el método de Jacobi, que es un caso característico del primer grupo.

Las razones para elegir este método son su gran sencillez, el pequeño orden de la matriz dinámica y el número de valores que se desean obtener.

Para poder emplear el método de Jacobi, para matrices simétricas, el problema de valores y vectores propios debe estar planteado como:

$$[A] - \lambda [I] \{r\} = \{0\} \quad (6.12)$$

siendo  $[I]$  la matriz de identidad y  $[A]$  una matriz simétrica.

De acuerdo con las ecuaciones (6.9) a (6.11), el problema de valores propios que se llega es:

$$[K]^* - w^2 [M] \{x\} = \{0\} \quad (6.13)$$

Aunque el procedimiento es totalmente general, se va a exponer la forma de pasar de (6.12) a (6.13), para el caso particular que  $[M]$  es una matriz diagonal, sin valores cero en la diagonal principal.

Descomponiendo la matriz  $[M]$  como:

$$[M]^* = [M]^{*\frac{1}{2}} [M]^{*\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

premultiplicando y postmultiplicando los términos de (6.13) por  $[M]^{-1/2}$  se llega a la ecuación (6.12). Con esto,  $[A]$  será una matriz simétrica y en banda, que puede almacenarse en el lugar que ocupaba  $K$ .

$$[A] = [M]^{-1/2} [K] [M]^{-1/2} \quad (6.15)$$

A partir de los resultados de la ecuación (6.12), los valores y vectores propios de (6.13), serán:

$$w^2 = \lambda \quad (6.16)$$

$$\{x\} = [M]^{-1/2} \{r\} \quad (6.17)$$

Así pues, el método de Jacobi se aplica a la matriz  $[A]$  de (6.15). Este método, llamado también de diagonalización por rotaciones sucesivas, consiste básicamente en aplicar una serie de rotaciones a la matriz dinámica hasta hacerla diagonal; los términos de la diagonal de esta matriz serán los valores propios del problema original y los vectores propios se obtendrán aplicando a los obtenidos con la matriz  $[A]$ , la transformación dada por (6.17).

## 6.5. ANALISIS MODAL CON ESPECTROS DE RESPUESTA

Aunque el interés principal del análisis modal es la obtención de las acciones sísmicas, en el programa realizado se han incluido todos aquellos valores que puedan dar información de las características dinámicas de la respuesta de la estructura.

### 6.5.1. Ortogonalidad de los modos

Una vez obtenidos los valores y vectores propios, la propiedad de ortogonalidad de los modos, permite verificar la exactitud de los vectores propios cuando se emplean masas puntuales, la propiedad de ortogonalidad respecto a la matriz de masas es:

$$\sum_{i=1}^n M_i \phi_{ji} \phi_{ki} = \epsilon \quad \begin{array}{l} j, k = 1, 2 \dots n \\ j \neq k \end{array} \quad (6.18)$$

Teóricamente, el valor de  $\epsilon$  ha de ser cero; ahora bien, como consecuencia de los errores de cálculo y de redondeo, este valor nunca será cero.

### 6.5.2. Valores generalizados

Los valores de la masa y de la rigidez generalizados, para un modo "j", corresponden a los coeficientes de la aceleración y el desplazamiento que aparecen, en la ecuación correspondiente a ese modo, cuando se desacoplan las ecuaciones de desplazamiento del sistema.

Particularizando la ecuación (3.28) para el caso que la matriz de masas es diagonal, la masa generalizada para el modo "j", se calcula como:

$$M_j^* = \sum_{i=1}^n M_i \phi_{ji}^2 \quad (6.19)$$

La rigidez generalizada, por no ser la matriz de rigidez diagonal, se calcula como:

$$K_j^* = \{\phi_j\}^T [K]^* \{\phi_j\} \quad (6.20)$$

### 6.5.3. Factores de participación y valores modales máximos

Aunque todos los valores de este apartado se emplean como medio para obtener los desplazamientos o fuerzas a emplear en el diseño sísmico, se presentan como resultados intermedios porque indican cual es la participación de cada modo en la respuesta total de la estructura. A partir de estos valores es posible decidir el número de modos a emplear (teniendo una estimación del error que se va a cometer) sin necesidad de



calcular e ir combinando todos los modos.

### 6.5.3.1. Factor de participación de desplazamientos

La expresión empleada, es:

$$\xi'_j = \frac{\xi_j}{M_j^*} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \phi_{ji}}{M_j^*} \quad (6.21)$$

comparando con la ecuación (3.49) se ve que, multiplicando la expresión anterior por la ordenada del espectro de diseño de desplazamientos, correspondiente al periodo del modo, se tiene el desplazamiento máximo de dicho modo. Este desplazamiento máximo se obtiene como:

$$X_{j \max} = \xi'_j S_{dj} = \frac{\xi'_j S_{vj}}{w_j} \quad (6.22)$$

### 6.5.3.2. Masa modal efectiva

Este valor puede interpretarse como la parte total de la masa que responde al sismo en el modo en cuestión. Si se calcularan todos los modos, la suma de todas las masas modales efectivas sería igual a la masa total. Su valor se calcula como:

$$M_{j \text{ ef}} = \frac{\xi_j^2}{M_j^*} = \xi'_j M_j^* \quad (6.23)$$

El interés de este valor radica en que multiplicándolo por la ordenada del espectro de diseño de aceleraciones, correspondiente al periodo del modo, se tiene el cortante en la base de dicho modo. Este cortante en la base se obtiene como:

$$Q_j = \frac{\xi_j^2}{M_j^*} S_{aj} = M_{j \text{ ef}} S_{vj} w_j \quad (6.24)$$

## 6.5.3.3. Coeficiente sísmico

Este coeficiente es igual al cociente entre el cortante en la base y el peso efectivo correspondiente al modo considerado.

$$c_j = \frac{Q_j}{M_j \text{ ef } g} = \frac{S_{vj}}{g} w_j = \frac{S_{aj}}{g} \quad (6.25)$$

Los coeficientes de este tipo han tenido y tienen gran importancia en las Normas Sísmicas de algunos países que emplean procedimientos estáticos. En estas normas se da un coeficiente de este tipo que, aplicado al peso de la construcción, da el cortante total en la base, que luego se reparte a las distintas alturas siguiendo una determinada ley.

Este coeficiente se ha empleado también en algunos trabajos (ref. 10) para controlar el diseño, imponiendo a través de él consideraciones económicas (costo inicial / costo por riesgo de futuras reparaciones, por ejemplo).

6.5.4. Valores modales máximos

## 6.5.4.1. Desplazamientos modales máximos

Estos valores corresponden a los desplazamientos totales en cada uno de los modos y se calculan, para el piso "i" y modo "j", como:

$$X_{j \text{ max}, i} = \phi_{ji} \frac{f'_j S_{vj}}{w_j} w_j \quad (6.26)$$

## 6.5.4.2. Fuerzas modales máximas

Estos valores corresponden a las fuerzas que aparecen en los pisos para cada uno de los modos y se calculan para el piso "i" y modo "j", como:

$$f_{j \max, i} = M_i \phi_{ji} w_j \xi_j' S_{vj} \quad (6.27)$$

### 6.5.5. Valores máximos mas probables

#### 6.5.5.1. Combinación de los valores modales máximos

Una vez obtenidos los valores máximos correspondientes a cada uno de los modos, y puesto que estos máximos no tienen por qué ocurrir simultáneamente, hay que combinarlos para obtener la respuesta total de la estructura.

Para realizar la combinación de las respuestas modales máximas hay que resolver las dos cuestiones siguientes:

- ¿Cuántos modos hay que incluir?
- ¿Como hay que combinar las respuestas modales máximas?

Ambas cuestiones pueden resolverse acudiendo a las Normas y Reglamentos Sísmicos en vigor; ahora bien, respecto al número de modos a emplear y tal como se ha señalado anteriormente, puede realizarse una elección mas rigurosa a partir de los valores obtenidos en el apartado 6.5.3.

Respecto a la forma de combinar los valores modales máximos, en el apartado 3.6., se muestran una serie de procedimientos válidos para la mayoría de casos. De las tres reglas señaladas en el citado apartado (doble suma, suma de cuadrados y suma de valores absolutos), en el programa se han incluido los dos primeros:

- Suma de cuadrados:

$$X_p = \left[ \sum_{j=1}^m X_{p,j}^2 \right]^{1/2} \quad (6.28)$$

- Suma de valores absolutos:

$$X_p = \sum_{j=1}^m |X_{p,j}| \quad (6.29)$$

Siendo "m" el número de modos que se desean incluir. Un criterio que puede emplearse para elegir la forma de combinación a emplear es ver si las frecuencias de los modos a combinar son muy cercanas o no. Si las frecuencias son muy cercanas, será más exacta la suma de valores absolutos y si no lo son será más exacta la regla de la suma de cuadrados. En el caso de estructuras de edificios de viviendas, las frecuencias están lo suficientemente separadas para que resulte más correcto emplear esta última regla.

#### 6.5.5.2. Desplazamientos máximos más probables

En la salida de resultados del programa se dan estos desplazamientos de tres formas distintas.

Los *desplazamientos absolutos* se obtienen combinando, con una de las dos reglas del apartado anterior, los desplazamientos modales máximos del apartado 6.6.4.1.

Los *desplazamientos relativos* corresponden a los desplazamientos relativos entre los dos forjados de una planta. A partir de estos desplazamientos, dividiéndolos por la altura de la planta, se obtiene el *coeficiente de desplazamiento*.

#### 6.5.5.3. Combinación de fuerzas modales máximas

Al contrario que en el caso anterior, no es conveniente combinar directamente las fuerzas modales máximas para obtener unas acciones de planta. En efecto, sea cual sea la regla de combinación empleada, el ignorar los signos con que se producen estas fuerzas en cada modo supone un incremento excesivo de las fuerzas en los pisos intermedios e inferiores.

La Norma Española PDS-1 (1974), en el apartado 4.14, indica primeramente que la regla de combinación se aplicará a las sollicitaciones (esfuerzo axial N, momento flector M y esfuerzo cortante T) producidas por cada uno de los modos. De acuerdo con esto, habrá que realizar un análisis de la estructura para cada uno de los modos que intervienen en el cálculo y a continuación combinar los resultados para obtener los es-

fuerzas finales de diseño. Como este procedimiento resulta engorroso, la citada norma, en el mismo apartado admite un procedimiento simplificado, consistente en calcular unas fuerzas horizontales equivalentes combinando directamente las fuerzas modales.

Evidentemente, con esto se reduce mucho la cantidad de cálculos a realizar, pero es a costa de un diseño mucho más conservador cuando interviene más de un modo.

Como alternativa, cuando se desee realizar el análisis con un solo estado de fuerzas, puede emplearse el procedimiento siguiente:

- Para cada modo que se vaya a tener en cuenta, se calcula el cortante en cada planta, sumando con su signo correspondiente, la fuerza modal máxima de la planta con las fuerzas modales máximas de las plantas superiores.
- Se aplica la regla de combinación de modos elegida a los valores anteriores obteniendo los "cortantes más probables" de cada planta.
- Se obtienen las fuerzas a aplicar en cada planta restando del valor del cortante más probable de una planta el valor del cortante más probable de la planta superior.

En las tablas que se dan a continuación se han realizado comparaciones de los tres métodos señalados. Los resultados de las tablas 1 y 2, corresponden a una estructura de 6 plantas y 2 vanos y las 3 y 4, a una estructura de 10 plantas y 3 vanos.

En estas tablas se comparan los valores obtenidos al combinar, de distintas formas, las acciones sísmicas. Los esfuerzos del modelo 1 (SRC-M) corresponden a los obtenidos con la propuesta básica de la Norma PDS-1 (1974). Estos valores se obtienen aplicando la regla de suma de cuadrados a los esfuerzos obtenidos al analizar la estructura con cada uno de los tres primeros modos.

Los esfuerzos del modelo 2 (AC.PLAN) son los obtenidos al analizar la estructura con las acciones de planta, calculadas con el procedimiento propuesto en este apartado.

Por último, los esfuerzos del modelo 3 (NORMA(S)) son los obteni

dos al analizar la estructura con las acciones resultantes de combinar, con la regla de suma de cuadrados, las fuerzas modales máximas de los tres primeros modos.

Para la designación de los elementos y puntos en que se realiza la comparación, se ha adoptado la nomenclatura siguiente:

- p n El elemento corresponde a la planta "n"
- C m El elemento es el soporte "m" (empezando a contar desde la izquierda de la planta)
- V m Como el anterior, para vigas
- S Indica que el esfuerzo es el correspondiente al punto superior del soporte
- I,D Indican que el esfuerzo es en el extremo izquierdo o derecho de la viga

ELEMENTO	MODO 1	MODO 2	MODO 3	SRC-M (1)	AC.PLAN. (2)	ERROR %	MORMA(S) (3)	ERROR %
P6-C1 S	1,278	-1,261	0,508	1,866	1,884	0,92	1,912	2,47
P6-C2 S	2,872	-2,786	1,097	4,149	4,200	1,22	4,285	3,26
P5-C1 S	2,632	-1,351	-0,252	2,969	2,974	0,16	3,550	19,55
P5-C2 S	4,433	-2,219	-0,018	4,958	4,948	-0,19	5,942	19,84
P4-C1 S	3,010	-0,306	-0,669	3,099	3,055	-1,42	4,190	35,20
P4-C2 S	6,840	-0,929	-1,353	7,035	7,051	0,23	9,542	35,64
P3-C1 S	4,179	0,713	-0,330	4,252	4,244	-0,20	6,323	48,68
P3-C2 S	6,873	1,281	-0,547	7,013	6,958	-0,78	10,423	48,61
P2-C1 S	4,349	1,642	0,432	4,669	4,635	-0,72	7,258	55,44
P2-C2 S	9,271	3,195	0,709	9,831	9,833	0,01	15,275	55,36
P1-C1 S	3,102	1,347	0,538	3,424	3,422	-0,08	5,377	56,99
P1-C2 S	7,064	3,144	1,282	7,838	7,806	-0,40	12,295	56,86

Tabla 1

6P-2V. Comparación de momentos obtenidos con distintos procedimientos de combinación de modos (Soportes)

ELEMENTO	MODO 1	MODO 2	MODO 3	SRC-M (1)	AC.PLAN. (2)	ERROR %	NORMA(S) (3)	ERROR %
P6-V1 I	-1,278	1,261	-0,508	-1,866	-1,884	0,92	-1,912	2,46
P6-V1 D	-1,436	1,393	-0,548	-2,075	-2,100	1,22	-2,142	3,25
P5-V1 I	-3,610	2,492	-0,314	-4,398	-4,245	-3,47	-5,067	15,21
P5-V1 D	-3,475	2,470	-0,371	-4,280	-4,419	3,24	-4,895	14,36
P4-V1 I	-5,582	2,032	0,661	-5,977	-6,152	2,92	-7,689	28,63
P4-V1 D	-5,518	1,907	0,686	-5,878	-6,049	2,89	-7,608	29,42
P3-V1 I	-7,270	0,135	0,981	-7,337	-7,495	2,15	-10,522	43,40
P3-V1 D	-7,028	0,238	0,961	-7,098	-7,262	2,31	-10,142	42,90
P2-V1 I	-8,756	-1,957	0,133	-8,973	-9,096	1,37	-13,712	52,80
P2-V1 D	-8,289	-1,914	0,091	-8,508	-8,615	1,26	-13,014	52,97
P1-V1 I	-7,341	-2,680	-0,744	-7,850	-7,877	0,34	-12,250	56,13
P1-V1 D	-7,590	-2,770	-0,773	-8,117	-8,149	0,39	-12,677	56,17

Tabla 2

6P-2V. Comparación de momentos obtenidos con distintos procedimientos de combinación de modos (Vigas)



ELEMENTO	MODO 1	MODO 2	MODO 3	SRC-M (1)	AC.PLAN. (2)	ERROR % (3)	NORMA(S) (3)	ERROR %
P10-C1 S	2,290	-3,165	3,734	5,404	5,410	0,09	5,409	0,09
P10-C2 S	3,845	-4,957	5,596	8,407	8,576	2,01	8,739	3,95
P9-C1 S	7,301	-7,561	4,091	11,279	11,289	0,09	12,183	8,01
P9-C2 S	12,806	-12,516	6,511	19,054	19,157	2,42	21,624	13,48
P8-C1 S	11,648	-9,185	0,931	14,863	14,763	-0,67	18,449	24,12
P8-C2 S	18,644	-15,136	2,137	24,110	23,952	-0,65	29,580	22,69
P7-C1 S	15,706	-5,868	-5,139	17,536	17,106	-2,45	25,684	46,46
P7-C2 S	20,955	-4,134	-10,791	23,930	20,851	-12,86	34,270	43,20
P6-C1 S	12,113	-0,700	-3,855	12,731	12,607	-0,97	20,237	58,94
P6-C2 S	25,266	0,145	-7,101	26,245	26,145	-0,38	42,714	62,74

Tabla 3

10P-3V. Comparación de momentos obtenidos con distintos procedimientos de combinación de modos (Soportes)

ELEMENTO	MODO 1	MODO 2	MODO 3	SRC-M (1)	AC.PLAN. (2)	ERROR %	NORMA(S) (3)	ERROR %
P5-C1 S	15,538	2,852	-2,189	15,949	15,706	-1,52	27,467	72,21
P5-C2 S	28,697	8,305	-3,302	30,056	28,560	-4,97	51,802	72,34
P4-C1 S	19,606	6,354	0,847	20,627	20,303	-1,57	37,370	81,16
P4-C2 S	33,590	14,685	4,575	36,944	34,954	-5,38	66,357	79,61
P3-C1 S	19,214	8,582	4,341	21,487	21,067	-1,95	39,430	83,50
P3-C2 S	30,698	17,037	10,663	36,692	34,393	-6,26	65,880	79,54
P2-C1 S	14,952	7,792	5,248	17,659	17,272	-2,19	32,252	82,64
P2-C2 S	20,169	13,468	10,915	26,595	24,411	-8,21	46,587	75,16
P1-C1 S	2,923	2,281	2,027	4,225	3,720	-11,95	7,158	69,39
P1-C2 S	-7,818	-0,182	2,346	-8,164	-7,308	-10,49	-12,619	54,56

Tabla 3 (Continuación)

10P-3V. Comparación de momentos obtenidos con distintos procedimientos de combinación de modos (Soportes)

ELEMENTO	MODO 1	MODO 2	MODO 3	SRC-M (1)	AC.PLAN. (2)	ERROR %	NORMA(S) (3)	ERROR %
P10-V1 I	-2,290	3,165	3,734	5,404	5,410	0,09	5,409	0,09
P10-V1 D	-2,187	3,070	3,601	5,213	5,181	-0,61	5,149	-1,24
P9-V1 I	-9,131	10,474	8,320	16,196	16,575	2,33	17,345	7,09
P9-V1 D	-9,092	10,332	8,011	15,925	16,342	2,61	17,175	7,84
P8-V1 I	-16,250	15,102	6,036	22,990	23,507	2,24	26,998	17,43
P8-V1 D	-15,974	15,078	6,158	22,813	23,241	1,87	26,560	16,42
P7-V1 I	-25,223	15,474	1,579	29,634	30,623	3,33	40,926	38,10
P7-V1 D	-28,069	16,876	1,996	32,813	33,973	3,53	45,585	38,92
P6-V1 I	-26,319	9,039	6,495	28,576	29,208	2,21	43,235	51,29
P6-V1 D	-26,950	9,069	6,617	29,195	29,863	2,28	44,292	51,71

Tabla 4

10P-3V. Comparación de momentos obtenidos con distintos procedimientos de combinación de modos (Vigas)

ELEMENTO	MODO 1	MODO 2	MODO 3	SRC-M (1)	AC.PLAN. (2)	ERROR %	NORMA(S) (3)	ERROR %
P5-V1 I	-27,168	2,221	6,171	27,948	28,722	2,76	46,051	64,76
P5-V1 D	-27,685	2,340	6,192	28,465	29,301	2,93	46,955	64,95
P4-V1 I	-36,953	4,475	4,258	37,466	38,380	2,44	65,925	75,96
P4-V1 D	-38,397	4,651	4,346	38,921	39,930	2,59	68,584	76,21
P3-V1 I	-38,027	10,431	1,189	39,449	40,122	1,70	72,159	82,91
P3-V1 D	-39,116	10,572	1,190	40,563	41,300	1,81	74,213	82,95
P2-V1 I	-36,111	13,346	5,423	38,878	39,264	0,99	71,942	85,04
P2-V1 D	-36,812	13,565	5,474	39,512	40,115	1,01	73,299	85,03
P1-V1 I	-28,693	11,922	6,202	31,584	31,863	0,56	58,698	85,25
P1-V1 D	-29,349	12,127	6,239	32,363	32,548	0,57	59,953	85,24

Tabla 4 (Continuación)

10P-3V. Comparación de momentos obtenidos con distintos procedimientos de combinación de modos (Vigas)

A partir de las tablas presentadas, las características de los procedimientos simplificados (2 y 3), frente al mas exacto (1), son las siguientes:

Procedimiento simplificado de la Norma PDS-1 (1974) (3)

- Los errores son siempre del lado de la seguridad.
- Los errores máximos se presentan en los pisos inferiores y van disminuyendo al ir acercándose a los pisos superiores.
- Los errores aumentan a medida que aumenta el número de modos a tener en cuenta.

Procedimiento basado en las acciones de planta (2)

- Los errores no son siempre del lado de la seguridad.
- Los errores en los momentos de las vigas son del lado de la seguridad y se mantienen aproximadamente iguales en toda la estructura.
- Los errores en los momentos de las columnas son, en general, del lado de la inseguridad. Los errores mínimos se presentan en los pisos superiores y aumentan ligeramente al ir acercándose a los pisos inferiores.
- Los errores cometidos son mucho mas pequeños que los de los procedimientos anteriores.

En resumen y en base a las características y tablas anteriores puede decirse que:

- No es aconsejable el empleo del procedimiento simplificado de la Norma PDS-1 (1974), ya que a cambio de su simplicidad, da lugar a diseños excesivamente conservadores. (En algunos puntos, esfuerzos mayorados en mas de un 50%).
- El procedimiento basado en las acciones de planta da resultados suficientemente correctos. Aunque los resultados no están siempre del lado de la seguridad en todos los elementos, los errores máximos son suficientemente pequeños para que puedan

admitirse en un análisis sísmico.

#### 6.5.5.4. Momentos de vuelco

Siguiendo con el procedimiento propuesto en el apartado anterior para las fuerzas modales, los momentos de vuelco se calculan de la siguiente forma:

- a) Para cada modo, se calculan los momentos de vuelco en una planta "i" a partir de las fuerzas modales máximas:

$$M_{Oj,i} = \sum_{k=i+1}^n Y_k f_{j \max,i} \quad (6.30)$$

- b) Se aplica la regla de combinación de modos elegida a los resultados anteriores y se tiene el momento de vuelco en el piso considerado.

## 6.6. CALCULO DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS

Una vez obtenidas las fuerzas modales máximas, los desplazamientos y esfuerzos modales máximos pueden obtenerse a partir de un análisis matricial, independientemente de las operaciones realizadas para la determinación de estas fuerzas. Sin embargo, es posible reducir el número de operaciones si se obtienen los giros y desplazamientos a partir de las matrices obtenidas durante el proceso de condensación de grados de libertad.

### 6.6.1. Cálculo de desplazamientos

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en los nudos de la estructura, con la notación del apartado 6.6.3., para la matriz de rigidez, pueden ponerse como:

$$\begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}] & [K_{ei}] \\ [K_{ie}] & [K_{ii}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{\Delta\} \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$

siendo:

- {M} el vector columna de momentos aplicados en los nudos.
- {F} el vector columna de fuerzas horizontales aplicadas en las plantas de la estructura.
- {θ} el vector columna de giros en los nudos.
- {Δ} el vector columna de desplazamientos horizontales de planta.

desarrollando las ecuaciones (6.31), se tiene:

$$\{M\} = [K_{ee}] \{\theta\} + [K_{ei}] \{\Delta\} \quad (6.32)$$

$$\{F\} = [K_{ie}] \{\theta\} + [K_{ii}] \{\Delta\} \quad (6.33)$$

el vector de giros, despejándolo de la ecuación (6.32), viene dado por:

$$\{\theta\} = [K_{ee}]^{-1} \{ \{M\} - [K_{ei}] \{\Delta\} \} \quad (6.34)$$

sustituyendo el vector de giros en la ecuación (6.33):

$$\{F\} = [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} \{ \{M\} - [K_{ei}] \{\Delta\} \} + [K_{ii}] \{\Delta\} \quad (6.35)$$

por último, reagrupando los términos en {Δ}, se tiene:

$$\{F\} = \left[ [K_{ii}] - [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \right] \{\Delta\} - [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} \{M\} \quad (6.36)$$

como puede verse, la matriz que multiplica al vector de desplazamientos, es la matriz de rigidez condensada de la estructura  $[K]^*$  (ecuación 6.9). Despejando {Δ}, se tiene:

$$\{\Delta\} = [K]^*{}^{-1} \{ \{F\} + [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} \{M\} \} \quad (6.37)$$

así pues, para la obtención de los desplazamientos solo hay que invertir una matriz (la  $[K_{ee}]$ , de orden igual al número de plantas) y realizar dos productos y una suma de matrices, ya que el resto de operaciones se han realizado anteriormente.

Sustituyendo el vector de desplazamientos en la ecuación (6.34), el cálculo de los giros se reduce a dos multiplicaciones de matrices y una resta de vectores.

### 6.6.2. Cálculo de esfuerzos

#### 6.6.2.1. Cálculo de momentos y cortantes

A partir de los giros y desplazamientos, los esfuerzos en los extremos de un elemento, se obtienen a partir de la ecuación:

$$\{f\} = \{f^e\} + [k] \{\delta\} \quad (6.38)$$

siendo:

- $\{f^e\}$  el vector columna de fuerzas y momentos de empotramiento perfecto en el sistema de coordenadas local del elemento.
- $\{\delta\}$  el vector columna de desplazamientos y giros en el sistema de coordenadas local del elemento.
- $[k]$  la matriz de rigidez del elemento en el sistema de coordenadas local.

La ecuación (6,38), es aplicable al cálculo de esfuerzos en elementos con condiciones de deformación totalmente generales. En el caso particular de las estructuras reticulares ortogonales, en las que no se tienen en cuenta las deformaciones debidas a las fuerzas axiales, los esfuerzos que pueden obtenerse son los cortantes y los momentos en los extremos de los elementos. De acuerdo con esto y teniendo en cuenta las relaciones entre los giros y desplazamientos en los sistemas global y local, los esfuerzos cortantes y momentos flectores, en los extremos de los soportes vienen dados por la ecuación:



$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{yi}^e \\ m_{zi}^e \\ f_{yj}^e \\ m_{zj}^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12 EI}{L^3} z & \frac{6 EI}{L^2} z & -\frac{12 EI}{L^3} z & \frac{6 EI}{L^2} z \\ & \frac{4 EI}{L} z & -\frac{6 EI}{L^2} z & \frac{2 EI}{L} z \\ \text{SIMETRICA} & & \frac{12 EI}{L^3} z & \frac{6 EI}{L^2} z \\ & & & \frac{4 EI}{L} z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & \frac{2 L^2}{15} & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ \text{SIMETRICA} & & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & & \frac{2 L^2}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta_i \\ \theta_i \\ -\Delta_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \frac{f_x}{L} \tag{6.39}$$

Para las vigas, puesto que no se tienen en cuenta las variaciones de rigidez debidas a las fuerzas axiales, los esfuerzos cortantes y los momentos flectores en los extremos, se obtienen mediante la ecuación anterior con  $f_x=0$  y  $\Delta_i=\Delta_j=0$ .

6.6.2.2. Cálculo de axiles

Como se ha señalado anteriormente, al no tener en cuenta las deformaciones debidas a las fuerzas axiales, no es posible obtener estas últimas a partir de los desplazamientos, debiendo hacerlo a partir de las condiciones de equilibrio de fuerzas en los nudos.

Las fuerzas axiales en los soportes, se obtienen planteando el equilibrio de fuerzas verticales en los nudos. Por tratarse de estructuras reticulares ortogonales, las fuerzas que intervienen en el equilibrio son las axiales de los soportes y las cortantes en los extre-

mos de las vigas que concurren al nudo. El procedimiento operativo consiste en iniciar el cálculo en los nudos de la planta superior, donde solo se tiene una incógnita, e ir progresando hacia la planta inferior.

Las fuerzas axiales en las vigas, se obtienen planteando el equilibrio de fuerzas horizontales en los nudos. Por la misma razón que en los soportes, en el equilibrio de fuerzas intervienen las axiales en las vigas y las cortantes en los extremos de los soportes, además de las fuerzas horizontales aplicadas en los nudos. El procedimiento operativo consiste en iniciar el cálculo por uno de los nudos extremos de cada planta, e ir progresando hacia el extremo contrario.

Referencias

1. BERTERO, V., KAMIL, H., "Nonlinear Seismic Design of Multistory Frames", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 2, Núm. 4, 1975, pp. 494-516.
2. DESAI, CH. S., ABEL, J. F., *Introduction to the Finite Element Method* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1972.
3. ESTRADA, G., *Estructuras Antisismicas*, Cecsa, Mexico, 1975.
4. GACETA OFICIAL DEL DEPARTAMENTO DEL D. F., Mexico, capítulo XXXIII, *Diseño por Sismo*, 1º de Marzo de 1977.
5. HANSON, R. D., GOEL, S. C., BERG, C. V., "Design Procedure for Earthquake Loading", *AISI Steel Research for Construction*, Bull. No. 26.
6. HOUSNER, G. W., "Behavior of Structures During Earthquakes", *Proceeding ASCE*, Vol. 85, No. EM-4, October, 1959.
7. KARDESTUNCER, H., *Introducción al Análisis Estructural con Matrices*, McGraw-Hill, 1975.
8. SEED, H. B., UGAS, C., LEYSMER, J., "Site Dependent Spectra for Earthquake-Resistant Design", *Bull. Seismological Society of America* Vol. 66, Núm. 1, February 1976, pp. 221-243.
9. WANG, P. CH., *Calcul des Estructures par les Methodes Numeriques et Matricielles*, Dunod, Paris, 1969.
10. WHITMAN, R. V., BIGGS, J. M., BRENNAN, J. E., "Seismic Design Decision Analysis", *Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division* Vol. 101, No. ST5, Mayo 1975.

11. ZSUTTY, T., "Some Problems and Decisions Relative to the Response Spectrum Method of Seismic Design", *US National Conference on Earthquake Engineering*, Ann. Arbor, Michigan, pp. 87-93, June 1975.

## Capítulo 7

### PROGRAMA DE ANALISIS SISMICO CON ESPECTROS DE RESPUESTA

#### 7.1. DESCRIPCION GENERAL DEL PROGRAMA "ASER"

Para el desarrollo de este programa se ha empleado el lenguaje BASIC, con las características particulares del computador WANG (2226 A) existente en la Cátedra de Estructuras de la ETS de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia.

El programa se ha desarrollado para su aplicación al análisis sísmico de estructuras, siguiendo en todo momento los desarrollos teóricos de los capítulos 1, 2, 3, 4 y 5, particularizados para estructuras reticulares ortogonales planas, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo 6.

Debido a las limitaciones de memoria del citado computador (24K) y al deseo expreso de no dificultar la comprensión del programa con una programación que permitiera un mejor aprovechamiento de la memoria disponible, la capacidad del programa, con el dimensionamiento actual, es el siguiente:

Nº máximo de plantas ... 10 (con un máximo de 3 vanos)

Nº máximo de vanos ..... 5 (con un máximo de 8 plantas)

Cambiando las dimensiones de los distintos vectores y matrices es posible aumentar el número de vanos a costa de disminuir el de plantas y viceversa.

A consecuencia de las citadas limitaciones de capacidad, el programa se ha dividido en varios subprogramas, que se van cargando y eliminando sucesivamente de la memoria principal. Estos subprogramas son:

"ASER" ... Programa principal

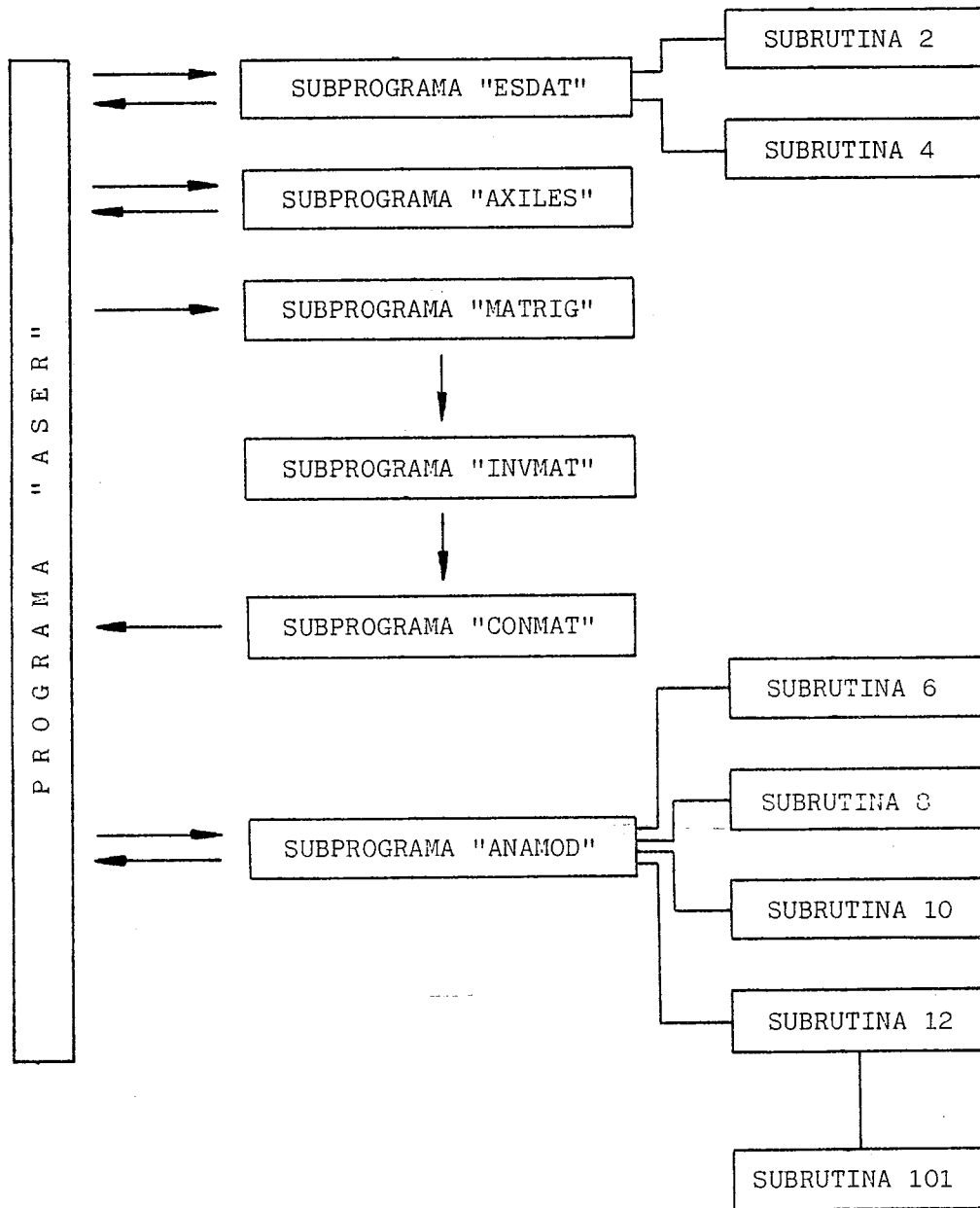


Figura 1  
Organización modular del programa "ASER"

"ESDAT" ... Entrada y salida de datos de la estructura y del espectro de respuesta.

"AXILES" ... Cálculo de los esfuerzos axiales en los soportes debidos a las fuerzas gravitatorias. Puesto que estos esfuerzos se emplean para la obtención de la matriz de rigidez geométrica, solo se ejecuta cuando se desea realizar un análisis no lineal.

"MATRIG" ... Formación de la submatriz de rigidez de la estructura (elástica y geométrica) que relaciona giros y momentos en los nudos.

"INVMAT" ... Inversión de matrices

"CONMAT" ... Formación del resto de la matriz de rigidez de la estructura y condensación de grados de libertad a un desplazamiento horizontal por planta.

"ANAMOD" ... Este subprograma incluye la formación de la matriz de masas, la formación de la matriz dinámica, la obtención de los valores y vectores propios y el análisis sísmico por superposición modal.

## 7.2. INSTRUCCIONES PARA LA ENTRADA DE DATOS

El programa funciona de forma interactiva y, una vez en marcha, va pidiendo los datos necesarios para el caso particular a resolver. La ejecución se inicia cargando el programa principal "ASER", que controla la entrada de datos y el resto de las operaciones hasta finalizar la ejecución.

A continuación se indican los textos que va proporcionando el subprograma "ESDAT", junto con las variable asociadas y las opciones disponibles en cada caso. Precediendo cada uno de los textos, se ha colocado un asterisco cuando solo aparece una vez y dos asteriscos cuando aparece varias veces.

## 1. \* DATOS DE LA ESTRUCTURA

## 2. \* DATOS POR FICHERO O DIRECTOS (F/D) ?

Variable asociada ... J\$

Opciones:

Datos por fichero ... F o EXEC

Datos directos ..... D

a) Entrada de datos directa

## 3. \* DENOMINACION ?

Variable asociada ... D\$

Restricciones ..... Máximo 8 caracteres alfanuméricos

## 4. \* NUMERO DE PLANTAS ?

Variable asociada ... N1

Restricciones ..... Máximo 10 plantas con 3 vanos

Máximo 8 plantas con 5 vanos

## 5. \* NUMERO DE VANOS ?

Variable asociada ... N2

Restricciones ..... Máximo 5 vanos con 8 plantas

Máximo 3 vanos con 10 plantas

## 6. \* MODULO DE ELASTICIDAD (T/M2) ?

Variable asociada ... E5

## 7. \* ALTURAS DE LAS PLANTAS (METROS)

## 8. \*\* PLANTA INICIAL, PLANTA FINAL, ALTURA ?

Variables asociadas ... I1, I2, I3 (temporalmente)

Con los valores I1, I2, se agrupan plantas consecutivas que tengan la misma altura (I3), con lo que se evita tener que introducir de una en una las alturas de igual valor.



Las alturas de planta se guardan en las N1 primeras posiciones del vector H, de acuerdo con el proceso siguiente:

$$H(I) = I3 \quad \text{para} \quad I1 \leq I < I2$$

El proceso anterior se repite hasta que el valor I2 es igual al número total de plantas (N1). La numeración de las plantas se inicia por la base.

9. \* LUCES DE LOS VANOS (METROS)

10. \*\* VANO INICIAL, VANO FINAL, LUZ ?

Variables asociadas ... I1, I2, I3 (temporalmente)

El proceso es el mismo del caso anterior, finalizando al llegar al número total de vanos (N2). Los valores de las luces de los vanos se guardan en el vector H a partir de la posición N1+1. Los vanos de cada piso se numeran de izquierda a derecha.

11. \*\* PLANTA I

12. \*\* VIGA J INERCIA (M4) CONCARGA (T/M) SOBRECARGA (T/M) ?

Variables asociadas ... Inercia .....  $Y((I-1)*N2+J)$

Concarga .....  $Q((I-1)*N2+J)$

Sobrecarga ...  $S1((I-1)*N2+J)$

13. \*\* PLANTA I

14. \*\* SOPORTE J INERCIA (M4) ?

Variable asociada ...  $Y(N1*N2+(I-1)*(N2+1)+J)$

15. \* GRABADO DE DATOS (S/N) ?

Variable asociada ... J\$

Opciones:

Grabado de datos ..... S o EXEC

No grabado de datos ... N

b) Entrada de datos por fichero

16. \* NOMBRE DEL FICHERO DE DATOS ?

Variable asociada ... D\$

Restricciones ..... Máximo 8 caracteres alfanuméricos

17. \* IMPRESION DE DATOS (S/N) ?

Variable asociada ... J\$

Opciones:

Impresión de datos ..... S o EXEC

No impresión de datos ... N

18. \* TIPO DE ANALISIS A REALIZAR ?

ELASTICO LINEAL ..... 0

ELASTICO NO LINEAL ..... 1

19. \* OPCION ?

Variable asociada ... CO

En el análisis elástico lineal solo se emplea la matriz de rigidez elástica, mientras que en el no lineal se emplea también la matriz de rigidez geométrica, que tiene en cuenta la variación de rigidez debida a las fuerzas axiales en los soportes.

20. \* NUMERO DE MODOS PARA SUPERPOSICION MODAL ?

Variable asociada ... N5

Restricciones ..... El número de modos tiene que ser menor o igual al número de plantas de la estructura, consecuencia de emplear la condensación de grados de libertad, reduciendo los a un desplazamiento por planta.

21. \* NUMERO DE MODOS A IMPRIMIR EN RESULTADOS ?

Variable asociada ... N6

Restricciones ..... Las mismas del caso anterior.

## 22. \* FORMA DE COMBINACION DE MODOS

SUMA DE CUADRADOS ..... RSC

SUMA DE VALORES ABSOLUTOS ... SVA

## 23. \* OPCION ?

Variable asociada ... N\$

Si se emplea la opción RSC, los valores mas probables se ob tienen como la raiz cuadrada de la suma de cuadrados de los N5 primeros modos. Si se emplea la opción SVA, los valores mas probables se obtienen como la suma de los valores absolutos de los N5 primeros modos.

## 24. \* COEF. DE SOBRECARGA PARA MATRIZ DE MASAS ?

Variable asociada ... H1

Opciones:

Cualquier valor mayor o igual a cero

Indica el tanto por uno del valor de la sobrecarga que se desea tener en cuenta en la matriz de masas. La concarga la incluye el programa en su totalidad.

## 25. \* COEF. DE PONDERACION DE CONCARGA ?

Variable asociada ... H2

## 26. \* COEF. DE PONDERACION DE SOBRECARGA ?

Variable asociada ... H3

H2 y H3, son coeficientes de ponderación a aplicar a la concarga y sobrecarga, para obtener los axiles en los soportes, para la formación de la matriz de rigidez geométrica.

## 27. \* IMPRESION DE DATOS (S/N) ?

Variable asociada ... J\$

Opciones:

Impresión de datos ..... S o EXEC

No impresión de datos ... N

## 28. \* DATOS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA

## 29. \* DATOS POR FICHERO/NORMA O POR PUNTOS (F/P) ?

Variable asociada ... J\$

Opciones:

Datos por fichero/NORMA ... F o EXEC

Datos por puntos ..... P

c) Datos del espectro por puntos

## 30. \* DENOMINACION ?

Variable asociada ... A\$

Restricciones ..... Máximo 8 caracteres alfanuméricos

Esta variable se emplea como título en la salida de los datos del espectro y en su caso como nombre del fichero para guardar estos datos para su empleo posterior.

## 31. \* NUMERO DE PUNTOS DEL ESPECTRO ?

Variable asociada ... N4

Esta variable corresponde al número de pares de valores periodo-velocidad correspondientes a los puntos del espectro de velocidades.

## 32. \* INTRODUCIR PERIODO (SEG), VELOCIDAD (M/S)

## 33. \*\* PUNTO I ?

Variables asociadas ... Periodo ..... V(1,I)

Velocidad ... V(2,I)

## 34. \* GRABADO DE DATOS (S/N) ?

Variable asociada ... J\$

Opciones:

Grabado de datos ..... S o EXEC

No grabado de datos ... N

d) Datos del espectro por fichero/NORMA

## 35. \* NOMBRE DEL FICHERO/NORMA ?

Variable asociada ... A\$

Opciones:

Nombre de un fichero grabado previamente

Introducir palabra NORMA

Restricciones ..... Máximo 8 caracteres alfanuméricos

d-1) Empleo del espectro de la Norma Española PDS-1 (1974)

## 36. \* GRADO DE INTENSIDAD ?

Variable asociada ... G

Esta variable corresponde al grado de intensidad sísmico de la Norma Española PDS-1 (1974), con que se desea analizar la estructura.

## 37. \* FACTOR DE REDUCCION POR AMORTIGUAMIENTO

PLANTAS MUY SUBDIVIDIDAS .... 0.6

PLANTAS POCO SUBDIVIDIDAS ... 0.8

NO CONSIDERADO ..... 0.0

## 38. \* VALOR ?

Continuación común de c, d y d-1

39. \* FACTOR DE DUCTILIDAD DEL ESPECTRO REDUCIDO ?

Variable asociada ... H5

40. \* IMPRESION DE DATOS ?

Variable asociada ... J\$

Opciones:

Impresión de datos ..... S o EXEC \*

No impresión de datos ... N

## 7.3. LISTADO DEL PROGRAMA "ASER"

```

1000 REM *****
1010 REM **          PROGRAMA "ASER"          **
1020 REM ** ANALISIS SISMICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES **
1030 REM **   ORTOGONALES, CON ESPECTROS DE RESPUESTA   **
1040 REM *****
1050 REM
1060 COM A1,C0,E5,H1,H2,H3,H6,N1,N2,N4,N5,N6,T7,T8,A#,N#
1070 COM H(15),N(40),Q(30),S1(30),V(2,20),Y(70)
1080 REM
1090 ON A1 GOTO 1110,1130,1150,1160
1100 REM ** ENTRADA DE DATOS          *****: A1=1: LOAD DC F"ESDAT"
1110 IF C0=0 THEN 1130
1120 REM ** FUERZAS AXIALES          *****: A1=2: LOAD DC F"AXILES"
1130 REM ** FORMACION Y CONDENSACION
1140 REM   MATRIZ DE RIGIDEZ K=K(E)+K(G) *****: A1=3: LOAD DC F"MATRIG"
1150 REM ** ANALISIS MODAL CON ESPECTROS *****: A1=4: LOAD DC F"ANAMOD"
1160 END
1170 REM
1180 REM VARIABLES Y MATRICES DEL BLOQUE COMMON
1190 REM
1200 REM VARIABLES NUMERICAS
1210 REM
1220 REM A1      DIRECCIONAMIENTO EN EL PROGRAMA PRINCIPAL
1230 REM C0      TIPO DE ANALISIS
1240 REM E5      MODULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL
1250 REM H1      COEFICIENTE DE PONDERACION DE LA SOBRECARGA
1260 REM          EN LA MATRIZ DE MASAS
1270 REM H2      COEFICIENTE DE PONDERACION DE CONCARGA
1280 REM H3      COEFICIENTE DE PONDERACION DE SOBRECARGA
1290 REM H6      FACTOR DE REDUCCION POR AMORTIGUAMIENTO
1300 REM N1      NUMERO DE PISOS
1310 REM N2      NUMERO DE VANOS
1320 REM N4      NUMERO DE PUNTOS DEL ESPECTRO
1330 REM N5      NUMERO DE MODOS PARA LA SUPERPOSICION MODAL
1340 REM N6      NUMERO DE MODOS PARA IMPRESION DE RESULTADOS
1350 REM T7      NUMERO DE SOPORTES (N1*(N2+1))
1360 REM T8      NUMERO DE VIGAS (N1*N2)
1370 REM
1380 REM VARIABLES ALFANUMERICAS
1390 REM
1400 REM A#      NOMBRE DEL ESPECTRO DE RESPUESTA
1410 REM N#      FORMA DE COMBINACION DE MODOS
1420 REM
1430 REM VECTORES Y MATRICES
1440 REM
1450 REM H(15)    ALTURAS DE PLANTA Y LUCES DE VANOS
1460 REM N(40)    FUERZAS AXILES EN SOPORTES
1470 REM Q(30)    CONCARGA EN VIGAS
1480 REM S1(30)   SOBRECARGA EN VIGAS
1490 REM Y(70)    INERCIAS DE VIGAS Y SOPORTES

```

```

1000 REM *****
1010 REM ** SUBPROGRAMA "ESDAT" **
1020 REM ** ENTRADA/SALIDA DE DATOS **
1030 REM *****
1040 REM
1050 REM *** DATOS DEL PROBLEMA ****: GOSUB /2
1060 REM *** DATOS DEL ESPECTRO ****: GOSUB /4
1070 REM
1080 REM *** A PROGRAMA PRINCIPAL ****: LOAD DC F"ASER"
1090 REM
1100 REM *****
1110 REM ** ENTRADA DE DATOS DEL PROBLEMA **
1120 REM *****
1130 DEFFN/2
1140 SELECT PRINT 015(80); PRINT HEX(1B45); PRINT HEX(1B4C303132)
1150 SELECT PRINT 005(64); PRINT HEX(03)
1160 PRINT "DATOS DE LA ESTRUCTURA": PRINT
1170 J#="F"; INPUT "DATOS POR FICHERO O DIRECTOS (F/D)",J#
1180 IF J#="F" THEN 1600
1190 PRINT HEX(03)
1200 INPUT "DENOMINACION ",D#
1210 INPUT "NUMERO DE PLANTAS ",N1
1220 INPUT "NUMERO DE VANOS ",N2
1230 T8=N1*N2
1240 T7=N1*(N2+1)
1250 INPUT "MODULO DE ELASTICIDAD (T/M2)",E5
1260 PRINT HEX(03)
1270 PRINT HEX(03);TAB(10);"ALTURAS DE LAS PLANTAS (METROS) ": PRINT
1280 INPUT "PLANTA INICIAL,PLANTA FINAL,ALTURA",I1,I2,I3
1290 FOR I=I1 TO I2
1300 H(I)=I3
1310 NEXT I
1320 IF I2<N1 THEN 1280
1330 PRINT HEX(03);"LUCES DE LOS VANOS (METROS)": PRINT
1340 INPUT "VANO INICIAL, VANO FINAL, LUZ",I1,I2,I3
1350 FOR I=I1 TO I2
1360 H(N1+I)=I3
1370 NEXT I
1380 IF I2<N2 THEN 1340
1390 FOR I=1 TO N1
1400 PRINT HEX(03);TAB(20);"PLANTA";I: PRINT
1410 FOR J=1 TO N2
1420 PRINT "VIGA";J;"INERCIA (M4),CONCARGA (T/M),SOBRECARGA (T/M)";
1430 INPUT Y((I-1)*N2+J), Q((I-1)*N2+J), S1((I-1)*N2+J)
1440 NEXT J
1450 PRINT HEX(03): PRINT TAB(20);"PLANTA";I: PRINT
1460 FOR J=1 TO N2+1
1470 PRINT "SOPORTE";J;"INERCIA (M4)";
1480 INPUT Y(T8+(I-1)*(N2+1)+J)
1490 NEXT J
1500 NEXT I

```



```

1510 J#="S": INPUT "GRABADO DE DATOS (S/N) ",J#
1520 IF J#<>"S" THEN 1700
1530 PRINT TAB(5);"COLOCAR DISKETTE (DATOS ESTRUCTURA) EN UNIDAD F"
1540 PRINT : PRINT TAB(20);"PULSAR EXEC": INPUT J#
1550 SELECT #1 310
1560 DATA SAVE DC OPEN F#1,(10),D#
1570 DATA SAVE DC #1,N1,N2,H(),T8,T7,Y(),Q(),S1(),E5,N4
1580 DATA SAVE DC #1,END
1590 GOTO 1700
1600 SELECT PRINT 005(64): PRINT HEX(03)
1610 PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
1620 PRINT TAB(5);"COLOCAR DISKETTE (DATOS ESTRUCTURA) EN UNIDAD F"
1630 PRINT TAB(22);"PULSAR EXEC": INPUT J#
1640 PRINT HEX(03)
1650 INPUT "NOMBRE DEL FICHERO",D#
1660 SELECT #1 310
1670 DATA LOAD DC OPEN F#1,D#
1680 DATA LOAD DC #1,N1,N2,H(),T8,T7,Y(),Q(),S1(),E5,N4
1690 DSKIP #1,END
1700 J#="S": INPUT "IMPRESION DE DATOS (S/N) ",J#
1710 IF J#<>"S" THEN 2010
1720 REM
1730 REM ** SALIDA DE DATOS DEL PROBLEMA **
1740 REM
1750 SELECT PRINT 015(80): PRINT HEX(0C0A0A0E)
1760 PRINT "DATOS DEL PROBLEMA (";D#;")"
1770 FOR I=1 TO 21+LEN(D#): PRINT "*";: NEXT I: PRINT
1780 PRINT HEX(0F0A0A0A)
1790 PRINT " NUMERO DE PLANTAS....";N1
1800 PRINT " NUMERO DE VANDS.....";N2
1810 FOR I=1 TO N1
1820   PRINT HEX(0E0A0A0A);TAB(10);"PLANTA ";I
1830   PRINT "          -----";HEX(0F)
1840   PRINT HEX(0A);" ALTURA ...";H(I);"METROS": PRINT HEX(0A)
1850   PRINT " SOPORTES   INERCIAS.(M4)"
1860   PRINT "          -----"
1870   FOR J=T8+(I-1)*(N2+1)+1 TO T8+I*(N2+1)
1880     PRINT USING 1890,J,Y(J)
1890     %   ###   ##.#####
1900   NEXT J
1910   PRINT HEX(0A);"   VIGAS   INERCIAS (M4) LUCES (M) CONCARGA (T/M)
   SOBRECARGA (T/M)"
1920   PRINT " -----"
   "
1930   K4=0
1940   FOR J=(I-1)*N2+1 TO I*N2
1950     K4=K4+1
1960     PRINT USING 1970,J,Y(J),H(N1+K4),Q(J),S1(J)
1970     %   ###   ##.#####   ##.###   ##.###   ##.###
1980   NEXT J
1990 NEXT I

```

```

2000 PRINT HEX(0A0A0A);"MODULO DE ELASTICIDAD ";E5;" T/M2"
2010 SELECT PRINT 005(64): PRINT HEX(03)
2020 PRINT "CONDICIONES PARA EL ANALISIS": PRINT
2030 PRINT "TIPO DE ANALISIS A REALIZAR"
2040 PRINT "          ELASTICO LINEAL ..... 0"
2050 PRINT "          ELASTICO NO LINEAL ..... 1"
2060 INPUT "OPCION                                ",C0
2070 INPUT "NUMERO DE MODOS PARA SUPERPOSICION MODAL ",N5
2080 INPUT "NUMERO DE MODOS A IMPRIMIR EN RESULTADOS ",N6
2090 N$="RSC"
2100 PRINT "FORMA DE COMBINACION DE MODOS"
2110 PRINT "          SUMA DE CUADRADOS ..... RSC"
2120 PRINT "          SUMA DE VALORES ABSOLUTOS.  SVA"
2130 INPUT "OPCION                                ",N$
2140 INPUT "COEF. DE SOBRECARGA PARA MATRIZ DE MASAS ",H1
2150 INPUT "COEF. DE PONDERACION DE CONCARGA        ",H2
2160 INPUT "COEF. DE PONDERACION DE SOBRECARGA        ",H3
2170 SELECT PRINT 015(80): PRINT HEX(0C0A0A0E)
2180 J$="S": INPUT "IMPRESION DE DATOS (S/N) ",J$
2190 IF J$<>"S" THEN 2330
2200 PRINT "CONDICIONES PARA EL ANALISIS"
2210 PRINT "*****";HEX(0F)
2220 PRINT HEX(0A0A)
2230 PRINT "NUMERO DE MODOS UTILIZADOS";TAB(50);N5
2240 PRINT "FORMA DE COMBINACION DE MODOS";TAB(50);N$
2250 PRINT "ANALISIS ";
2260 IF C0=1 THEN 2290
2270 PRINT "ELASTICO LINEAL"
2280 GOTO 2300
2290 PRINT "ELASTICO NO LINEAL"
2300 PRINT "COEF. DE SOBRECARGA PARA MATRIZ DE MASAS ";TAB(50);H1
2310 PRINT "COEF. DE PONDERACION DE CONCARGA";TAB(50);H2
2320 PRINT "COEF. DE PONDERACION DE SOBRECARGA";TAB(50);H3
2330 RETURN
2340 REM *****
2350 REM ** ENTRADA DE DATOS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA **
2360 REM *****
2370 DEFFN/4
2380 SELECT PRINT 005(64): PRINT HEX(03)
2390 PRINT "DATOS DEL ESPECTRO DE RESPUESTA": PRINT
2400 J$="F": INPUT "DATOS POR FICHERO/NORMA O POR PUNTOS (F/P)",J$
2410 IF J$="F" THEN 2610
2420 PRINT HEX(03)
2430 INPUT "DENOMINACION ",A$
2440 INPUT "NUMERO DE PUNTOS DEL ESPECTRO",N4
2450 PRINT "INTRODUCIR PERIODO (SEG), VELOCIDAD (M/S) ": PRINT
2460 FOR I=1 TO N4
2470   PRINT "PUNTO";I;
2480   INPUT V(1,I), V(2,I)
2490 NEXT I

```

```

2500 J#="S": INPUT "GRABADO DE DATOS (S/N) ",J#
2510 IF J#<>"S" THEN 2840
2520 PRINT TAB(5);"COLOCAR DISKETTE (DATOS ESPECTRO) EN UNIDAD F"
2530 PRINT : PRINT TAB(20);"PULSAR EXEC"; INPUT J#
2540 REM
2550 SELECT #1 310
2560 DATA SAVE DC OPEN F#1,(10),A#
2570 DATA SAVE DC #1,N4
2580 DATA SAVE DC #1,V( )
2590 DATA SAVE DC #1,END
2600 GOTO 2840
2610 PRINT HEX(03)
2620 INPUT "NOMBRE DEL FICHERO/NORMA",A#
2630 IF A#="NORMA" THEN 2710
2640 REM
2650 SELECT #1 310
2660 DATA LOAD DC OPEN F#1,A#
2670 DATA LOAD DC #1,N4,V( )
2680 DSKIP #1,END
2690 REM
2700 GOTO 2850
2710 INPUT "GRADO DE INTENSIDAD",G
2720 V(1,1)=0
2730 V(2,1)=0
2740 V(1,2)=.5
2750 V(2,2)=.01*(2^(G-5)*(EXP(-#PI*.5)*(SIN(#PI*.5)-COS(#PI*.5))+1.3))
2760 V(1,3)=10
2770 V(2,3)=V(2,2)
2780 N4=3
2790 PRINT "FACTOR DE REDUCCION POR AMORTIGUAMIENTO"
2800 PRINT "          PLANTAS MUY SUBDIVIDIDAS .... 0.6"
2810 PRINT "          PLANTAS POCO SUBDIVIDIDAS ... 0.8"
2820 PRINT "          NO CONSIDERADO ..... 0.0"
2830 INPUT "VALOR",H6
2840 INPUT "FACTOR DE DUCTILIDAD DEL ESPECTRO REDUCIDO ",H5
2850 J#="S": INPUT "IMPRESION DE DATOS (S/N)",J#
2860 IF J#<>"S" THEN 3010
2870 IF A#<>"NORMA" THEN 2900
2880 PRINT "GRADO DE INTENSIDAD";TAB(50);G
2890 PRINT "FACTOR DE REDUCCION POR AMORTIGUAMIENTO";TAB(50);H6
2900 PRINT "FACTOR DE DUCTILIDAD DEL ESPECTRO REDUCIDO ";TAB(50);H5
2910 PRINT HEX(0A0A0A0E)
2920 PRINT "DATOS DEL ESPECTRO (";A#;)"
2930 FOR I=1 TO 21+LEN(A#): PRINT "*"; NEXT I: PRINT
2940 PRINT HEX(0F0A)
2950 PRINT " PUNTO PERIODO (SEG) VELOCIDAD (M/S)"
2960 PRINT " -----"
2970 FOR I=1 TO N4
2980 PRINT USING 2990,I,V(1,I),V(2,I)
2990 % ## ##.### ##.###
3000 NEXT I
3010 RETURN

```

```

1000 REM *****
1010 REM **      SUBPROGRAMA  "AXILES"      **
1020 REM **      CALCULO DE      **
1030 REM **      ESFUERZOS AXILES EN SOPORTES      **
1040 REM **      DEBIDOS A LAS CARGAS GRAVITATORIAS      **
1050 REM *****
1060 REM
1070 DIM M3(5),I3(11),M5(5,2)
1080 REM
1090 FOR I=N1 TO 1 STEP -1
1100   FOR J=1 TO N2+1
1110     IF J=N2+1 THEN 1140
1120     M3(J)=(H2*Q((I-1)*N2+J)+H3*S1((I-1)*N2+J))*H(N1+J)^2/12
1130     I3(J)=Y((I-1)*N2+J)/H(N1+J)
1140     I3(N2+J)=Y(T8+(I-1)*(N2+1)+J)/H(I)
1150   NEXT J
1160   IF C0=0 THEN 1460
1170   C1=2
1180   IF I<>N1 THEN 1200
1190   C1=1
1200   FOR J =1 TO N2+1
1210     M2,M3,R3=0
1220     R3=C1*I3(N2+J)
1230     IF J=N2+1 THEN 1270
1240     R3=R3+I3(J)
1250     M2=M3(J)
1260     IF J=1 THEN 1310
1270     R3=R3+I3(J-1)
1280     M3=M3(J-1)
1290     M5(J-1,2)=M3-(M3-M2)*I3(J-1)/R3
1300     IF J=N2+1 THEN 1320
1310     M5(J,1)=M2-(M2-M3)*I3(J)/R3
1320   NEXT J
1330   FOR J=1 TO N2+1
1340     P1=0
1350     IF J=N2+1 THEN 1380
1360     P1=(H2*Q((I-1)*N2+J)+H3*S1((I-1)*N2+J))*H(N1+J)/2+(M5(J,1)-M5
(J,2))/H(N1+J)
1370     IF J=1 THEN 1390
1380     P1=P1+(H2*Q((I-1)*N2+J-1)+H3*S1((I-1)*N2+J-1))*H(N1+J-1)/2+(M
5(J-1,2)-M5(J-1,1))/H(N1+J-1)
1390     IF I<>N1 THEN 1420
1400     N((I-1)*(N2+1)+J)=P1
1410     GOTO 1430
1420     N((I-1)*(N2+1)+J)=N(I*(N2+1)+J)+P1
1430   NEXT J
1440 NEXT I
1450 REM
1460 LOAD DC F"ASER"

```

```

1000 REM *****
1010 REM ** SUBPROGRAMA "MATRIG" **
1020 REM ** FORMACION SUBMATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA **
1030 REM ** CORRESPONDIENTE A LAS RIGIDECES AL GIRO **
1040 REM ** (SUMA MATRICES ELASTICA Y GEOMETRICA) **
1050 REM *****
1060 REM
1070 DIM K4(40,40)
1080 REM
1090 N=N1*(N2+1)
1100 MAT REDIM K4(N,N)
1110 MAT K4=ZER
1120 REM
1130 REM **** VIGAS
1140 REM
1150 FOR I=1 TO N1
1160 FOR J=1 TO N2
1170 P1=(I-1)*(N2+1)+J
1180 P2=P1+1
1190 P3=(I-1)*N2+J
1200 P5=4*E5*Y(P3)/H(N1+J)
1210 K4(P1,P1)=K4(P1,P1)+P5
1220 K4(P1,P2)=K4(P1,P2)+P5/2
1230 K4(P2,P1)=K4(P2,P1)+P5/2
1240 K4(P2,P2)=K4(P2,P2)+P5
1250 NEXT J
1260 NEXT I
1270 REM
1280 REM **** SOPORTES, RIGIDECES AL GIRO
1290 REM
1300 FOR I=1 TO N1
1310 FOR J=1 TO N2+1
1320 P1=T8+(I-1)*(N2+1)+J
1330 P3=(I-1)*(N2+1)+J
1340 P4=(I-2)*(N2+1)+J
1350 P5=2*E5*Y(P1)/H(I)
1360 P6=-C0*N(P1-T8)/H(I)
1370 IF I=1 THEN 1410
1380 K4(P4,P4)=K4(P4,P4)+2*P5+2*P6*H(I)*H(I)/15
1390 K4(P4,P3)=K4(P4,P3)+P5-P6*H(I)*H(I)/30
1400 K4(P3,P4)=K4(P3,P4)+P5-P6*H(I)*H(I)/30
1410 K4(P3,P3)=K4(P3,P3)+2*P5+2*P6*H(I)*H(I)/15
1420 NEXT J
1430 NEXT I
1440 REM
1450 SELECT #1 310
1460 SCRATCH F#1,"MATINV"
1470 DATA SAVE DC OPEN F#1,"MATINV","MATINV"
1480 DATA SAVE DC #1,K4()
1490 DATA SAVE DC #1,END
1500 REM
1510 LOAD DC F"INVMAT"

```

```

1000 REM      *****
1010 REM      **  PROGRAMA  "INVMAT"  **
1020 REM      **  INVERSION DE MATRICES  **
1030 REM      *****
1040 REM
1050 DIM V1(40),K4(40,40)
1060 REM
1070 N=N1*(N2+1)
1080 MAT REDIM K4(N,N)
1090 SELECT #1 310
1100 DATA LOAD DC OPEN F#1,"MATINV"
1110 DATA LOAD DC #1,K4()
1120 DSKIP #1,END
1130 FOR S=1 TO N
1140     FOR T=S TO N
1150         IF K4(T,S)<>0 THEN 1180
1160     NEXT T
1170     PRINT "MATRIZ SINGULAR": STOP
1180     FOR J=1 TO N
1190         B=K4(S,J)
1200         K4(S,J)=K4(T,J)
1210         K4(T,J)=B
1220     NEXT J
1230     V1(S)=T
1240     K4(S,S)=1/K4(S,S)
1250     FOR J=1 TO N
1260         IF J=S THEN 1280
1270         K4(S,J)=K4(S,S)*K4(S,J)
1280     NEXT J
1290     FOR T=1 TO N
1300         IF T=S THEN 1360
1310         B=-K4(T,S)
1320         K4(T,S)=0
1330         FOR J=1 TO N
1340             K4(T,J)=K4(T,J)+B*K4(S,J)
1350         NEXT J
1360     NEXT T
1370 NEXT S
1380 FOR S=N TO 1 STEP -1
1390     IF V1(S)=S THEN 1450
1400     FOR J=1 TO N
1410         B=K4(J,S)
1420         K4(J,S)=K4(J,V1(S))
1430         K4(J,V1(S))=B
1440     NEXT J
1450 NEXT S
1460 SELECT #1 310
1470 SCRATCH F#1,"MATINV"
1480 DATA SAVE DC OPEN F#1,"MATINV","MATINV"
1490 DATA SAVE DC #1,K4()
1500 DATA SAVE DC #1,END
1510 REM
1520 LOAD DC F"CONMAT"

```

```

1000 REM *****
1010 REM **          SUBPROGRAMA   "CONMAT"          **
1020 REM **   CONDENSACION DE GRADOS DE LIBERTAD   **
1030 REM **   (UN DESPLAZAMIENTO POR CADA PISO)    **
1040 REM *****
1050 REM
1060 DIM K1(10,40),K2(10,15),K4(40,40)
1070 REM
1080 N=N1*(N2+1)
1090 MAT REDIM K4(N,N)
1100 REM
1110 SELECT #1 310
1120 DATA LOAD DC OPEN F#1,"MATINV"
1130 DATA LOAD DC #1,K4(
1140 DSKIP #1,END
1150 REM
1160 L2=3
1170 IF N1>2 THEN 1190
1180 L2=2
1190 MAT REDIM K2(N1,L2*(N2+1))
1200 MAT K2=ZER
1210 FOR I=1 TO N1
1220     FOR J=1 TO N2+1
1230         P1=T8+(I-1)*(N2+1)+J
1240         P2=12*E5*Y(P1)/H(I)^3
1250         P6=-C0*N(P1-T8)/H(I)
1260         P8=J
1270         P7=N2+1+J
1280         P9=P7+N2+1
1290         IF I>1 THEN 1320
1300         P7=P8
1310         GOTO 1410
1320         IF I<>2 THEN 1350
1330         P9=P7
1340         P7=P8
1350         K2(I-1,P7)=K2(I-1,P7)+.5*P2*H(I)-P6*H(I)/10
1360         K2(I-1,P9)=K2(I-1,P9)+.5*P2*H(I)-P6*H(I)/10
1370         IF I<>2 THEN 1400
1380         P7=N2+1+J
1390         P9=P7+N2+1
1400         K2(I,P8)=K2(I,P8)-.5*P2*H(I)+P6*H(I)/10
1410         K2(I,P7)=K2(I,P7)-.5*P2*H(I)+P6*H(I)/10
1420     NEXT J
1430 NEXT I

```

```

1440 FOR I=1 TO N1
1450   FOR J=1 TO N1*(N2+1)
1460     K1(I,J)=0
1470     FOR L=1 TO L2*(N2+1)
1480       L1=L
1490       IF I=1 THEN 1530
1500       L1=L+(I-2)*(N2+1)
1510       IF I<N1 THEN 1530
1520       IF L>2*(N2+1) THEN 1540
1530       K1(I,J)=K1(I,J)+K2(I,L)*K4(L1,J)
1540     NEXT L
1550   NEXT J
1560 NEXT I
1570 FOR I=1 TO N1
1580   FOR J=1 TO N1
1590     K4(I,J)=0
1600     FOR L=1 TO L2*(N2+1)
1610       L1=L
1620       IF J=1 THEN 1660
1630       L1=L+(J-2)*(N2+1)
1640       IF J<N1 THEN 1660
1650       IF L>2*(N2+1) THEN 1670
1660       K4(I,J)=K4(I,J)+K1(I,L1)*K2(J,L)
1670     NEXT L
1680   NEXT J
1690 NEXT I
1700 MAT REDIM K1(N1,N1)
1710 MAT K1=ZER
1720 FOR I=1 TO N1
1730   FOR J=1 TO N2+1
1740     P1=T8+(I-1)*(N2+1)+J
1750     P2=12*E5*Y(P1)/H(I)^3
1760     P6=-C0*N(P1-T8)/H(I)
1770     IF I=1 THEN 1810
1780     K1(I-1,I-1)=K1(I-1,I-1)+P2+6*P6/5
1790     K1(I-1,I)=K1(I-1,I)-P2-6*P6/5
1800     K1(I,I-1)=K1(I,I-1)-P2-6*P6/5
1810     K1(I,I)=K1(I,I)+P2+6*P6/5
1820   NEXT J
1830 NEXT I
1840 FOR I=1 TO N1
1850   FOR J=1 TO N1
1860     K1(I,J)=K1(I,J)-K4(I,J)
1870   NEXT J
1880 NEXT I
1890 SELECT #1 310
1900 SCRATCH F#1,"MATCON"
1910 DATA SAVE DC OPEN F#1,"MATCON", "MATCON"
1920 DATA SAVE DC #1,K1()
1930 DATA SAVE DC #1,END
1940 REM
1950 LOAD DC F"ASER"

```



```

1000 REM *****
1010 REM **          SUBPROGRAMA "ANAMOD"          **
1020 REM ** ANALISIS MODAL CON ESPECTROS DE RESPUESTA **
1030 REM *****
1040 REM
1050 DIM M(10),A(10,14),S(10,10),W(10)
1060 DIM B(10,10),D(10,10),F(10),O(10),MS(10)
1070 REM
1080 REM *** FORMACION MATRIZ DE MASAS          ***** :GOSUB 6
1090 REM *** FORMACION MATRIZ DINAMICA          ***** :GOSUB 8
1100 REM *** VALORES Y VECTORES PROPIOS          ***** :GOSUB 10
1110 REM *** ANALISIS MODAL                      ***** :GOSUB 12
1120 REM
1130 REM *** A PROGRAMA PRINCIPAL                ***** :LOAD DC F"ASER"
1140 REM
1150 REM *****
1160 REM ** FORMACION MATRIZ DE MASAS **
1170 REM *****
1180 DEFFN 6
1190 FOR I=1 TO N1
1200   M(I)=0
1210   FOR J=1 TO N2
1220     M(I)=M(I)+(Q((I-1)*N2+J)+H1*S1((I-1)*N2+J))*H(N1+J)/9.82
1230   NEXT J
1240 NEXT I
1250 RETURN
1260 REM *****
1270 REM ** FORMACION MATRIZ DINAMICA **
1280 REM *****
1290 DEFFN 8
1300 MAT REDIM A(N1,N1)
1310 MAT A=ZER
1320 REM
1330 SELECT #1 310
1340 DATA LOAD DC OPEN F#1,"MATCON"
1350 DATA LOAD DC #1,A()
1360 DSKIP #1,END
1370 REM
1380 FOR I=1 TO N1
1390   FOR J=1 TO N1
1400     A(I,J)=A(I,J)/(SQR(M(I))*SQR(M(J)))
1410   NEXT J
1420 NEXT I
1430 RETURN

```

```

1440 REM *****
1450 REM ** ANALISIS MODAL **
1460 REM *****
1470 DEFFN/12
1480 REM
1490 REM **** TEST DE ORTOGONALIDAD
1500 REM
1510 PRINT HEX(0A0A0A0E);"TEST DE ORTOGONALIDAD"
1520 PRINT "*****":PRINT HEX(0F0A)
1530 PRINT "  MAYOR ERROR ABSOLUTO": PRINT HEX(0A)
1540 PRINT "  MODOS          ERROR "
1550 PRINT "  -----          -----": PRINT HEX(0A)
1560 C1=0
1570 FOR I=1 TO N6-1
1580   FOR J=I+1 TO N6
1590     O1=0
1600     FOR L=1 TO N1
1610       O1=O1+S(L,I)*M(L)*S(L,J)
1620     NEXT L
1630     IF ABS(O1)<=C1 THEN 1670
1640     C1=ABS(O1)
1650     I1=I
1660     J1=J
1670   NEXT J
1680 NEXT I
1690 PRINT USING 1700,I1,J1,C1
1700 % # Y #   -#.####^
1710 REM
1720 REM **** VALORES GENERALIZADOS
1730 REM
1740 MAT M8=ZER
1750 FOR I=1 TO 6
1760   FOR J=1 TO N1
1770     M8(I)=M8(I)+S(J,I)*M(J)*S(J,I)
1780   NEXT J
1790 NEXT I
1800 PRINT HEX(0A0A0A0E);"VALORES GENERALIZADOS"
1810 PRINT "*****";HEX(0F): PRINT HEX(0A)
1820 PRINT "  MODO          MASA          RIGIDEZ"
1830 PRINT "  ----          -"
1840 FOR I=1 TO N6
1850   PRINT USING 1860,I,M8(I),M8(I)*W(I)^2
1860   % #   ####.####   #####.####
1870 NEXT I

```

```

1880 REM
1890 REM **** FACTORES DE PARTICIPACION, VALORES MODALES MAXIMOS
1900 REM     Y COEFICIENTES SISMICOS
1910 REM
1920 FOR I=1 TO N6
1930     F(I)=0
1940     FOR J=1 TO N1
1950         F(I)=F(I)+S(J,I)*M(J)
1960     NEXT J
1970     F(I)=F(I)/M8(I)
1980 NEXT I
1990 PRINT HEX(0A0A0A0E);"FACTORES DE PARTICIPACION"
2000 PRINT HEX(0A);"Y VALORES MODALES MAXIMOS"
2010 PRINT "*****";HEX(0F): PRINT HEX(0A)
2020 PRINT " MODO F.P.DESP. DESP.MAXIMO MASA MODAL EF. CORT.MAX.BASE
COEF.SISMICO"
2030 PRINT " -----
-----"
2040 % ##     -##.####     -##.####     -###.####     -###.####     -#.##
##
2050 FOR I=1 TO N6
2060     GOSUB ^101(2*#PI/W(I))
2070     M1=F(I)*F(I)*M8(I)
2080     PRINTUSING 2090,I,F(I),F(I)*U/W(I),M1,M1*U*W(I),U*W(I)/9.82
2090 % #     -#.####     -#.####     -###.####     -###.####     -###
.####
2100 NEXT I
2110 REM
2120 REM **** DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS MODALES MAXIMAS
2130 REM
2140 FOR I=1 TO N6
2150     GOSUB ^101(2*#PI/W(I))
2160     P2=F(I)*U/W(I)
2170     FOR J=1 TO N1
2180         D(J,I)=S(J,I)*P2
2190         B(J,I)=M(J)*S(J,I)*W(I)^2*P2
2200     NEXT J
2210 NEXT I
2220 PRINT HEX(0A0A0A0E);"DESPLAZAMIENTOS MODALES MAXIMOS"
2230 PRINT "*****";HEX(0F): PRINT HEX(0A)
2240 % ##     -#.####     -#.####     -#.####     -#.####     -#.####     -#.##
##
2250 GOSUB ^121
2260 FOR I=1 TO N1
2270     PRINTUSING 2280,I;
2280     % ##
2290     FOR J=1 TO N6
2300         PRINTUSING 2310,D(I,J);
2310         %     -#.####
2320     NEXT J
2330 PRINT
2340 NEXT I

```

```

2350 REM
2360 REM **** FUERZAS MODALES MAXIMAS
2370 REM
2380 PRINT HEX(0A0A0A0E);"FUERZAS MODALES MAXIMAS"
2390 PRINT "*****";PRINT HEX(0F0A)
2400 %  ##      -###.####  -###.####  -###.####  -###.####  -###.####  -###.##
##
2410 GOSUB '121
2420 FOR I=1 TO N1
2430     PRINT USING 2440,I;
2440     %  ##
2450     FOR J=1 TO N6
2460         PRINT USING 2470,B(I,J);
2470         %  -#.####
2480     NEXT J
2490     PRINT
2500 NEXT I
2510 REM
2520 REM **** DESPLAZAMIENTOS TOTALES MAXIMOS MAS PROBABLES
2530 REM
2540 PRINT HEX(0A0A0A0E);"DESPLAZAMIENTOS TOTALES MAXIMOS"
2550 PRINT HEX(0A);"MAS PROBABLES(";N5;"MODOS) ";N6
2560 PRINT "*****";HEX(0F)
2570 FOR I=1 TO N1
2580     C1=0
2590     FOR J=1 TO N5
2600         C1=C1+D(I,J)^2
2610     NEXT J
2620     D(I,5)=SQR(C1)
2630 NEXT I
2640 PRINT HEX(0A)
2650 PRINT " PLANTA     ABSOLUTO     RELATIVO(M)     RELATIVO(D/H)"
2660 PRINT " -----     -----     -----     -----"
2670 FOR I=1 TO N1
2680     IF I>1 THEN 2710
2690     D1=D(I,5)
2700     GOTO 2720
2710     D1=D(I,5)-D(I-1,5)
2720     PRINT USING 2730,I,D(I,5),D1,D1/H(I)
2730     %  ##      -#.####      -#.####      -#.####
2740 NEXT I
2750 FOR I=N1-1 TO 1 STEP -1
2760     FOR J=1 TO N6
2770         B(I,J)=B(I,J)+B(I+1,J)
2780     NEXT J
2790 NEXT I

```

```

2800 REM
2810 REM **** CORTANTES MODALES MAXIMOS
2820 REM
2830 PRINT HEX(0A0A0A0E);"CORTANTES MODALES MAXIMOS"
2840 PRINT "*****";HEX(0F): PRINT HEX(0A)
2850 GOSUB '121
2860 FOR I=1 TO N1
2870   PRINTUSING 2880,I;
2880   %   ##
2890   FOR J=1 TO N6
2900     PRINTUSING 2910,B(I,J);
2910     %   -#.####
2920   NEXT J
2930   PRINT
2940 NEXT I
2950 REM
2960 REM **** CORTANTES MODALES MAXIMOS MAS PROBABLES
2970 REM
2980 M1=1
2990 IF N#="SVA" THEN 3010
3000 M1=2
3010 FOR I=1 TO N1
3020   C1=0
3030   FOR J=1 TO N5
3040     C1=C1+(ABS(B(I,J))^M1)
3050   NEXT J
3060   B(I,5)=C1^(1/M1)
3070 NEXT I
3080 REM
3090 REM **** ACCIONES DE PLANTA
3100 REM
3110 B(N1,6)=B(N1,5)
3120 FOR I=1 TO N1-1
3130   B(I,6)=B(I,5)-B(I+1,5)
3140 NEXT I
3150 REM
3160 REM **** MOMENTOS DE VUELCO MAS PROBABLES
3170 REM
3180 FOR I=N1 TO 1 STEP -1
3190   C1=0
3200   FOR J=1 TO N5
3210     C1=C1+B(I,J)^2
3220   NEXT J
3230   O(I)=SQR(C1)*H(I)
3240   IF I=N1 THEN 3260
3250   O(I)=O(I)+O(I+1)
3260 NEXT I
3270 PRINT HEX(0A0A0A0E);"VALORES MAS PROBABLES(";N5;"MODOS) ";N#
3280 PRINT "*****";HEX(0F)
3290 PRINT HEX(0A);" PLANTA   CORTANTE(T)   ACCION DE P.   MOM.VUELCO"
3300 PRINT " -----"
3310 FOR I=1 TO N1
3320   PRINTUSING 3330,I,B(I,5),B(I,6),O(I)
3330   %   ##       ####.####       ####.####       #####.####
3340 NEXT I
3350 RETURN

```

```

3360 REM *****
3370 REM ** FRECUENCIAS Y MODOS DE VIBRACION **
3380 REM *****
3390 DEFFN'10
3400 E3=0.001
3410 MAT REDIM S(N1,N1)
3420 MAT S=IDN
3430 I1=0
3440 FOR I=2 TO N1
3450   FOR J=1 TO I-1
3460     I1=I1+2*A(I,J)*A(I,J)
3470   NEXT J
3480 NEXT I
3490 L4=SQR(I1)
3500 L5=L4
3510 L4=L4/N1
3520 FOR Q=2 TO N1
3530   FOR P=1 TO Q-1
3540     IF ABS(A(P,Q))<=L4 THEN 3850
3550     I2=1
3560     V1=A(P,P)
3570     V2=A(P,Q)
3580     V3=A(Q,Q)
3590     M1=(V1-V3)*.5
3600     IF M1<>0 THEN 3630
3610     W1=-1
3620     GOTO 3640
3630     W1=-SGN(M1)*V2/SQR(V2^2+M1^2)
3640     L1=W1/SQR(2*(1+SQR(1-W1/2)))
3650     L2=L1^2
3660     C1=SQR(1-L2)
3670     C2=C1^2
3680     L3=L1*C1
3690     FOR I=1 TO N1
3700       I1=A(I,P)*C1-A(I,Q)*L1
3710       A(I,Q)=A(I,P)*L1+A(I,Q)*C1
3720       A(I,P)=I1
3730       I1=S(I,P)*C1-S(I,Q)*L1
3740       S(I,Q)=S(I,P)*L1+S(I,Q)*C1
3750       S(I,P)=I1
3760     NEXT I
3770     FOR I=1 TO N1
3780       A(P,I)=A(I,P)
3790       A(Q,I)=A(I,Q)
3800     NEXT I
3810     A(P,P)=V1*C2+V3*L2-2*V2*L3
3820     A(Q,Q)=V1*L2+V3*C2+2*V2*L3
3830     A(P,Q)=(V1-V3)*L3+V2*(C2-L2)
3840     A(Q,P)=A(P,Q)
3850   NEXT P
3860 NEXT Q

```

```

3870 IF I2<>1 THEN 3900
3880 I2=0
3890 GOTO 3520
3900 IF L4>(E3/N1)*L5 THEN 3510
3910 FOR I=1 TO N1
3920   FOR J=1 TO N1
3930     S(I,J)=S(I,J)/SQR(M(I))
3940   NEXT J
3950 NEXT I
3960 REM
3970 REM **** ORDENACION VALORES PROPIOS DE MENOR A MAYOR
3980 REM
3990 FOR I=1 TO N1-1
4000   FOR J=I+1 TO N1
4010     IF A(J,J)>A(I,I) THEN 4060
4020     I1=A(I,I): A(I,I)=A(J,J): A(J,J)=I1
4030     FOR L=1 TO N1
4040       I1=S(L,I): S(L,I)=S(L,J): S(L,J)=I1
4050     NEXT L
4060   NEXT J
4070 NEXT I
4080 SELECT PRINT 015(85): PRINT HEX(0C)
4090 PRINT HEX(0A0A0A0A0A0E);"VALORES PROPIOS"
4100 PRINT "*****";HEX(0F): PRINT HEX(0A)
4110 PRINT " MODO VALOR PROPIO FREQ.(RAD/SEG) FREQ.(CIC/SEG) PERIODO(SEG
)"
4120 PRINT " -----"
-"
4130 FOR I=1 TO N1
4140   W(I)=SQR(A(I,I))
4150   T=2*#PI/W(I)
4160   PRINT USING 4170,I,A(I,I),W(I),1/T,T
4170   % ## #####.#### #####.####   ###.####   ###.####
4180 NEXT I
4190 FOR J=1 TO N6
4200   M9=0
4210   FOR I=1 TO N1
4220     IF ABS(S(I,J))<ABS(M9) THEN 4240
4230     M9=S(I,J)
4240   NEXT I
4250   FOR I=1 TO N1
4260     S(I,J)=S(I,J)/M9
4270   NEXT I
4280 NEXT J

```

```

4290 PRINT HEX(0A0A0A0E);"VECTORES PROPIOS"
4300 PRINT "*****";HEX(0F): PRINT HEX(0A)
4310 GOSUB '121
4320 %  ##      -##.####  -##.####  -##.####  -##.####  -##.####  -##.##
##
4330 FOR I=1 TO N1
4340   PRINTUSING 4350,I;
4350   %  ##
4360   FOR J=1 TO N6
4370     PRINTUSING 4380,S(I,J);
4380     %  -#.####
4390   NEXT J
4400   PRINT
4410 NEXT I
4420 RETURN
4430 REM *****
4440 REM ** VELOCIDAD ESPECTRAL PARA UN PERIODO K5 **
4450 REM *****
4460 DEFFN'101(K5)
4470 K1=0
4480 C1=1
4490 IF A#(">"NORMA" THEN 4590
4500 IF H6=0 THEN 4590
4510 IF K5>0.25 THEN 4540
4520 C1=H6/((0.25)^(1/3))
4530 GOTO 4550
4540 C1=H6/((K5)^(1/3))
4550 IF C1<=1 THEN 4570
4560 C1=1
4570 IF C1>=0.5 THEN 4590
4580 C1=0.5
4590 K1=K1+1
4600 IF K1=1 THEN 4620
4610 IF K1>N4 THEN 4650
4620 IF K5>V(1,K1) THEN 4590
4630 U=C1*(V(2,K1-1)+(K5-V(1,K1-1))*(V(2,K1)-V(2,K1-1))/(V(1,K1)-V(1,K1-1)))
4640 RETURN
4650 PRINT "PERIODO ";K5;"SUPERIOR AL MAXIMO DEL ESPECTRO";V(1,K1-1);"SE
G.":STOP
4660 DEFFN'121
4670 PRINT " PLANTA ";
4680 FOR J=1 TO N6
4690   PRINT "   MODO";J;
4700 NEXT J
4710 PRINT
4720 PRINT " -----";
4730 FOR J=1 TO N6
4740   PRINT "   -----";
4750 NEXT J
4760 PRINT
4770 RETURN

```



Referencias

1. MARTI, P., *Optimización de Estructuras Sismorresistentes teniendo en cuenta el comportamiento no lineal*, Tesis Doctoral, ETSII UPV, Valencia, Abril 1982.



## Capítulo 8

### EJEMPLOS DE ANALISIS SISMICO CON ESPECTROS DE RESPUESTA

#### 8.1. INTRODUCCION

En este capítulo se realiza el análisis sísmico con espectros de respuesta de dos estructuras, empleando el programa "ASER", del capítulo anterior.

Aunque el programa no impone esta limitación, las dos estructuras analizadas corresponden a diseños con estructura metálica, por lo que los valores obtenidos (periodos, modos de vibración, coeficientes sísmicos, desplazamientos, etc.), son representativos de este tipo de estructuras.

Con estos ejemplos se ha pretendido, por una parte poner la forma de empleo del programa y por otra, dar unos resultados que se puedan comparar con otros procedimientos.

En el primer ejemplo se emplea un espectro construido a partir del grado de intensidad y factor de amortiguamiento de la Norma PDS-1 (1974), mientras que en el segundo se emplea un espectro construido a partir de los valores máximos esperados del movimiento del suelo.

#### 8.2. ESTRUCTURA DE 10 PLANTAS Y 3 VANOS IGUALES

En este apartado se analiza una estructura de 10 plantas y 3 vanos, con alturas y luces iguales en todas las plantas.

Las inercias de la estructura que se analiza, corresponden a los perfiles metálicos (HEB en soportes, IPE en vigas) obtenidos al diseñar la estructura con las acciones gravitatorias y de viento del apartado 8.2.1., con los coeficientes de ponderación de la Norma MV-103 y las acciones sísmicas de la Norma PDS-1 (1974).

De los dos casos analizados, el primero emplea únicamente la matriz de rigidez elástica, mientras que en el segundo se incluye también

la matriz de rigidez geométrica, con el fin de ver las diferencias en periodos, formas de los modos y desplazamientos máximos.

El diseño completo de esta estructura, así como la influencia en el mismo de las masas, sobrecargas, efecto de rigidización de las vigas por el forjado, etc., pueden verse en la referencia (2).

### 8.2.1. Geometría y acciones

Las dimensiones de la estructura a analizar son las de la figura 1.

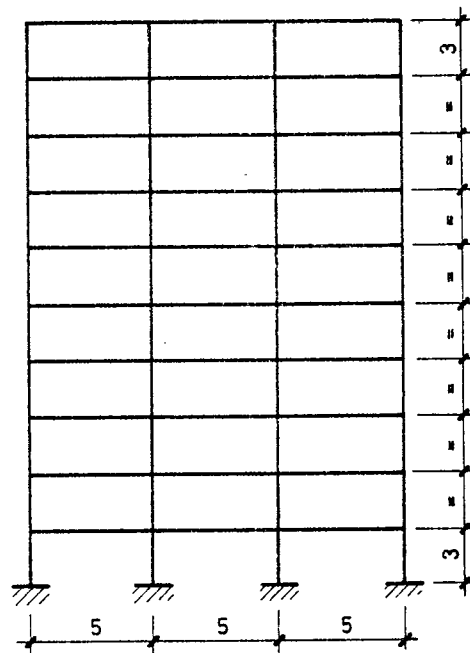


Figura 1

Estructura de 10 plantas y 3 vanos iguales

Las acciones adoptadas, para una separación entre pórticos de 5 metros, son:

Concarga:

- En azotea ..... 1,500 T/m
- Resto de plantas ... 1,500 T/m

Sobrecarga:

- En azotea ..... 1,125 T/m
- Resto de plantas ... 1,500 T/m

Viento:

- NTE-ECV (1973), zona X, situación normal

### 8.2.2. Espectro de respuesta

El espectro que se va a emplear es el adoptado por la Norma PDS-1 (1974), para un grado de intensidad 9 y un factor de reducción por amortiguamiento de 0,8. A partir del grado de intensidad (G), sin considerar el factor de amortiguamiento (B), el espectro de velocidades viene definido por:

- Para periodos menores de 0,5 segundos, variación lineal desde velocidad cero (para periodo cero), hasta la velocidad dada por la expresión:

$$S_v = 0,01 [2^{(G-5)} e^{-0,5\pi} (\text{sen}(0,5\pi) - \text{cos}(0,5\pi)) + 1,3]$$

- Para periodos superiores a 0,5 segundos, se mantiene constante el valor anterior.

Sustituyendo el valor del grado de intensidad (G) en la expresión anterior, se obtiene un valor de 0,241 m/s. De acuerdo con esto, los datos del espectro de velocidades a introducir en el programa, son los de la tabla 1.

<u>Periodo (seg)</u>	<u>Velocidad (m/s)</u>
0,00	0,000
0,50	0,241
10,00	0,241

Tabla 1

Valores del espectro de respuesta de velocidades

Puesto que el factor de respuesta ( $\beta$ ) depende del factor de amortiguamiento y del periodo del modo de vibración considerado, según la ecuación:

$$\beta = \frac{B}{\sqrt[3]{T}}$$

su influencia en el espectro de respuesta se introduce posteriormente, obteniendo la velocidad espectral como producto del factor de respuesta por los valores obtenidos de la tabla 1.

Puesto que este espectro es ya un espectro reducido, el factor de ductilidad que aparece en los listados, se ha dado a nivel informativo, ya que no influye de ninguna manera en la determinación del espectro.

### 8.2.3 Condiciones para el análisis

Para la formación de la matriz de masas, se emplea el 100% de la concarga, mas el 50% de la sobrecarga de cada planta.

En el segundo caso, para el cálculo de las matrices de rigidez geométricas de los soportes, se emplean las fuerzas axiales correspondientes al total de la concarga, mas la sobrecarga multiplicada por un coeficiente de 1,4.

Para la obtención de los valores máximos mas probables, se emplea la regla de suma de cuadrados, empleando las respuestas máximas de los tres primeros modos.

### 8.2.4. Listados de entrada de datos y salida de resultados

Se incluyen a continuación los listados correspondientes a los datos y los resultados obtenidos en cada uno de los dos casos analizados.

DATOS DEL PROBLEMA (10P-3V-N)

\*\*\*\*\*

NUMERO DE PLANTAS..... 10  
 NUMERO DE VANOS..... 3

PLANTA 1

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES	INERCIA(S).(M4)
31	0.00019270
32	0.00025166
33	0.00025166
34	0.00019270

VIGAS	INERCIA(S) (M4)	LUCE(S) (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
1	0.00033740	5.000	1.500	1.500
2	0.00033740	5.000	1.500	1.500
3	0.00033740	5.000	1.500	1.500

PLANTA 2

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES	INERCIA(S).(M4)
35	0.00014919
36	0.00019270
37	0.00019270
38	0.00014919

VIGAS	INERCIA(S) (M4)	LUCE(S) (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
4	0.00033740	5.000	1.500	1.500
5	0.00033740	5.000	1.500	1.500
6	0.00033740	5.000	1.500	1.500

### PLANTA 3

-----

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
39	0.00011259
40	0.00019270
41	0.00019270
42	0.00011259

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
7	0.00023130	5.000	1.500	1.500
8	0.00023130	5.000	1.500	1.500
9	0.00023130	5.000	1.500	1.500

### PLANTA 4

-----

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
43	0.00008091
44	0.00019270
45	0.00019270
46	0.00008091

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
10	0.00023130	5.000	1.500	1.500
11	0.00023130	5.000	1.500	1.500
12	0.00023130	5.000	1.500	1.500



**PLANTA 5**

-----

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

-----

47	0.00008091
48	0.00014919
49	0.00014919
50	0.00008091

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

-----

13	0.00023130	5.000	1.500	1.500
14	0.00023130	5.000	1.500	1.500
15	0.00023130	5.000	1.500	1.500

**PLANTA 6**

-----

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

-----

51	0.00005696
52	0.00011259
53	0.00011259
54	0.00005696

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

-----

16	0.00016270	5.000	1.500	1.500
17	0.00016270	5.000	1.500	1.500
18	0.00016270	5.000	1.500	1.500

PLANTA 7  
-----

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

55	0.00003831
56	0.00008091
57	0.00008091
58	0.00003831

VIGAS      INERCIAS (M4)    LUCES (M)    CONCARGA (T/M)    SOBRECARGA (T/M)

19	0.00011770	5.000	1.500	1.500
20	0.00011770	5.000	1.500	1.500
21	0.00011770	5.000	1.500	1.500

PLANTA 8  
-----

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

59	0.00003831
60	0.00005696
61	0.00005696
62	0.00003831

VIGAS      INERCIAS (M4)    LUCES (M)    CONCARGA (T/M)    SOBRECARGA (T/M)

22	0.00011770	5.000	1.500	1.500
23	0.00011770	5.000	1.500	1.500
24	0.00011770	5.000	1.500	1.500

PLANTA 9

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

63	0.00002492
64	0.00003831
65	0.00003831
66	0.00002492

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

25	0.00008360	5.000	1.500	1.500
26	0.00008360	5.000	1.500	1.500
27	0.00008360	5.000	1.500	1.500

PLANTA 10

ALTURA ... 3 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

67	0.00001509
68	0.00001509
69	0.00001509
70	0.00001509

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

28	0.00003890	5.000	1.500	1.125
29	0.00003890	5.000	1.500	1.125
30	0.00003890	5.000	1.500	1.125

MODULO DE ELASTICIDAD 21000000 T/M2

## CONDICIONES PARA EL ANALISIS

\*\*\*\*\*

NUMERO DE MODOS UTILIZADOS	3
FORMA DE COMBINACION DE MODOS	RSC
ANALISIS ELASTICO LINEAL	
COEF. DE SOBRECARGA PARA MATRIZ DE MASAS	.5
COEF. DE PONDERACION DE CONCARGA	1
COEF. DE PONDERACION DE SOBRECARGA	1.5
GRADO DE INTENSIDAD	9
FACTOR DE REDUCCION POR AMORTIGUAMIENTO	.8
FACTOR DE DUCTILIDAD DEL ESPECTRO REDUCIDO	4

## DATOS DEL ESPECTRO (NORMA)

\*\*\*\*\*

PUNTO	PERIODO (SEG)	VELOCIDAD (M/S)
1	0.000	0.000
2	0.500	0.241
3	10.000	0.241

VALORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

MODO	VALOR PROPIO	FREC.(RAD/SEG)	FREC.(CIC/SEG)	PERIODO(SEG)
1	13.7803	3.7121	0.5908	1.6925
2	79.0033	8.8883	1.4146	0.7068
3	201.5316	14.1961	2.2593	0.4425
4	413.5145	20.3350	3.2364	0.3089
5	704.7786	26.5476	4.2251	0.2366
6	1145.1460	33.8400	5.3858	0.1856
7	1743.2595	41.7523	6.6450	0.1504
8	2633.6737	51.3193	8.1677	0.1224
9	4089.5303	63.9494	10.1778	0.0982
10	6059.9844	77.8459	12.3895	0.0807

VECTORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	0.0452	-0.1014	0.1854	0.2793	-0.4117	-0.4543
2	0.1184	-0.2576	0.4447	0.6066	-0.7781	-0.6861
3	0.2029	-0.4138	0.6295	0.6704	-0.5548	-0.1066
4	0.2959	-0.5456	0.6630	0.3766	0.1750	0.6602
5	0.3909	-0.6193	0.4871	-0.1776	0.7958	0.5210
6	0.4996	-0.6060	0.0633	-0.7196	0.5521	-0.5994
7	0.6299	-0.4493	-0.5405	-0.6826	-0.6325	-0.5975
8	0.7581	-0.1387	-0.9080	0.1890	-0.8104	1.0000
9	0.8803	0.3374	-0.5620	1.0000	1.0000	-0.5170
10	1.0000	1.0000	1.0000	-0.5417	-0.3085	0.1062

TEST DE ORTOGONALIDAD

\*\*\*\*\*

MAYOR ERROR ABSOLUTO

MODOS	ERROR
1 Y 3	4.1700E-10

## VALORES GENERALIZADOS

\*\*\*\*\*

MODO	MASA	RIGIDEZ
1	11.0346	152.0615
2	8.7583	691.9406
3	12.5751	2534.2869
4	11.5398	4771.8863
5	14.4215	10163.9840
6	11.6511	13342.3108

## FACTORES DE PARTICIPACION

## Y VALORES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

MODO	F.P.DESP.	DESP.MAXIMO	MASA MODAL EF.	CORT.MAX.BASE	COEF.SISMICO
1	1.4757	0.0643	24.0326	14.4486	0.0612
2	-0.7369	-0.0179	4.7564	9.1600	0.1961
3	0.3769	0.0056	1.7871	5.4191	0.3087
4	0.3113	0.0022	1.1187	3.3919	0.3087
5	-0.2258	-0.0009	0.7354	2.2296	0.3087
6	-0.2013	-0.0005	0.4722	1.4317	0.3087

## DESPLAZAMIENTOS MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	0.0029	0.0018	0.0010	0.0006	0.0003	0.0002
2	0.0076	0.0046	0.0025	0.0013	0.0007	0.0003
3	0.0130	0.0074	0.0035	0.0015	0.0005	0.0000
4	0.0190	0.0098	0.0037	0.0008	-0.0001	-0.0003
5	0.0251	0.0111	0.0027	-0.0004	-0.0007	-0.0002
6	0.0321	0.0108	0.0003	-0.0016	-0.0005	0.0003
7	0.0405	0.0080	-0.0030	-0.0015	0.0006	0.0003
8	0.0488	0.0024	-0.0051	0.0004	0.0007	-0.0005
9	0.0566	-0.0060	-0.0031	0.0022	-0.0009	0.0002
10	0.0643	-0.0179	0.0056	-0.0012	0.0002	-0.0000

## FUERZAS MODALES MAXIMAS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	0.1379	0.4947	0.7285	0.9062	0.9688	0.9530
2	0.3612	1.2564	1.7469	1.9681	1.8310	1.4394
3	0.6187	2.0185	2.4730	2.1751	1.3056	0.2237
4	0.9023	2.6616	2.6043	1.2219	-0.4119	-1.3850
5	1.1920	3.0211	1.9137	-0.5763	-1.8726	-1.0929
6	1.5235	2.9561	0.2489	-2.3349	-1.2992	1.2574
7	1.9210	2.1917	-2.1234	-2.2146	1.4884	1.2535
8	2.3118	0.6767	-3.5669	0.6132	1.9069	-2.0977
9	2.6846	-1.6460	-2.2077	3.2443	-2.3530	1.0845
10	2.7952	-4.4711	3.6007	-1.6111	0.6656	-0.2043

## DESPLAZAMIENTOS TOTALES MAXIMOS

MAS PROBABLES ( 3 MODOS ) RSC

\*\*\*\*\*

PLANTA	ABSOLUTO	RELATIVO(M)	RELATIVO(D/H)
1	0.0035	0.0035	0.0011
2	0.0092	0.0056	0.0018
3	0.0154	0.0061	0.0020
4	0.0217	0.0063	0.0021
5	0.0276	0.0059	0.0019
6	0.0339	0.0063	0.0021
7	0.0414	0.0075	0.0025
8	0.0491	0.0076	0.0025
9	0.0570	0.0079	0.0026
10	0.0670	0.0099	0.0033

## CORTANTES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	14.4486	9.1600	5.4181	3.3919	2.2296	1.4317
2	14.3107	8.6652	4.6895	2.4856	1.2608	0.4786
3	13.9495	7.4087	2.9426	0.5175	-0.5701	-0.9607
4	13.3307	5.3902	0.4695	-1.6576	-1.8758	-1.1845
5	12.4283	2.7285	-2.1347	-2.8795	-1.4638	0.2004
6	11.2363	-0.2925	-4.0485	-2.3032	0.4088	1.2934
7	9.7127	-3.2487	-4.2974	0.0316	1.7080	0.0360
8	7.7916	-5.4404	-2.1739	2.2464	0.2195	-1.2175
9	5.4798	-6.1171	1.3929	1.6331	-1.6874	0.8801
10	2.7952	-4.4711	3.6007	-1.6111	0.6656	-0.2043

## VALORES MAS PROBABLES( 3 MODOS) RSC

\*\*\*\*\*

PLANTA	CORTANTE(T)	ACCION DE P.	MOM.VUELCO
1	17.9450	0.5704	378.5781
2	17.3745	1.3078	324.7430
3	16.0666	1.6797	272.6193
4	14.3869	1.4847	224.4193
5	12.9021	0.9551	181.2586
6	11.9469	0.8402	142.5520
7	11.1067	1.3581	106.7111
8	9.7485	1.4185	73.3910
9	8.3299	1.9448	44.1453
10	6.3851	6.3851	19.1553



CONDICIONES PARA EL ANALISIS

\*\*\*\*\*

NUMERO DE MODOS UTILIZADOS	3
FORMA DE COMBINACION DE MODOS	RSC
ANALISIS ELASTICO NO LINEAL	
COEF. DE SOBRECARGA PARA MATRIZ DE MASAS	.5
COEF. DE PONDERACION DE CONCARGA	1
COEF. DE PONDERACION DE SOBRECARGA	1.5

GRADO DE INTENSIDAD	9
FACTOR DE REDUCCION POR AMORTIGUAMIENTO	.8
FACTOR DE DUCTILIDAD DEL ESPECTRO REDUCIDO	4

DATOS DEL ESPECTRO (NORMA)

\*\*\*\*\*

PUNTO	PERIODO (SEG)	VELOCIDAD (M/S)
-----	-----	-----
1	0.000	0.000
2	0.500	0.241
3	10.000	0.241

## VALORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

MOD0	VALOR PROPIO	FREC.(RAD/SEG)	FREC.(CIC/SEG)	PERIODO(SEG)
1	12.6816	3.5611	0.5667	1.7643
2	73.4664	8.5712	1.3641	0.7330
3	188.3230	13.7230	2.1840	0.4578
4	388.7830	19.7175	3.1381	0.3186
5	664.6374	25.7805	4.1031	0.2437
6	1085.8208	32.9517	5.2444	0.1906
7	1661.2550	40.7584	6.4869	0.1541
8	2521.1372	50.2109	7.9913	0.1251
9	3940.7765	62.7756	9.9910	0.1000
10	5864.8712	76.5824	12.1884	0.0820

## VECTORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	0.0443	-0.1017	0.1805	0.2813	-0.4059	-0.4521
2	0.1174	-0.2614	0.4373	0.6163	-0.7737	-0.6875
3	0.2024	-0.4219	0.6211	0.6811	-0.5490	-0.1026
4	0.2961	-0.5571	0.6537	0.3781	0.1806	0.6640
5	0.3915	-0.6312	0.4771	-0.1874	0.7906	0.5099
6	0.5008	-0.6145	0.0528	-0.7332	0.5305	-0.6128
7	0.6326	-0.4492	-0.5483	-0.6790	-0.6449	-0.5758
8	0.7613	-0.1301	-0.9011	0.2097	-0.7807	1.0000
9	0.8826	0.3480	-0.5389	1.0000	1.0000	-0.5284
10	1.0000	1.0000	1.0000	-0.5529	-0.3152	0.1108

## TEST DE ORTOGONALIDAD

\*\*\*\*\*

MAYOR ERROR ABSOLUTO

MODOS	ERROR
1 Y 3	3.0200E-10

VALORES GENERALIZADOS

\*\*\*\*\*

MODO	MASA	RIGIDEZ
1	11.0817	140.5347
2	8.9349	656.4223
3	12.3295	2321.9441
4	11.7682	4575.2862
5	14.1625	9412.9817
6	11.6384	12637.2268

FACTORES DE PARTICIPACION

Y VALORES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

MODO	F.P.DESP.	DESP.MAXIMO	MASA MODAL EF.	CORT.MAX.BASE	COEF.SISMICO
1	1.4719	0.0660	24.0105	13.6574	0.0579
2	-0.7318	-0.0182	4.7857	8.7806	0.1368
3	0.3766	0.0060	1.7488	5.3021	0.3087
4	0.3096	0.0024	1.1280	3.4199	0.3087
5	-0.2284	-0.0010	0.7394	2.2417	0.3087
6	-0.2019	-0.0005	0.4746	1.4391	0.3087

DESPLAZAMIENTOS MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	0.0029	0.0018	0.0010	0.0006	0.0004	0.0002
2	0.0077	0.0047	0.0026	0.0014	0.0008	0.0003
3	0.0133	0.0077	0.0037	0.0016	0.0005	0.0000
4	0.0195	0.0101	0.0039	0.0009	-0.0001	-0.0003
5	0.0258	0.0115	0.0028	-0.0004	-0.0008	-0.0002
6	0.0330	0.0112	0.0003	-0.0017	-0.0005	0.0003
7	0.0417	0.0082	-0.0033	-0.0016	0.0006	0.0003
8	0.0502	0.0023	-0.0054	0.0005	0.0008	-0.0005
9	0.0582	-0.0063	-0.0032	0.0024	-0.0010	0.0002
10	0.0660	-0.0182	0.0060	-0.0013	0.0003	-0.0000

## FUERZAS MODALES MAXIMAS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	0.1274	0.4697	0.7083	0.9075	0.9664	0.9513
2	0.3379	1.2063	1.7164	1.9884	1.8421	1.4467
3	0.5826	1.9472	2.4377	2.1973	1.3072	0.2160
4	0.8523	2.5710	2.5653	1.2199	-0.4301	-1.3973
5	1.1265	2.9130	1.8726	-0.6047	-1.8823	-1.0730
6	1.4412	2.8360	0.2074	-2.3653	-1.2631	1.2695
7	1.8205	2.0731	-2.1517	-2.1905	1.5356	1.2118
8	2.1909	0.6007	-3.5363	0.6765	1.8588	-2.1043
9	2.5399	-1.6063	-2.1149	3.2259	-2.3808	1.1121
10	2.6377	-4.2303	3.5972	-1.6352	0.6879	-0.2138

## DESPLAZAMIENTOS TOTALES MAXIMOS

## MAS PROBABLES( 3 MODOS) RSC

\*\*\*\*\*

PLANTA	ABSOLUTO	RELATIVO(M)	RELATIVO(D/H)
1	0.0036	0.0036	0.0012
2	0.0094	0.0058	0.0019
3	0.0158	0.0064	0.0021
4	0.0224	0.0065	0.0021
5	0.0294	0.0060	0.0020
6	0.0349	0.0064	0.0021
7	0.0426	0.0077	0.0025
8	0.0506	0.0079	0.0026
9	0.0587	0.0080	0.0026
10	0.0687	0.0100	0.0033

## CORTANTES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	13.6574	8.7806	5.3021	3.4199	2.2417	1.4391
2	13.5299	8.3109	4.5938	2.5124	1.2752	0.4877
3	13.1920	7.1045	2.8774	0.5239	-0.5668	-0.9590
4	12.6093	5.1573	0.4396	-1.6734	-1.8741	-1.1750
5	11.7570	2.5863	-2.1257	-2.8933	-1.4439	0.2222
6	10.6304	-0.3267	-3.9983	-2.2886	0.4383	1.2953
7	9.1892	-3.1627	-4.2058	0.0767	1.7015	0.0058
8	7.3686	-5.2359	-2.0540	2.2673	0.1659	-1.2060
9	5.1777	-5.8366	1.4822	1.5907	-1.6929	0.8983
10	2.6377	-4.2303	3.5972	-1.6352	0.6879	-0.2138

VALORES MAS PROBABLES( 3 MODOS) RSC  
 \*\*\*\*\*

PLANTA	CORTANTE(T)	ACCION DE P.	MM.MUELCO
1	17.0803	0.5505	360.0999
2	16.5297	1.2725	308.8588
3	15.2572	1.6268	259.2695
4	13.6304	1.4059	213.4977
5	12.2244	0.8621	172.6064
6	11.3622	0.7729	135.9332
7	10.5893	1.3193	101.8464
8	9.2699	1.3280	70.0785
9	7.9418	1.7941	42.2687
10	6.1477	6.1477	18.4431

### 8.3. ESTRUCTURA DE 10 PLANTAS Y 3 VANOS DESIGUALES

En este apartado se analiza una estructura de 10 plantas y 3 vanos con un espectro de respuesta, construido a partir de los valores máximos esperados del movimiento del suelo en la base del edificio.

Se analizan dos casos, correspondientes a dos momentos del proceso de diseño de la misma estructura. El primer caso corresponde al diseño obtenido a partir de las acciones gravitatorias y de viento. El segundo caso corresponde al diseño final obtenido a partir de un proceso de optimización en el que, además de la resistencia de la estructura, se ha limitado el desplazamiento máximo entre plantas (ref. 2).

El diseño sísmico completo de esta estructura, puede verse en el artículo de Bertero y Camil "Nonlinear Seismic Design of Multistory Frames" (1), donde los valores de las acciones sísmicas obtenidas del análisis modal, se contrastan con las obtenidas por procedimientos paso a paso.

#### 8.3.1. Geometría y acciones

Las dimensiones de la estructura a analizar son las de la figura 2.

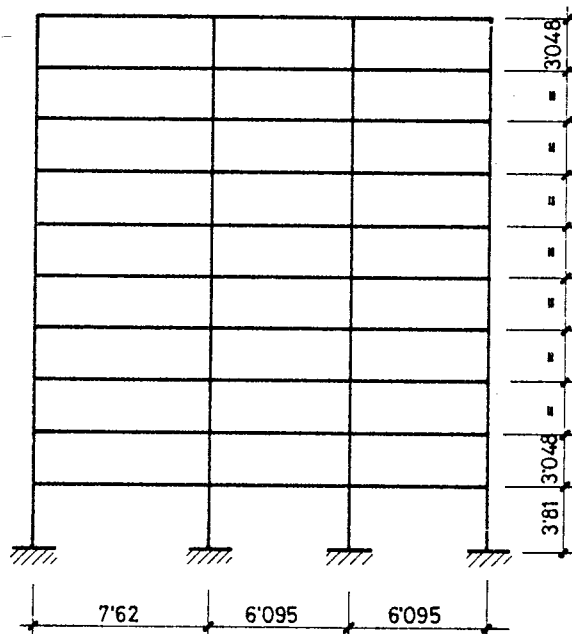


Figura 2

Estructura de 10 plantas y 3 vanos desiguales

Las acciones adoptadas para una separación entre pórticos de 6,095 metros, son:

Concarga:

- En azotea ..... 2,134 T/m
- Resto de plantas ... 2,850 T/m

Sobrecarga:

- En azotea ..... 1,067 T/m
- Resto de plantas ... 2,850 T/m

Viento:

- En toda la altura .. 0,098 T/m<sup>2</sup>

### 8.3.2. Espectro de respuesta

El análisis sísmico se va a realizar para una zona cercana a una falla activa, con probabilidad de ocurrencia de terremotos de la máxima intensidad. De acuerdo con esto, los valores máximos esperados para el movimiento del suelo, en la base del edificio, son:

- Aceleración máxima ..... 0,5 g
- Velocidad máxima ..... 52,3 cm/s
- Desplazamiento dinámico ... 31,8 cm

Considerando un factor de amortiguamiento del 5%, se construye el espectro de respuesta elástico, con los valores propuestos por Newmark. Empleando un factor de ductilidad de 4, constante para toda la estructura, se obtiene el espectro de respuesta inelástico por el procedimiento de Newmark-Hall. El movimiento del suelo, el espectro elástico y el espectro inelástico, son los representados en la figura 3.

A partir del espectro inelástico para aceleraciones, los valores a emplear en el programa para el espectro de velocidades son los que se dan en la tabla 2.

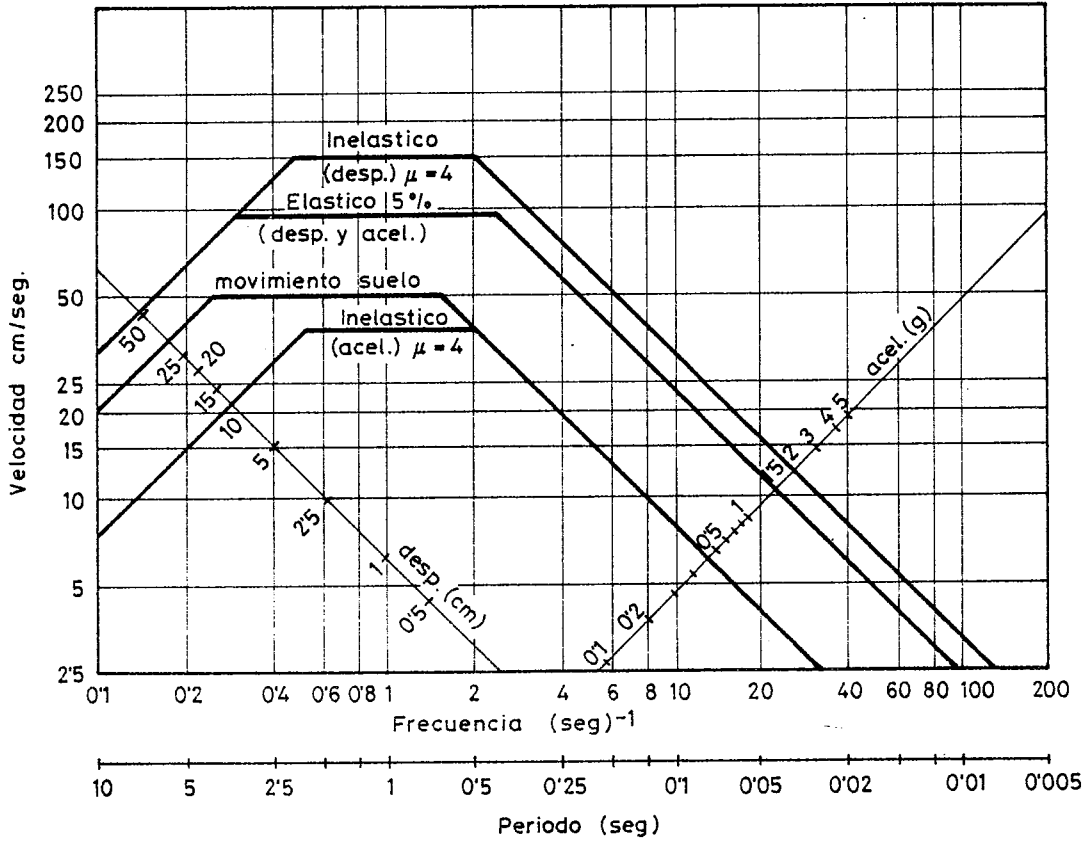


Figura 3

Movimiento del suelo y espectros de respuesta elástico e inelástico

<u>Periodo (seg)</u>	<u>Velocidad (m/s)</u>
0,00	0,007
0,05	0,050
0,14	0,101
0,45	0,392
1,82	0,392
3,00	0,254
10,00	0,071

Tabla 2

Valores del espectro de respuesta de velocidades



### 8.3.3. Condiciones para el análisis

Para la formación de la matriz de masas, se emplea el 100% de la carga de cada planta, mas el 30% de la sobrecarga.

Para el cálculo de la matriz de rigidez geométrica de los soportes, se emplean las fuerzas axiales correspondientes al total de la carga, mas la sobrecarga multiplicada por un coeficiente de 1,4.

Puesto que el periodo final de esta estructura debe estar comprendido entre 1 y 1,5 segundos, es suficiente con emplear los valores de los tres primeros modos, que se combinan con la regla de suma de cuadrados.

### 8.3.4. Listados de entrada de datos y salida de resultados

Se incluyen a continuación los listados correspondientes a la entrada de datos de cada problema y los resultados obtenidos en cada caso.

## DATOS DEL PROBLEMA (10P-INI)

\*\*\*\*\*

NUMERO DE PLANTAS.... 10

NUMERO DE VANOS..... 3

## PLANTA 1

-----

ALTURA ... 3.81 METROS

SOPORTES INERCIAS.(M4)

-----

31	0.00052715
32	0.00089473
33	0.00089473
34	0.00052715

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCE (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
1	0.00038264	7.620	2.850	2.850
2	0.00038264	6.095	2.850	2.850
3	0.00038264	6.095	2.850	2.850

## PLANTA 2

-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES INERCIAS.(M4)

-----

35	0.00052715
36	0.00089473
37	0.00089473
38	0.00052715

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCE (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
4	0.00038264	7.620	2.850	2.850
5	0.00038264	6.095	2.850	2.850
6	0.00038264	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 3**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
39	0.00052715
40	0.00069602
41	0.00066305
42	0.00035429

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
7	0.00038264	7.620	2.850	2.850
8	0.00038264	6.095	2.850	2.850
9	0.00038264	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 4**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
43	0.00038642
44	0.00066305
45	0.00061464
46	0.00035429

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
10	0.00038264	7.620	2.850	2.850
11	0.00038264	6.095	2.850	2.850
12	0.00038264	6.095	2.850	2.850

PLANTA 5  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
47	0.00030135
48	0.00052715
49	0.00052715
50	0.00026701

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
13	0.00031652	7.620	2.850	2.850
14	0.00020811	6.095	2.850	2.850
15	0.00020811	6.095	2.850	2.850

PLANTA 6  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
51	0.00026701
52	0.00052715
53	0.00035429
54	0.00026701

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
16	0.00031652	7.620	2.850	2.850
17	0.00020811	6.095	2.850	2.850
18	0.00020811	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 7**

-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

-----

55	0.00026701
56	0.00038642
57	0.00035429
58	0.00017856

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
-----				
19	0.00031652	7.620	2.850	2.850
20	0.00020811	6.095	2.850	2.850
21	0.00020811	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 8**

-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

-----

59	0.00026701
60	0.00030135
61	0.00026701
62	0.00017856

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
-----				
22	0.00031652	7.620	2.850	2.850
23	0.00020811	6.095	2.850	2.850
24	0.00020811	6.095	2.850	2.850

PLANTA 9  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
63	0.00017856
64	0.00030135
65	0.00026701
66	0.00017856

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
25	0.00031652	7.620	2.850	2.850
26	0.00020811	6.095	2.850	2.850
27	0.00020811	6.095	2.850	2.850

PLANTA 10  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
67	0.00017856
68	0.00030135
69	0.00026701
70	0.00017856

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
28	0.00020811	7.620	2.134	1.067
29	0.00009573	6.095	2.134	1.067
30	0.00009573	6.095	2.134	1.067

MODULO DE ELASTICIDAD 21000000 T/M2

**CONDICIONES PARA EL ANALISIS**  
\*\*\*\*\*

NUMERO DE MODOS UTILIZADOS	3
FORMA DE COMBINACION DE MODOS	RSC
ANALISIS ELASTICO NO LINEAL	
COEF. DE SOBRECARGA PARA MATRIZ DE MASAS	.3
COEF. DE PONDERACION DE CONCARGA	1
COEF. DE PONDERACION DE SOBRECARGA	1.4

FACTOR DE DUCTILIDAD DEL ESPECTRO REDUCIDO	4
--	---

**DATOS DEL ESPECTRO (BP-1)**  
\*\*\*\*\*

PUNTO	PERIODO (SEG)	VELOCIDAD (M/S)
1	0.000	0.007
2	0.050	0.050
3	0.140	0.101
4	0.450	0.392
5	1.820	0.392
6	3.000	0.254
7	10.000	0.071

## VALORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

MODO	VALOR PROPIO	FREC.(RAD/SEG)	FREC.(CIC/SEG)	PERIODO(SEG)
1	9.8911	3.1450	0.5005	1.9978
2	81.4344	9.0241	1.4362	0.6962
3	249.3911	15.7921	2.5133	0.3978
4	561.9980	23.7064	3.7730	0.2650
5	1029.3038	32.0827	5.1061	0.1958
6	1760.6235	41.9597	6.6781	0.1497
7	2755.2273	52.4902	8.3540	0.1197
8	3899.6332	62.4470	9.9387	0.1006
9	5559.5112	74.5621	11.8669	0.0842
10	8692.0290	93.2310	14.8381	0.0673

## VECTORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	0.0894	-0.2722	0.3600	-0.5248	0.7228	0.7683
2	0.1988	-0.5668	0.6525	-0.7538	0.7406	0.4260
3	0.3166	-0.8024	0.6964	-0.4025	-0.1342	-0.6515
4	0.4335	-0.9057	0.4161	0.3106	-0.8659	-0.5897
5	0.5629	-0.8262	-0.1496	0.7957	-0.3577	0.6864
6	0.6976	-0.5449	-0.7008	0.4703	0.7587	0.5448
7	0.8154	-0.1137	-0.8214	-0.4332	0.5975	-0.9073
8	0.9071	0.3635	-0.3733	-0.8396	-0.6975	-0.1564
9	0.9671	0.7544	0.3685	-0.1383	-0.6606	1.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	-0.8201

## TEST DE ORTOGONALIDAD

\*\*\*\*\*

MAYOR ERROR ABSOLUTO

MODOS	ERROR
1 Y 2	7.4800E-10



VALORES GENERALIZADOS

\*\*\*\*\*

MODO	MASA	RIGIDEZ
1	31.5780	312.3439
2	31.5119	2566.1590
3	24.9614	6225.1623
4	26.3914	14831.9539
5	33.5225	34504.9257
6	34.4220	60604.2464

FACTORES DE PARTICIPACION

Y VALORES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

MODO	F.P.DESP.	DESP.MAXIMO	MASA MODAL EF.	CORT.MAX.BASE	COEF.SISMICO
1	1.3375	0.1578	56.4962	65.9563	0.1188
2	-0.5340	-0.0231	8.9884	31.7961	0.3602
3	0.3326	0.0072	2.7615	14.9612	0.5517
4	-0.2416	-0.0022	1.5410	7.9777	0.5271
5	0.1708	0.0008	0.9780	4.8138	0.5012
6	0.1253	0.0003	0.5408	2.4994	0.4706

DESPLAZAMIENTOS MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	0.0141	0.0063	0.0026	0.0011	0.0005	0.0002
2	0.0314	0.0131	0.0047	0.0016	0.0006	0.0001
3	0.0499	0.0186	0.0050	0.0008	-0.0001	-0.0002
4	0.0684	0.0210	0.0030	-0.0006	-0.0007	-0.0001
5	0.0888	0.0191	-0.0010	-0.0017	-0.0002	0.0002
6	0.1101	0.0126	-0.0050	-0.0010	0.0006	0.0001
7	0.1287	0.0026	-0.0059	0.0009	0.0004	-0.0002
8	0.1432	-0.0084	-0.0026	0.0018	-0.0005	-0.0000
9	0.1526	-0.0175	0.0026	0.0003	-0.0005	0.0003
10	0.1578	-0.0231	0.0072	-0.0022	0.0008	-0.0002

## FUERZAS MODALES MAXIMAS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	1.0439	3.8441	4.8496	4.9069	4.5422	3.3266
2	2.3213	8.0038	8.7892	7.0488	4.6538	1.8446
3	3.6962	11.3312	9.3803	3.7638	-0.8434	-2.8210
4	5.0594	12.7899	5.6045	-2.9049	-5.4416	-2.5536
5	6.5698	11.6672	-2.0160	-7.4404	-2.2479	2.9720
6	8.1421	7.6946	-9.4387	-4.3976	4.7678	2.3589
7	9.5173	1.6064	-11.0639	4.0504	3.7550	-3.9286
8	10.5880	-5.1340	-5.0286	7.8505	-4.3830	-0.6772
9	11.2872	-10.6540	4.9637	1.2933	-4.1510	4.3297
10	7.7307	-9.3531	8.9211	-6.1931	4.1621	-2.3520

## DESPLAZAMIENTOS TOTALES MAXIMOS

MAS PROBABLES( 3 MODOS) RSC

\*\*\*\*\*

PLANTA	ABSOLUTO	RELATIVO(M)	RELATIVO(D/H)
1	0.0156	0.0156	0.0041
2	0.0343	0.0186	0.0061
3	0.0535	0.0192	0.0063
4	0.0716	0.0180	0.0059
5	0.0909	0.0192	0.0063
6	0.1109	0.0200	0.0065
7	0.1289	0.0179	0.0058
8	0.1434	0.0145	0.0047
9	0.1537	0.0102	0.0033
10	0.1597	0.0060	0.0019

## CORTANTES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	65.9563	31.7961	14.9612	7.9777	4.8138	2.4994
2	64.9123	27.9520	10.1115	3.0708	0.2715	-0.8271
3	62.5910	19.9482	1.3223	-3.9780	-4.3822	-2.6718
4	58.8948	8.6170	-8.0580	-7.7418	-3.5387	0.1492
5	53.8353	-4.1729	-13.6626	-4.8368	1.9029	2.7028
6	47.2655	-15.8401	-11.6465	2.6036	4.1508	-0.2692
7	39.1233	-23.5348	-2.2077	7.0012	-0.6169	-2.6281
8	29.6060	-25.1412	8.8561	2.9508	-4.3719	1.3005
9	19.0179	-20.0072	13.8848	-4.8997	0.0111	1.9777
10	7.7307	-9.3531	8.9211	-6.1931	4.1621	-2.3520

VALORES MAS PROBABLES( 3 MODOS) RSC  
\*\*\*\*\*

PLANTA	CORTANTE(T)	ACCION DE P.	MOM.VUELCO
1	74.7333	3.3388	1612.3323
2	71.3945	5.6882	1327.5983
3	65.7063	5.6414	1109.9877
4	60.0648	4.3663	909.7148
5	55.6985	4.5069	726.6371
6	51.1916	5.4816	556.8679
7	45.7099	5.8723	400.8358
8	39.8376	8.9383	261.5118
9	30.8992	15.8382	140.0868
10	15.0609	15.0609	45.9058

## DATOS DEL PROBLEMA (10P-FIN)

\*\*\*\*\*

NUMERO DE PLANTAS.... 10

NUMERO DE VANOS..... 3

## PLANTA 1

-----

ALTURA ... 3.81 METROS

SOPORTES INERCIAS.(M4)

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
31	0.00069602
32	0.00111192
33	0.00105672
34	0.00061464

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
1	0.00087260	7.620	2.850	2.850
2	0.00087260	6.095	2.850	2.850
3	0.00087260	6.095	2.850	2.850

## PLANTA 2

-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES INERCIAS.(M4)

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
35	0.00066305
36	0.00105672
37	0.00105672
38	0.00061464

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
4	0.00075525	7.620	2.850	2.850
5	0.00075525	6.095	2.850	2.850
6	0.00075525	6.095	2.850	2.850

### PLANTA 3

---

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
39	0.00052715
40	0.00089473
41	0.00089473
42	0.00052715

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
7	0.00075525	7.620	2.850	2.850
8	0.00075525	6.095	2.850	2.850
9	0.00075525	6.095	2.850	2.850

### PLANTA 4

---

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
43	0.00052715
44	0.00089473
45	0.00079108
46	0.00052715

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCES (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
10	0.00063188	7.620	2.850	2.850
11	0.00063188	6.095	2.850	2.850
12	0.00063188	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 5**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

47	0.00038642
48	0.00066305
49	0.00061464
50	0.00035429

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

13	0.00063188	7.620	2.850	2.850
14	0.00063188	6.095	2.850	2.850
15	0.00063188	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 6**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

51	0.00038642
52	0.00061464
53	0.00061464
54	0.00035429

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

16	0.00063188	7.620	2.850	2.850
17	0.00063188	6.095	2.850	2.850
18	0.00063188	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 7**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

55	0.00026701
56	0.00052715
57	0.00052715
58	0.00026701

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

19	0.00047479	7.620	2.850	2.850
20	0.00047479	6.095	2.850	2.850
21	0.00047479	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 8**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES      INERCIAS.(M4)

59	0.00026701
60	0.00030135
61	0.00026701
62	0.00017856

VIGAS      INERCIAS (M4)      LUCES (M)      CONCARGA (T/M)      SOBRECARGA (T/M)

22	0.00031652	7.620	2.850	2.850
23	0.00031652	6.095	2.850	2.850
24	0.00031652	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 9**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
63	0.00017856
64	0.00030135
65	0.00026701
66	0.00017856

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCE (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
25	0.00031652	7.620	2.850	2.850
26	0.00020811	6.095	2.850	2.850
27	0.00020811	6.095	2.850	2.850

**PLANTA 10**  
-----

ALTURA ... 3.048 METROS

SOPORTES	INERCIAS.(M4)
67	0.00017856
68	0.00030135
69	0.00026701
70	0.00017856

VIGAS	INERCIAS (M4)	LUCE (M)	CONCARGA (T/M)	SOBRECARGA (T/M)
28	0.00020811	7.620	2.134	1.067
29	0.00020811	6.095	2.134	1.067
30	0.00020811	6.095	2.134	1.067

MODULO DE ELASTICIDAD 21000000 T/M2



CONDICIONES PARA EL ANALISIS  
 \*\*\*\*\*

NUMERO DE MODOS UTILIZADOS	3
FORMA DE COMBINACION DE MODOS	RSC
ANALISIS ELASTICO NO LINEAL	
COEF. DE SOBRECARGA PARA MATRIZ DE MASAS	.3
COEF. DE PONDERACION DE CONCARGA	1
COEF. DE PONDERACION DE SOBRECARGA	1.4
FACTOR DE DUCTILIDAD DEL ESPECTRO REDUCIDO	4

DATOS DEL ESPECTRO (BP-1)  
 \*\*\*\*\*

PUNTO	PERIODO (SEG)	VELOCIDAD (M/S)
-----	-----	-----
1	0.000	0.007
2	0.050	0.050
3	0.140	0.101
4	0.450	0.392
5	1.820	0.392
6	3.000	0.254
7	10.000	0.071

## VALORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

-----

MOD0 VALOR PROPIO FREQ.(RAD/SEG) FREQ.(CIC/SEG) PERIODO(SEG)

-----

MOD0	VALOR PROPIO	FREQ.(RAD/SEG)	FREQ.(CIC/SEG)	PERIODO(SEG)
1	18.4555	4.2959	0.6837	1.4625
2	127.1163	11.2745	1.7944	0.5572
3	377.0738	19.4183	3.0905	0.3235
4	806.6798	28.4021	4.5203	0.2212
5	1456.3563	38.1622	6.0737	0.1646
6	2370.6123	48.6889	7.7490	0.1290
7	3404.9942	58.3523	9.2870	0.1076
8	5020.3109	70.8541	11.2767	0.0886
9	7427.7096	86.1841	13.7166	0.0729
10	11281.5050	106.2144	16.9045	0.0591

## VECTORES PROPIOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	0.0947	-0.2133	0.4270	-0.5039	0.7969	0.7429
2	0.1974	-0.4194	0.7382	-0.7038	0.7963	0.4187
3	0.3083	-0.5907	0.8031	-0.4215	-0.0866	-0.5715
4	0.4207	-0.6836	0.5389	0.2063	-0.9058	-0.6362
5	0.5384	-0.6729	-0.0089	0.7362	-0.6040	0.4801
6	0.6437	-0.5404	-0.5628	0.6100	0.5559	0.6901
7	0.7460	-0.2680	-0.8731	-0.1737	0.9518	-0.5897
8	0.8584	0.1978	-0.6088	-0.9336	-0.4941	-0.5076
9	0.9493	0.6855	0.2297	-0.3059	-0.8489	1.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	-0.7330

## TEST DE ORTOGONALIDAD

\*\*\*\*\*

MAYOR ERROR ABSOLUTO

MODOS                      ERROR

-----                      -----

1 Y 2                      7.3800E-10

VALORES GENERALIZADOS

\*\*\*\*\*

MODO	MASA	RIGIDEZ
1	29.0112	535.4187
2	22.6170	2874.9937
3	28.6116	10788.6900
4	26.4713	21353.9183
5	39.6470	57740.2355
6	30.8458	73123.6721

FACTORES DE PARTICIPACION

Y VALORES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

MODO	F.P.DESP.	DESP.MAXIMO	MASA MODAL EF.	CORT.MAX.BASE	COEF.SISMICO
1	1.3962	0.1274	56.5608	95.2501	0.1714
2	-0.6089	-0.0211	8.3869	37.0674	0.4500
3	0.3515	0.0049	3.5367	18.7709	0.5404
4	-0.2336	-0.0014	1.4456	7.2774	0.5126
5	0.1552	0.0005	0.9561	4.5294	0.4824
6	0.1311	0.0002	0.5308	2.4498	0.4699

DESPLAZAMIENTOS MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MODO 1	MODO 2	MODO 3	MODO 4	MODO 5	MODO 6
1	0.0120	0.0045	0.0021	0.0007	0.0004	0.0001
2	0.0251	0.0088	0.0036	0.0010	0.0004	0.0001
3	0.0392	0.0125	0.0039	0.0006	-0.0000	-0.0001
4	0.0536	0.0144	0.0026	-0.0003	-0.0004	-0.0001
5	0.0686	0.0142	-0.0000	-0.0010	-0.0003	0.0001
6	0.0820	0.0114	-0.0027	-0.0008	0.0002	0.0001
7	0.0950	0.0056	-0.0043	0.0002	0.0004	-0.0001
8	0.1093	-0.0041	-0.0030	0.0013	-0.0002	-0.0001
9	0.1209	-0.0145	0.0011	0.0004	-0.0004	0.0002
10	0.1274	-0.0211	0.0049	-0.0014	0.0005	-0.0001

## FUERZAS MODALES MAXIMAS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	1.6656	4.2912	5.9564	4.4308	4.3818	3.3620
2	3.4703	8.4370	10.2965	6.1888	4.3786	1.8950
3	5.4199	11.8827	11.2014	3.7064	-0.4764	-2.5863
4	7.3939	13.7527	7.5170	-1.8141	-4.9807	-2.8789
5	9.4628	13.5358	-0.1251	-6.4738	-3.3214	2.1730
6	11.3138	10.8711	-7.8502	-5.3637	3.0566	3.1229
7	13.1119	5.3912	-12.1771	1.5275	5.2337	-2.6686
8	15.0870	-3.9799	-8.4909	8.2095	-2.7169	-2.2972
9	16.6835	-13.7906	3.2049	2.6902	-4.6679	4.5252
10	11.6409	-13.3240	9.2380	-5.8241	3.6420	-2.1971

## DESPLAZAMIENTOS TOTALES MAXIMOS

MAS PROBABLES( 3 MODOS) RSC

\*\*\*\*\*

PLANTA	ABSOLUTO	RELATIVO(M)	RELATIVO(D/H)
1	0.0130	0.0130	0.0034
2	0.0269	0.0138	0.0045
3	0.0414	0.0144	0.0047
4	0.0555	0.0141	0.0046
5	0.0700	0.0144	0.0047
6	0.0828	0.0127	0.0041
7	0.0953	0.0124	0.0040
8	0.1094	0.0141	0.0046
9	0.1218	0.0123	0.0040
10	0.1292	0.0074	0.0024

## CORTANTES MODALES MAXIMOS

\*\*\*\*\*

PLANTA	MOD0 1	MOD0 2	MOD0 3	MOD0 4	MOD0 5	MOD0 6
1	95.2501	37.0674	19.7709	7.2774	4.5294	2.4498
2	93.5844	32.7761	12.8145	2.8466	0.1475	-0.9121
3	90.1140	24.3390	2.5179	-3.3421	-4.2310	-2.8071
4	84.6941	12.4563	-8.6834	-7.0486	-3.7546	-0.2208
5	77.3002	-1.2964	-16.2005	-5.2344	1.2260	2.6581
6	67.8374	-14.8322	-16.0753	1.2393	4.5475	0.4851
7	56.5236	-25.7034	-8.2251	6.6031	1.4908	-2.6378
8	43.4116	-31.0946	3.9520	5.0756	-3.7428	0.0308
9	28.3245	-27.1147	12.4429	-3.1338	-1.0259	2.3280
10	11.6409	-13.3240	9.2380	-5.8241	3.6420	-2.1971

VALORES MAS PROBABLES( 3 MODOS) RSC

\*\*\*\*\*

PLANTA	CORTANTE(T)	ACCION DE P.	MOM.VUELCO
1	103.9178	3.9351	2245.9083
2	99.9827	6.6056	1849.9811
3	93.3770	7.3325	1545.2339
4	86.0445	7.0542	1260.6206
5	78.9902	7.7138	998.3568
6	71.2764	8.6406	757.5944
7	62.6357	9.0907	540.3438
8	53.5450	12.4072	349.4299
9	41.1377	21.1782	186.2247
10	19.9595	19.9595	60.8367

Referencias

1. BERTERO, V., KAMIL, H., "Nonlinear Seismic Design of Multistory Frames", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 2, Núm. 4, 1975, pp. 494-516.
2. MARTI, P., *Optimización de Estructuras Sismorresistentes teniendo en cuenta el comportamiento no lineal*, Tesis Doctoral, ETSII UPV, Valencia, Abril 1982.